

---

Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков

# Введение в теорию ранней Вселенной

Теория горячего Большого взрыва

Москва

2006

---



# Оглавление

Предисловие	vii
<b>1 Введение</b>	<b>1</b>
1.1 О единицах измерения	1
1.2 Вселенная сегодня	3
1.2.1 Однородность и изотропия	3
1.2.2 Расширение	5
1.2.3 Время жизни Вселенной и размер её наблюдаемой части	8
1.2.4 Пространственная плоскостность	10
1.2.5 “Тёплая” Вселенная	10
1.3 Баланс энергий в современной Вселенной	14
1.4 Вселенная в будущем	20
1.5 Вселенная в прошлом	21
1.5.1 Рекомбинация	21
1.5.2 Первичный нуклеосинтез	23
1.5.3 Закалка нейтрино	24
1.5.4 Фазовые переходы во Вселенной	24
1.5.5 Генерация барионной асимметрии	25
1.5.6 Генерация тёмной материи	26
1.6 Образование структур во Вселенной	27
1.7 Инфляционная стадия	28
<b>2 Однородная изотропная Вселенная</b>	<b>31</b>
2.1 Однородные изотропные пространства	31
2.2 Метрика Фридмана–Робертсона–Уокера	33
2.3 Красное смещение. Закон Хаббла	35
2.4 Замедление относительного движения	40
2.5 Газы свободных частиц в расширяющейся Вселенной	42
<b>3 Динамика расширения Вселенной</b>	<b>46</b>
3.1 Уравнение Фридмана	46
3.2 Примеры космологических решений. Возраст Вселенной. Космологический горизонт	50
3.2.1 Нерелятивистское вещество (“пыль”)	50
3.2.2 Ультрарелятивистское вещество (“радиация”)	52
3.2.3 Вакуум	54
3.2.4 Уравнение состояния $p = w\rho$	57
3.3 Решения с реколлапсом	58
<b>4 <math>\Lambda</math>CDM: космологическая модель с тёмной материей и тёмной энергией</b>	<b>61</b>
4.1 Современный состав Вселенной	61
4.2 Общие свойства эволюции Вселенной	64

4.3	Переход от замедления к ускорению . . . . .	65
4.4	Переход от радиационно-доминированной к пылевидной стадии . . .	66
4.5	Возраст современной Вселенной и размер горизонта . . . . .	69
4.6	Соотношение видимая яркость — красное смещение для удалённых “стандартных свеч” . . . . .	72
4.7	Угловые размеры удалённых объектов . . . . .	80
4.8	*Квинтэссенция . . . . .	82
4.8.1	Особенности эволюции однородного скалярного поля в расширяющейся Вселенной . . . . .	83
4.8.2	Ускоренное расширение Вселенной за счёт скалярного поля . .	87
4.8.3	Следящее поле . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Термодинамика в расширяющейся Вселенной</b>	<b>92</b>
5.1	Функции распределения бозонов и фермионов . . . . .	92
5.2	Энтропия в расширяющейся Вселенной. Барион-фотонное отношение.	99
5.3	*Неравновесные процессы . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Рекомбинация</b>	<b>110</b>
6.1	Температура рекомбинации . . . . .	110
6.2	Последнее рассеяние фотонов . . . . .	115
6.3	*Выполнение условий термодинамического равновесия . . . . .	117
6.4	Горизонт на момент рекомбинации и угол, под которым он виден сегодня. Пространственная плоскостность Вселенной . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Реликтовые нейтрино</b>	<b>126</b>
7.1	Температура закалки нейтрино . . . . .	126
7.2	Эффективная температура нейтрино. Космологическое ограничение на массу нейтрино . . . . .	128
7.3	*Стерильные нейтрино . . . . .	132
<b>8</b>	<b>Первичный нуклеосинтез</b>	<b>136</b>
8.1	Закалка нейтронов. Нейтрон-протонное отношение . . . . .	136
8.2	Начало нуклеосинтеза. Направление термоядерных реакций . . . . .	140
8.3	Кинетика нуклеосинтеза . . . . .	145
8.3.1	Горение нейтронов, $p + n \longrightarrow D + \gamma$ . . . . .	146
8.3.2	Горение дейтерия . . . . .	147
8.3.3	*Образование первичных ${}^3\text{He}$ и ${}^3\text{H}$ . . . . .	150
8.3.4	*Образование и горение наиболее тяжёлых ядер первичной плазмы . . . . .	151
8.4	Наблюдаемая распространённость первичных элементов . . . . .	152
<b>9</b>	<b>Тёмная материя</b>	<b>157</b>
9.1	Холодная, горячая и тёплая тёмная материя . . . . .	158
9.2	Закалка тяжёлых реликтовых частиц . . . . .	160
9.3	Слабовзаимодействующие массивные частицы (WIMPs) . . . . .	164
9.4	Другие применения результатов раздела 9.2 . . . . .	170
9.4.1	Остаточная плотность барионов в барион-симметричной Вселенной . . . . .	170
9.4.2	*Тяжёлые нейтрино . . . . .	171
9.5	Новые частицы — кандидаты на роль тёмной материи . . . . .	172
9.6	*Стабильные частицы в суперсимметричных теориях . . . . .	172
9.6.1	Нейтралино . . . . .	175
9.6.2	Снейтрино . . . . .	189

9.6.3	Гравитино . . . . .	190
9.7	*Другие кандидаты . . . . .	204
9.7.1	Аксионы и другие лёгкие долгоживущие частицы . . . . .	204
9.7.2	Сверхтяжёлые реликтовые частицы . . . . .	217
9.7.3	Экзотика . . . . .	219
<b>10</b>	<b>Фазовые переходы в ранней Вселенной</b>	<b>220</b>
10.1	Типы фазовых переходов . . . . .	222
10.2	Эффективный потенциал в однопетлевом приближении . . . . .	230
10.3	Инфракрасная проблема . . . . .	239
<b>11</b>	<b>Генерация барионной асимметрии</b>	<b>243</b>
11.1	Необходимые условия генерации асимметрии . . . . .	244
11.2	Несохранение барионного и лептонных чисел во взаимодействиях частиц . . . . .	247
11.2.1	Электрослабый механизм . . . . .	247
11.2.2	Нарушение барионного числа в теориях Большого объединения . . . . .	253
11.2.3	Несохранение лептонных чисел и майорановские массы нейтрино . . . . .	261
11.3	Генерация асимметрии в распадах частиц . . . . .	263
11.4	Барионная асимметрия и массы нейтрино: лептогенезис . . . . .	271
11.5	Электрослабый бариогенезис . . . . .	277
11.5.1	Условия нарушения термодинамического равновесия . . . . .	278
11.5.2	*Генерация барионной асимметрии на толстой, медленно движущейся стенке . . . . .	280
11.5.3	*Бариогенезис на тонкой стенке . . . . .	284
11.6	*Механизм Аффлекса–Дайна . . . . .	291
11.6.1	Скалярные поля, несущие барионное число . . . . .	291
11.6.2	Генерация асимметрии . . . . .	293
11.7	Заключительные замечания . . . . .	299
<b>12</b>	<b>Топологические дефекты и солитоны во Вселенной</b>	<b>301</b>
12.1	Образование топологических дефектов в ранней Вселенной . . . . .	302
12.2	*Монополи 'т Хоофта–Полякова . . . . .	304
12.2.1	Монополи в калибровочных теориях . . . . .	304
12.2.2	Механизм Киббла . . . . .	308
12.2.3	Остаточная концентрация: проблема монополей . . . . .	308
12.3	*Космические струны . . . . .	311
12.3.1	Струнные конфигурации . . . . .	311
12.3.2	Газ космических струн . . . . .	317
12.3.3	Дефицит угла . . . . .	319
12.3.4	Струны во Вселенной . . . . .	325
12.4	*Доменные стенки . . . . .	330
12.5	*Текстуры . . . . .	334
12.6	*Гибридные топологические дефекты . . . . .	337
12.7	*Нетопологические солитоны: Q-шары . . . . .	338
12.7.1	Модель с двумя полями . . . . .	338
12.7.2	Модели с плоскими направлениями . . . . .	343
<b>A</b>	<b>Элементы общей теории относительности</b>	<b>354</b>
A.1	Тензоры в искривленном пространстве-времени . . . . .	354
A.2	Ковариантная производная . . . . .	358
A.3	Тензор кривизны . . . . .	363
A.4	Уравнения гравитационного поля . . . . .	367
A.5	Конформно-связанные метрики . . . . .	370

A.6	Взаимодействие материи с гравитационным полем. Тензор энергии-импульса . . . . .	374
A.7	Движение частиц в гравитационном поле . . . . .	379
A.8	Ньютоновский предел в ОТО . . . . .	381
A.9	Линеаризованные уравнения Эйнштейна на фоне пространства Минковского . . . . .	383
A.10	Макроскопический тензор энергии-импульса . . . . .	384
<b>B</b>	<b>Стандартная модель физики частиц</b>	<b>386</b>
B.1	Описание Стандартной модели . . . . .	386
B.2	Глобальные симметрии Стандартной модели . . . . .	397
B.3	C-, P-, T-преобразования . . . . .	398
B.4	Смешивание кварков . . . . .	399
B.5	Эффективная теория Ферми . . . . .	405
B.6	Особенности сильных взаимодействий . . . . .	406
B.7	Эффективное число степеней свободы в Стандартной модели . . . . .	407
<b>C</b>	<b>Осцилляции нейтрино</b>	<b>409</b>
C.1	Наблюдения нейтринных осцилляций . . . . .	409
C.1.1	Солнечные нейтрино и KamLAND . . . . .	409
C.1.2	Атмосферные нейтрино и K2K . . . . .	413
C.2	Интерпретация результатов наблюдений: осцилляции . . . . .	415
C.3	Значения параметров осцилляций . . . . .	422
C.4	Дираковские и майорановские массы. Стерильные нейтрино. . . . .	426
C.5	Прямые поиски масс нейтрино . . . . .	431
<b>D</b>	<b>Квантовая теория поля при конечных температурах</b>	<b>433</b>
D.1	Бозонные поля: евклидово время и периодические граничные условия . . . . .	433
D.2	Фермионные поля: антипериодические условия . . . . .	436
D.3	Теория возмущений . . . . .	440
D.4	Однопетлевой эффективный потенциал . . . . .	443
D.5	Дебаевская экранировка . . . . .	447
	<b>Монографии, обзоры</b>	<b>451</b>
	Литература . . . . .	457

# Предисловие

Современная космология тесно связана с физикой микромира, изучающей элементарные частицы и их взаимодействия на наиболее фундаментальном уровне. Именно с этой точки зрения и написана эта книга. В ней излагаются результаты, относящиеся к однородной изотропной Вселенной на горячей стадии её эволюции и на последующих космологических этапах. Эту область космологии нередко называют теорией горячего Большого взрыва. Предполагается, что в дальнейшем будет написано продолжение, посвящённое инфляционной теории, теории пост-инфляционного разогрева и теории развития космологических возмущений, т.е. неоднородностей во Вселенной.

В основу книги положен курс лекций, читавшийся в течение ряда лет на кафедре квантовой статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета студентам, специализирующимся в области теоретической физики. Мы сочли целесообразным, однако, добавить ряд более специальных разделов, помеченных в книге звёздочкой. Дело в том, что в космологии имеются проблемы (природа тёмной материи и тёмной энергии, механизм образования асимметрии между веществом и антивеществом и т.д.), которые ещё не нашли своего однозначного решения. Большая часть дополнительных разделов как раз и посвящена обсуждению соответствующих гипотез, зачастую альтернативных друг другу. При первом чтении эти разделы можно опустить.

Для чтения книги достаточно, в принципе, знания материала, обычно излагаемого в курсах общей физики. Поэтому основные разделы книги должны быть доступны студентам старших курсов университетов. Необходимые для их чтения сведения из общей теории относительности и теории элементарных частиц помещены в приложениях, не претендующих, разумеется, на сколько-нибудь полное изложение этих самостоятельных направлений физики. В то же время, в некоторых разделах, помеченных звёздочкой, используются методы классической и квантовой теории поля, а также неравновесной статистической физики, так что для их чтения желательно владение соответствующими методами.

Сколько-нибудь полный библиографический обзор по обсуждаемым темам выходил бы далеко за рамки этой книги. Для ориентировки читателя мы поместили в конце книги перечень монографий и обзоров, в которых рассматриваются затронутые нами вопросы. Разумеется, этот перечень далеко не полон. По ходу изложения мы также приводим ссылки на оригинальную литературу, откуда мы почерпнули те или иные частные результаты.

Наблюдательная космология, как и экспериментальная физика частиц, быстро развивается. Приведённые в книге наблюдательные и экспериментальные данные и результаты их обработки (значения космологических параметров, ограничения на массы и константы связи новых гипотетических частиц и т.д.), скорее всего, будут уточнены уже до выхода книги в свет. Восполнить этот пробел поможет,

например, обращение к регулярно обновляемым материалам Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov/>

Мы хотели бы поблагодарить наших коллег из Института ядерных исследований РАН Ф.Л. Безрукова, С.В. Демидова, В.А. Кузьмина, Д.Г. Левкова, М.В. Либанова, Г.И. Рубцова, Д.В. Семикоза, П.Г. Тинякова, И.И. Ткачёва, С.В. Троицкого за участие в подготовке курса лекций и многочисленные полезные обсуждения и ценные замечания. Мы особенно благодарны С.Л. Дубовскому, принимавшему участие в работе над книгой на начальном этапе.



# Глава 1

## Введение

Цель этой Главы — дать беглый обзор вопросов, которыми мы будем заниматься на протяжении всей книги. Разумеется, обсуждение здесь будет носить качественный характер и не может претендовать на полноту. Наша задача состоит в том, чтобы пояснить место, которое занимает в космологии тот или иной её раздел. Однако прежде всего договоримся о единицах измерения физических величин.

### 1.1 О единицах измерения

Мы будем часто пользоваться “естественной” системой единиц, в которой постоянная Планка, скорость света и константа Больцмана полагаются равными единице,

$$\hbar = c = k_B = 1 .$$

В этой системе единиц масса, энергия и температура имеют одинаковую размерность (поскольку  $[E] = [mc^2]$ ,  $[E] = [k_B T]$ ). В качестве единицы измерения массы и энергии удобно выбрать 1 эВ или 1 ГэВ =  $10^9$  эВ; масса протона тогда равна  $m_p = 0.938$  ГэВ, а 1 К соответствует примерно  $10^{-13}$  ГэВ. Время и длина в естественной системе единиц имеют размерность  $M^{-1}$  (поскольку  $[E] = [\hbar\omega]$ ,  $[\omega] = [t^{-1}]$  и  $[l] = [ct]$ ). При этом  $1 \text{ ГэВ}^{-1} \sim 10^{-14}$  см и  $1 \text{ ГэВ}^{-1} \sim 10^{-24}$  с. Для дальнейших ссылок мы приводим переводные коэффициенты в таблицах 1.1 и 1.2.

Энергия	$1 \text{ ГэВ} = 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ эрг}$
Масса	$1 \text{ ГэВ} = 1.8 \cdot 10^{-24} \text{ г}$
Температура	$1 \text{ ГэВ} = 1.16 \cdot 10^{13} \text{ К}$
Длина	$1 \text{ ГэВ}^{-1} = 2.0 \cdot 10^{-14} \text{ см}$
Время	$1 \text{ ГэВ}^{-1} = 6.6 \cdot 10^{-25} \text{ с}$
Плотность числа частиц	$1 \text{ ГэВ}^3 = 1.3 \cdot 10^{41} \text{ см}^{-3}$
Плотность энергии	$1 \text{ ГэВ}^4 = 2.1 \cdot 10^{38} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$
Плотность массы	$1 \text{ ГэВ}^4 = 2.3 \cdot 10^{17} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$

Таблица 1.1: Переводные коэффициенты из естественной системы единиц в систему СГС.

Энергия	$1 \text{ эрг} = 6.3 \cdot 10^2 \text{ ГэВ}$
Масса	$1 \text{ г} = 5.6 \cdot 10^{23} \text{ ГэВ}$
Температура	$1 \text{ К} = 8.62 \cdot 10^{-14} \text{ ГэВ}$
Длина	$1 \text{ см} = 5.0 \cdot 10^{13} \text{ ГэВ}^{-1}$
Время	$1 \text{ с} = 1.5 \cdot 10^{24} \text{ ГэВ}^{-1}$
Плотность числа частиц	$1 \text{ см}^{-3} = 7.7 \cdot 10^{-42} \text{ ГэВ}^3$
Плотность энергии	$1 \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3} = 4.8 \cdot 10^{-39} \text{ ГэВ}^4$
Плотность массы	$1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3} = 4.5 \cdot 10^{-18} \text{ ГэВ}^4$

Таблица 1.2: Переводные коэффициенты из системы единиц СГС в естественную систему.

▷ *Задача 1. Убедиться в справедливости соотношений, собранных в таблицах 1 и 2. Найти чему равны 1 Вольт (В), 1 Гаусс (Гс), 1 Герц (Гц) и 1 Ангстрем ( $\text{\AA}$ ) в естественной системе единиц.*

В естественной системе единиц ньютоновская гравитационная постоянная  $G$  имеет размерность  $M^{-2}$ . Это следует из формулы для гравитационной потенциальной энергии  $V = G \frac{m_1 m_2}{r}$ , поскольку  $[V] = M$ ,  $[r^{-1}] = M$ . Удобно ввести планковскую массу  $M_{Pl}$  соотношением

$$G = \frac{1}{M_{Pl}^2}.$$

Численно

$$M_{Pl} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ}, \quad (1.1)$$

а планковские длина, время и масса в системе СГС равны соответственно

$$\begin{aligned} l_{Pl} &= \frac{1}{M_{Pl}} = 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см}, \\ t_{Pl} &= \frac{1}{M_{Pl}} = 5.4 \cdot 10^{-44} \text{ с}, \\ M_{Pl} &= 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ г}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Слабость гравитационных взаимодействий связана с большим значением  $M_{Pl}$ .

▷ *Задача 2. Убедиться в справедливости соотношений (1.1) и (1.2).*

▷ *Задача 3. Во сколько раз гравитационное взаимодействие двух протонов слабее их кулоновского взаимодействия?*

В космологии традиционной единицей измерения длины является мегапарсек,

$$1 \text{ Мпк} = 3.1 \cdot 10^{24} \text{ см}.$$

Договоримся ещё об обозначении, которое мы будем использовать в этой книге. Подстрочным индексом 0 мы будем обозначать современные значения тех величин, которые могут зависеть от времени. Например, если  $\rho(t)$  — средняя плотность энергии во Вселенной как функция времени, то  $\rho_0 \equiv \rho(t_0)$  — современная средняя плотность энергии.

В астрономии используются несколько единиц длины, в зависимости от размеров исследуемых астрофизических объектов и масштабов рассматриваемых явлений. Кроме традиционной метрической системы единиц (метр и его производные) используются также:

астрономическая единица (а.е.) — среднее расстояние от Земли до Солнца,

$$1 \text{ а.е.} = 1.5 \cdot 10^{13} \text{ см};$$

световой год (св.г.) — расстояние, проходимое фотоном за один земной год,

$$1 \text{ год} = 3.16 \cdot 10^7 \text{ с}, \quad 1 \text{ св.г.} = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}} \cdot 3.16 \cdot 10^7 \text{ с} = 0.95 \cdot 10^{18} \text{ см};$$

парсек (пк) — расстояние, с которого объект размером 1 а.е. виден под углом одна секунда,

$$1 \text{ ПК} = 3.3 \text{ св. г.} = 3.1 \cdot 10^{18} \text{ см}.$$

Для иллюстрации иерархии пространственных масштабов во Вселенной мы перечислим ниже расстояния до некоторых известных астрономических объектов, выраженные в этих единицах длины.

10 а.е. — среднее расстояние до Сатурна, 30 а.е. — среднее расстояние до Плутона, 100 а.е. — условная граница, до которой могут долететь массивные частицы, испускаемые Солнцем (солнечный ветер). Это же расстояние отвечает максимальному удалению земных космических аппаратов (Pioneer 10, Voyager 1, Voyager 2). Далее можно отметить Облако Оорта — источник наиболее удалённых комет, находящийся от нас на расстоянии  $10^4 - 10^5$  а.е.  $\sim 0.1 - 1$  ПК.

На расстоянии 1.3 ПК от Солнца располагаются ближайшие звезды — Проксима и Альфа созвездия Центавра. Арктур и Капелла удалены более чем на 10 ПК, около 100 ПК до Канопуса и Бетельгейзе, 2 кПК до Крабовидной туманности — остатка вспышки сверхновой, видимого невооружённым глазом.

Следующая примечательная точка в шкале расстояний — 8 кПК. Именно на такое расстояние удалено Солнце от центра Галактики. Наша Галактика — Млечный Путь — спирального типа, светящееся вещество в ней формирует четыре рукава, образующие диск диаметром примерно 30 кПК и толщиной около 250 ПК. На удалении в 30 кПК от центра Галактики расположены ближайшие карликовые галактики — спутники нашей Галактики. Всего таких спутников известно тринадцать, и на расстояние 50 кПК удалены наиболее крупные из них — Большое и Малое Магеллановы облака, размер каждого из которых около 1 кПК. В настоящее время активно ведётся поиск новых спутников, менее ярких, чем уже известные (до 1994 года было известно всего восемь карликовых галактик — спутников Млечного Пути).

Плотность вещества в обычных галактиках примерно в  $10^5$  раз превышает среднюю по Вселенной. Ближайшая к нам обычная галактика — спиральная галактика М31 — расположена в созвездии Андромеды и удалена от Солнца на 900 кПК. Несмотря на вроде бы большое удаление от Земли, эта галактика занимает заметную площадь на небесной сфере — её угловой размер превышает угловой размер Луны! Следующая спиральная галактика расположена в созвездии Треугольника. Наша Галактика, галактики Андромеды и Треугольника вместе со своими спутниками, а также ещё около 35 более мелких галактик образуют так называемую местную группу — гравитационно связанный конгломерат из полусотни галактик.

Следующий масштаб в этом списке — размер скопления галактик, 2-3 МПК. В богатых скоплениях насчитываются тысячи галактик. Плотность вещества в скоплениях в сотни и даже тысячи раз превосходит среднюю по Вселенной. Расстояние до центра ближайшего скопления, расположенного в созвездии Девы, около 12 МПК. Его угловой размер на небесной сфере составляет около пяти градусов. Скопления являются самыми крупными гравитационно связанными образованиями во Вселенной.

## 1.2 Вселенная сегодня

Наш беглый обзор мы начнем с краткого обсуждения современного состояния Вселенной (точнее, наблюдаемой ее части).

### 1.2.1 Однородность и изотропия

На больших масштабах видимая часть современной Вселенной однородна и изотропна. Размеры самых больших структур во Вселенной — сверхскоплений галактик и гигантских “пустот” (voids) — достигают десятков мегапарсек<sup>1</sup>. Области Вселенной размером 100 МПК и более выглядят все одинаково (однородность), при этом выделенных направлений во Вселенной нет (изотропия). Эти факты сегодня надёжно

<sup>1</sup>Средние размеры определены несколько условно: наиболее аккуратные оценки получаются из изучения корреляционных функций галактик (скоплений), а они имеют степенное поведение.

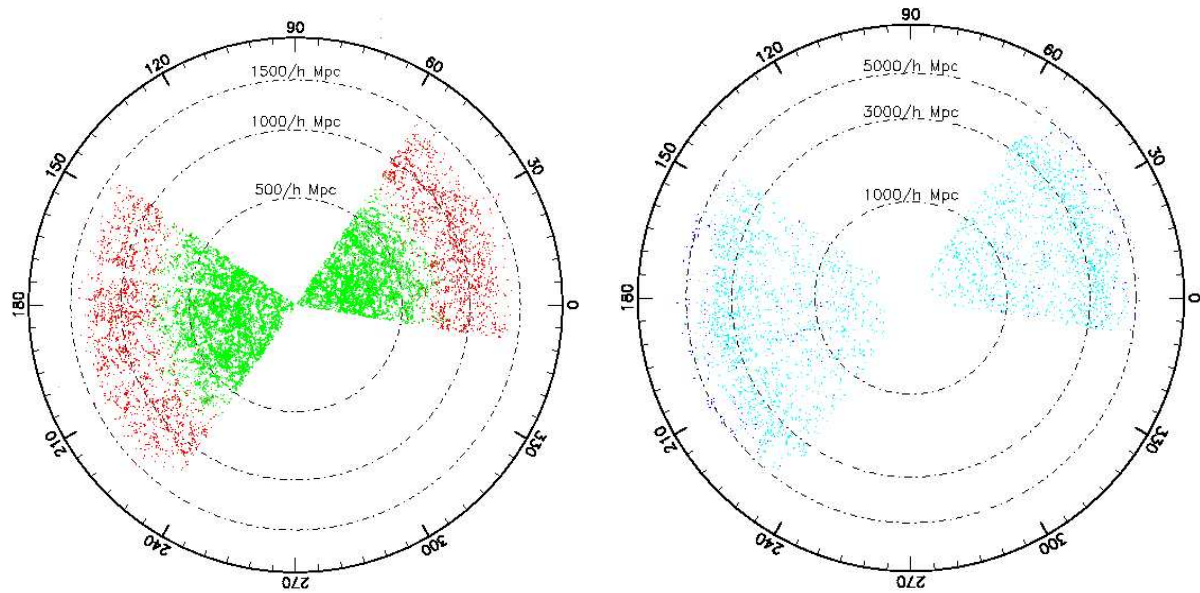


Рис. 1.1: Пространственное распределение галактик и квазаров по данным SDSS [1]. Зелёными точками отмечены все галактики (в данном телесном угле) с яркостью, превышающей некоторую. Красные точки указывают галактики наибольшей светимости из удалённых скоплений, образующие довольно однородную популяцию; в сопутствующей системе отсчёта их спектр смещён в красную область по сравнению с обычными галактиками, что обеспечивает их лучшую “видимость” на далёких расстояниях (см. примечание на следующей странице относительно красного смещения). Голубые и синие точки показывают расположение обычных квазаров. По поводу параметра  $h$  в шкале расстояний см. раздел 1.2.2.

установлены в результате глубоких обзоров, в которых наблюдались сотни тысяч галактик.

Сверхскоплений известно более 20. Местная группа входит в состав сверхскопления с центром в скоплении Девы. Размер сверхскопления около 40 Мпк, и помимо скопления Девы в него входят скопления из созвездий Гидра и Центавр. Эти наиболее крупные структуры уже очень “рыхлые”: плотность галактик в них всего в 2 раза превышает среднюю. До центра следующего сверхскопления, расположенного в созвездии Волосы Вероники, около сотни мегапарсек.

В настоящее время ведётся работа по составлению наиболее крупного каталога галактик и квазаров — каталога SDSS (Sloan Digital Sky Survey). В его основе лежат данные, полученные с помощью 2.5-метрового телескопа, способного одновременно в 5 частотных диапазонах (длины волн света  $\lambda = 3800 - 9200 \text{ \AA}$ , область видимого диапазона) измерять спектры 640 объектов. На этом телескопе предполагалось измерить положение и абсолютную светимость более двухсот миллионов астрономических объектов и определить расстояния до более  $10^6$  галактик и более  $10^5$  квазаров. Полная зона наблюдения составила почти четверть небесной сферы.

На сегодняшний день обработана большая часть экспериментальных данных, что позволило определить спектры около 675 тысяч галактик и более 90 тысяч квазаров. Результаты проиллюстрированы на рис. 1.1, где приведены ранние данные SDSS: положения 40 тысяч галактик и 4 тысяч квазаров, обнаруженных на участке небесной сферы площадью 500 квадратных градусов. Хорошо различимы скопления галактик и пустоты, изотропия и однородность Вселенной начинают проявляться на масштабах порядка 100 Мпк и больше. Цвет точки определяет тип объекта. Доминирование того или иного типа обусловлено, вообще говоря, процессами образования и эволюции структур — это асимметрия временная, а не пространственная.

Действительно, с расстояния 1.5 Гпк, на которое приходится максимум в распределении ярких красных эллиптических галактик (красные точки на рис. 1.1), свет летел до Земли около 5 миллиардов лет. Тогда Вселенная была другой (например, Солнечной системы ещё не было). Эта временная эволюция становится заметной на больших пространственных масштабах. Ещё одной причиной выбора объектов наблюдения является наличие у регистрирующих приборов порога чувствительности: на больших расстояниях реги-

стрируются только яркие объекты, а самыми яркими объектами во Вселенной являются квазары.

### 1.2.2 Расширение

Вселенная расширяется: галактики удаляются друг от друга<sup>2</sup>. Образно говоря, пространство, оставаясь однородным и изотропным, растягивается, в результате чего все расстояния увеличиваются.

Для описания этого расширения вводят понятие масштабного фактора  $a(t)$ , который увеличивается с течением времени. Расстояние между двумя удалёнными объектами во Вселенной пропорционально  $a(t)$ , а плотность частиц убывает как  $[a(t)]^{-3}$ . Темп расширения Вселенной, т.е. относительное увеличение расстояний в единицу времени, характеризуется параметром Хаббла

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Параметр Хаббла зависит от времени; для его современного значения применяем, как обычно, обозначение  $H_0$ .

Из-за расширения Вселенной увеличивается и длина волны фотона, испущенного в далёком прошлом. Как и все расстояния, длина волны растёт пропорционально  $a(t)$ . В результате фотон испытывает красное смещение<sup>3</sup>. Количественно красное смещение  $z$  связано с отношением длин волн фотона в момент испускания и в момент поглощения

$$\frac{\lambda_{\text{погл.}}}{\lambda_{\text{исп.}}} \equiv 1 + z. \quad (1.3)$$

Разумеется, это отношение зависит от того, когда фотон был испущен (считая, что поглощается он на Земле сегодня), т.е. от расстояния между источником и Землёй. Красное смещение — непосредственно измеряемая величина: длина волны в момент излучения определяется физикой процесса (например, это длина волны фотона, испускаемого при переходе атома водорода из первого возбужденного состояния в основное), а  $\lambda_{\text{погл.}}$  прямо измеряется. Таким образом, идентифицировав набор линий испускания (или поглощения) и определив, насколько они смещены в красную область спектра, можно измерить красное смещение источника.

Реально идентификация осуществляется сразу по нескольким линиям, наиболее характерным для объектов того или иного типа (см. рис. 1.2). Если в спектре найдены линии поглощения (провалы, как в спектрах на рис. 1.2), это означает, что объект, у которого определяется красное смещение, расположен между источником излучения (например, квазаром) и наблюдателем<sup>4</sup>. Если же в спектре обнаружены линии излучения (пики в спектре), то объект сам является излучателем<sup>5</sup>.

<sup>2</sup>Разумеется это не относится к галактикам, находящимся в одном скоплении и гравитационно связанным друг с другом; речь идет о галактиках, достаточно удалённых друг от друга.

<sup>3</sup>С точки зрения наблюдений увеличение длины волны полезно, поскольку красный свет слабее поглощается в межзвёздной среде. Это обусловлено сильным ростом сечения поглощения с увеличением энергии фотона.

<sup>4</sup>Фотоны вполне определённых частот испытывают резонансное поглощение на атомах и ионах (с последующим изотропным переизлучением), что и приводит к провалам в спектре интенсивности излучения в направлении на наблюдателя.

<sup>5</sup>Излучатель может быть активным или пассивным. В последнем случае объект облучается другим источником, не расположенным на линии объект — наблюдатель. В обоих случаях переходы с возбужденных уровней приводят к изотропному испусканию света на определенных длинах волн,

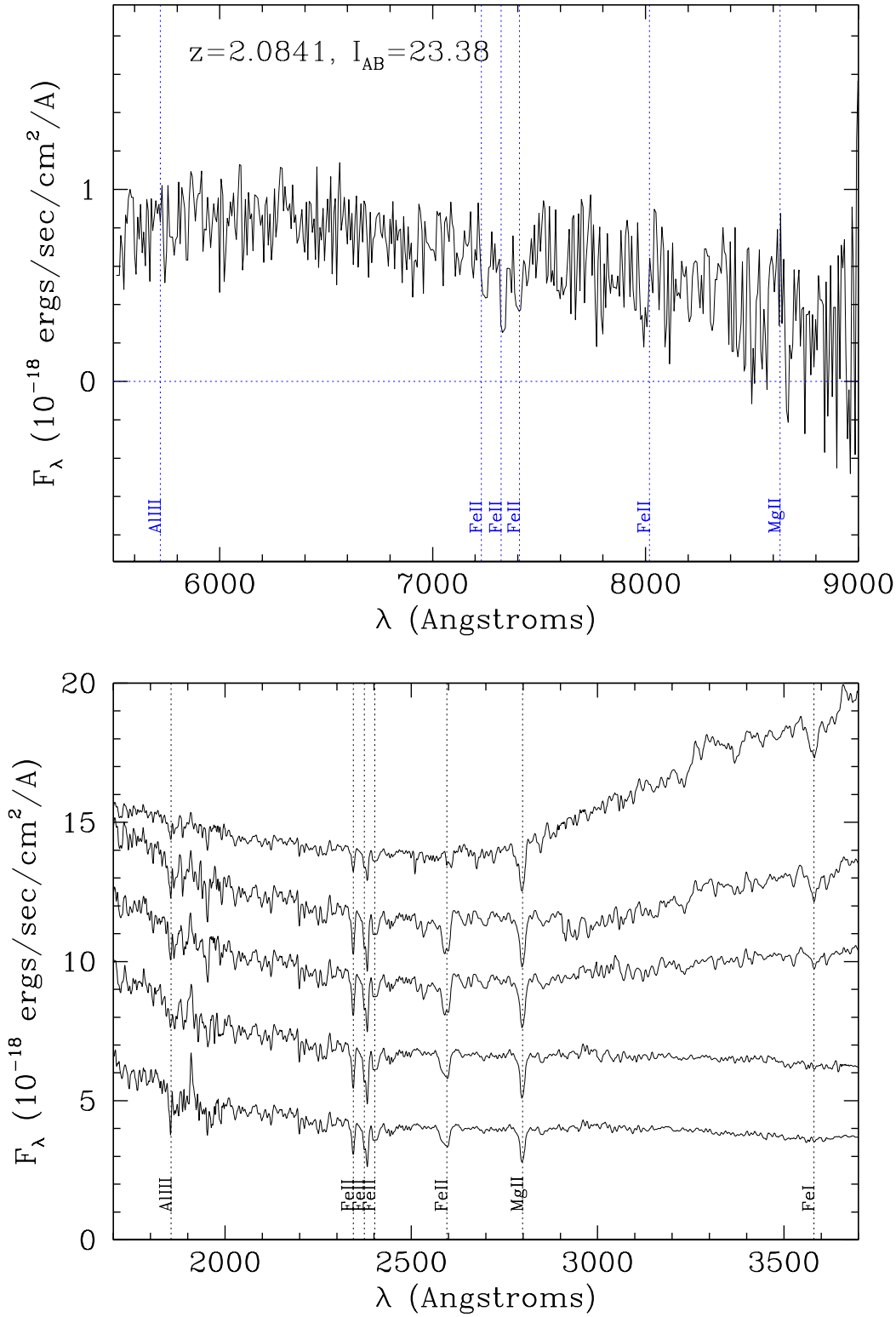


Рис. 1.2: Линии поглощения в спектрах далёких галактик [2]. На верхней диаграмме приведены результаты измерений дифференциального потока энергии от далёкой ( $z = 2.0841$ ) галактики. Вертикальные линии указывают расположение атомных линий поглощения, идентификация которых позволила определить красное смещение галактики. В спектрах более близких галактик эти линии лучше различимы. Диаграмма со спектрами таких галактик, уже приведёнными в сопутствующую систему отсчёта с учётом красного смещения, представлена на нижнем рисунке.

Для  $z \ll 1$  справедлив закон Хаббла

$$z = H_0 r, \quad z \ll 1, \quad (1.4)$$

где  $r$  — расстояние до источника, а  $H_0$  — современное значение параметра Хаббла. При больших  $z$  зависимость расстояния от красного смещения усложняется, что будет подробно обсуждаться в этой книге.

Определение абсолютных расстояний до удалённых источников — весьма непростое дело. Один из методов состоит в измерении потока фотонов от удалённого объекта, чья светимость заранее известна. Такие объекты в астрономии иногда называют *стандартными свечами*.

Систематические ошибки в определении  $H_0$  не очень хорошо известны и, по-видимому, довольно велики. Достаточно отметить, что величина этой постоянной, определённая самим Хабблом в 1929 году, составляла 550 км/(с·Мпк). Современные методы измерения параметра Хаббла дают [3, 4, 5]

$$H_0 = (73^{+4}_{-3}) \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}. \quad (1.5)$$

▷ **Задача 4.** Связать красное смещение с расстоянием до объекта, выраженным в Мпк.

Проясним смысл традиционной единицы измерения параметра Хаббла, фигурирующей в (1.5). Наивная интерпретация закона Хаббла (1.4) состоит в том, что красное смещение обусловлено радиальным движением галактик от Земли со скоростями, пропорциональными расстояниям до галактик,

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad v \ll 1. \quad (1.6)$$

Тогда красное смещение (1.4) интерпретируется как продольный эффект Доплера (при  $v \ll c$ , т.е.  $v \ll 1$  в естественных единицах, доплеровское смещение равно  $z = v$ ). В связи с этим параметру Хаббла  $H_0$  приписывают размерность [скорость/расстояние]. Подчеркнём, что интерпретация космологического красного смещения в терминах эффекта Доплера необязательна, а в ряде случаев неадекватна. Наиболее правильно использовать соотношение (1.4) в том виде, в каком оно написано.

▷ **Задача 5.** Рассмотрим систему многих точек в ньютоновской механике. Показать, что она пространственно однородна и изотропна тогда и только тогда, когда плотность точек постоянна в пространстве, а скорость относительного движения каждой пары точек  $i$  и  $j$  связана с расстоянием между ними “законом Хаббла”

$$\mathbf{v}_{ij} = H_0 \mathbf{r}_{ij},$$

где  $H_0$  не зависит от пространственных координат.

---

что и регистрируется наблюдателем как пики в спектре излучения, приходящего с направления на объект.

Величину  $H_0$  традиционно параметризуют следующим образом

$$H_0 = h \cdot 100 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} ,$$

где  $h$  — безразмерная величина порядка единицы (см. (1.5)),

$$h = 0.73^{+0.04}_{-0.03} .$$

Мы будем пользоваться значением  $h = 0.7$  в дальнейших оценках.

Для измерения параметра Хаббла в качестве стандартных свеч традиционно используют цефеиды — переменные звёзды, чья переменность связана известным образом со светимостью. Связь эту можно выявить, изучая цефеиды в каких-нибудь компактных звёздных образованиях, например, в Магеллановых облаках. Поскольку расстояния до всех цефеид внутри одного компактного образования с хорошей степенью точности можно считать одинаковыми, отношение наблюдаемых яркостей таких объектов в точности равно отношению их светимостей. Период пульсаций цефеид может составлять от суток до нескольких десятков суток, за это время светимость изменяется в несколько раз. В результате наблюдений была построена зависимость светимости от периода пульсаций: чем ярче звезда, тем больше период пульсаций.

Цефеиды — гиганты и сверхгиганты, поэтому их удаётся наблюдать далеко за пределами Галактики. Изучив спектр удалённых цефеид, находят красное смещение по формуле (1.3), а исследуя временную эволюцию, определяют период пульсаций светимости. Затем, используя известную зависимость переменности от светимости, определяют абсолютную светимость объекта, и далее вычисляют расстояние до объекта, после чего по формуле (1.4) получают значение параметра Хаббла. На рис. 1.3 приведена полученная таким образом диаграмма Хаббла — зависимость красного смещения от расстояния.

Помимо цефеид, имеются и другие яркие объекты, используемые в качестве стандартных свеч, например, сверхновые типа Ia.

### 1.2.3 Время жизни Вселенной и размер её наблюдаемой части

Параметр Хаббла в действительности имеет размерность  $[t^{-1}]$ , поэтому современная Вселенная характеризуется временным масштабом

$$H_0^{-1} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{100} \frac{\text{с} \cdot \text{Мпк}}{\text{км}} = \frac{1}{h} \cdot 3 \cdot 10^{17} \text{ с} = \frac{1}{h} \cdot 10^{10} \text{ лет} \approx 1.4 \cdot 10^{10} \text{ лет}$$

и космологическим масштабом расстояний

$$H_0^{-1} = \frac{1}{h} \cdot 3000 \text{ Мпк} \approx 4.3 \cdot 10^3 \text{ Мпк} .$$

Грубо говоря, размер Вселенной увеличится вдвое за время порядка 10 млрд. лет; галактики, находящиеся от нас на расстоянии порядка 3000 Мпк удаляются от нас со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Мы увидим, что время  $H_0^{-1}$  по порядку величины совпадает с возрастом Вселенной, а расстояние  $H_0^{-1}$  — с размером видимой части Вселенной. Мы будем уточнять представления о возрасте Вселенной и размере её видимой части на протяжении этой книги. Здесь отметим, что прямолинейная экстраполяция эволюции Вселенной в прошлое (согласно уравнениям классической общей теории относительности) приводит к представлению о моменте “Большого Взрыва”, с которого началась классическая космологическая эволюция; тогда время жизни Вселенной — это время, прошедшее с момента Большого Взрыва, а размер видимой части (размер горизонта) — это расстояние, которое проходят с момента Большого Взрыва сигналы, движущиеся со скоростью света. При этом размер всей Вселенной значительно превышает размер горизонта; в классической общей теории относительности пространственный размер Вселенной может быть и бесконечным.

Независимо от космологических данных, имеются наблюдательные ограничения снизу на возраст Вселенной  $t_0$ . Различные независимые методы приводят к близким ограничениям на уровне

$$t_0 \geq 14 \text{ млрд. лет} = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ лет} .$$



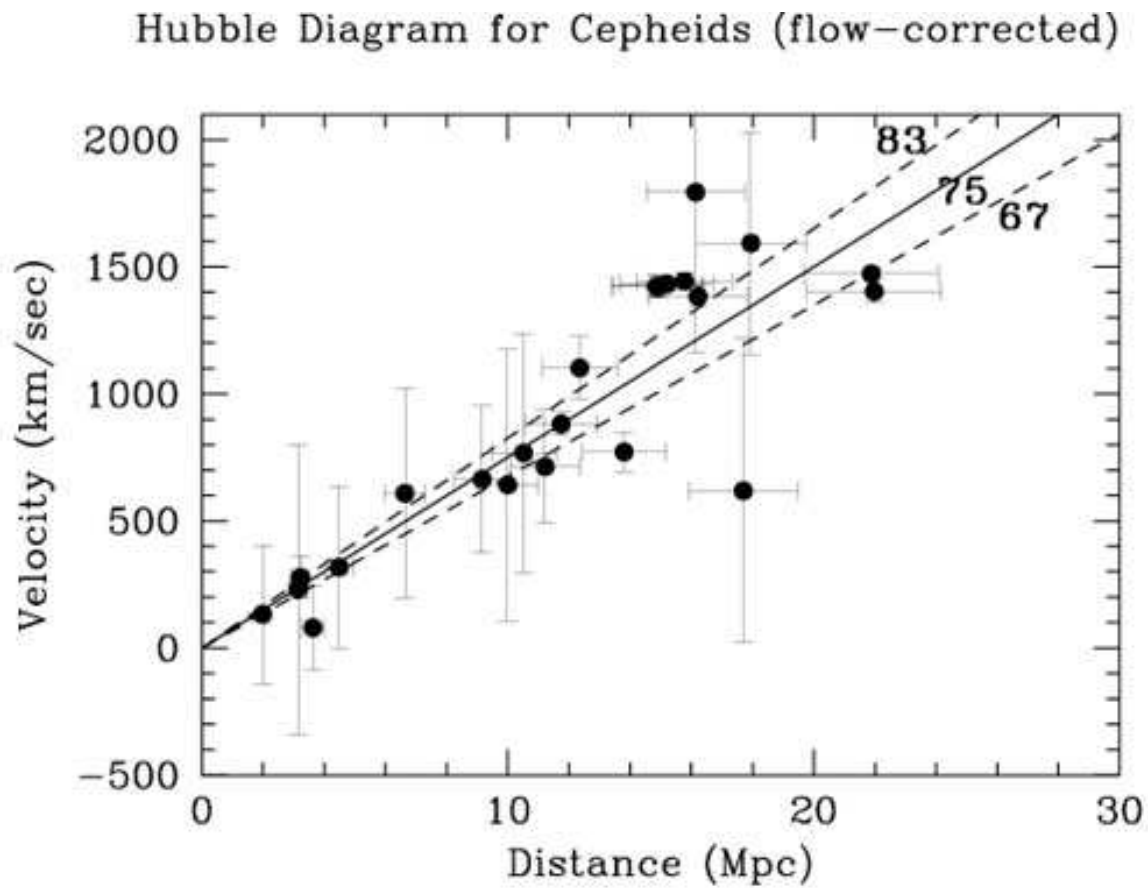


Рис. 1.3: Диаграмма Хаббла, построенная по наблюдению удалённых цефеид [6]. Сплошной линией показан закон Хаббла с параметром  $H_0 = 75$  км/(с·Мпк), определённым в результате этих наблюдений. Пунктирные линии отвечают экспериментальным погрешностям в величине постоянной Хаббла.

Один из методов, с помощью которых получено последнее ограничение, состоит в измерении распределения белых карликов по светимости. Белые карлики — компактные звёзды большой плотности с массами, примерно совпадающими с массой Солнца, — постепенно тускнеют в результате охлаждения посредством излучения. В Галактике встречаются белые карлики самых разных светимостей, однако начиная с некоторой низкой светимости число белых карликов резко падает, и это падение не связано с чувствительностью аппаратуры наблюдения. Объяснение состоит в том, что даже самые старые белые карлики ещё не смогли настолько охладиться, чтобы стать такими тусклыми. Время охлаждения можно определить, изучая баланс энергии при охлаждении звезды. Это время охлаждения — возраст старейших белых карликов — является ограничением снизу на время жизни Галактики, а значит и всей Вселенной.

Среди других методов отметим изучение распространённости радиоактивных элементов в земной коре и в составе метеоритов, сравнение эволюционной кривой звёзд главной последовательности на диаграмме Герцшпрунга–Рассела (светимость — температура или яркость — цвет) с распространённостью старейших звёзд в обеднённых металлами шаровых скоплениях звёзд<sup>6</sup>, изучение состояния релаксационных процессов в звёздных скоплениях, измерение распространённости горячего газа в скоплениях галактик.

### 1.2.4 Пространственная плоскостность

Однородность и изотропия Вселенной не означают, вообще говоря, что в фиксированный момент времени трёхмерное пространство представляет из себя 3-плоскость (трёхмерное евклидово пространство), т.е. что Вселенная имеет нулевую пространственную кривизну. Наряду с 3-плоскостью, однородными и изотропными являются 3-сфера (положительная пространственная кривизна) и 3-гиперболоид (отрицательная кривизна). Фундаментальным наблюдательным результатом последних лет стало установление того факта, что пространственная кривизна Вселенной, если и отлична от нуля, то мала. Мы будем неоднократно возвращаться к этому утверждению, как для того, чтобы сформулировать его на количественном уровне, так и для того, чтобы изложить, какие именно данные свидетельствуют о пространственной плоскостности Вселенной. Здесь достаточно сказать, что этот результат получен из измерений анизотропии реликтового излучения, и на качественном уровне сводится к тому, что радиус пространственной кривизны Вселенной заметно больше размера её наблюдаемой части, т.е. заметно больше  $H_0^{-1}$ .

Отметим также, что данные по анизотропии реликтового излучения согласуются и с предположением о тривиальной пространственной топологии. Так в случае компактного трёхмерного многообразия с характерным размером порядка хаббловского на небесной сфере наблюдались бы круги со схожей картиной анизотропии реликтового излучения — пересечения сферы последнего рассеяния фотонов, оставшихся после рекомбинации (образования атомов водорода), с образами этой сферы, получившимися в результате действия группы движения многообразия. Если бы пространство имело, например, топологию тора, то на небесной сфере наблюдалась бы пара таких кругов в диаметрально противоположных направлениях. Таких свойств реликтовое излучение не обнаруживает[7].

▷ Задача 6. Как повлияет на картинку со схожими кругами факт движения локального наблюдателя относительно реликтового излучения?

### 1.2.5 “Тёплая” Вселенная

Современная Вселенная заполнена газом невзаимодействующих фотонов — реликтовым излучением, предсказанным теорией Большого Взрыва и обнаруженным экспериментально в 1964 году. Плотность числа реликтовых фотонов составляет примерно 400 штук на кубический сантиметр. Распределение фотонов по энергиям имеет тепловой планковский спектр (рис. 1.4), характеризующийся температурой

$$T_0 = 2.725 \pm 0.001 \text{ К} . \quad (1.7)$$

<sup>6</sup>Шаровые скопления — внутригалактические структуры диаметром около 30 пк, включающие сотни тысяч и даже миллионы звёзд. Термин “металлы” в астрофизике относится ко всем элементам тяжелее гелия.

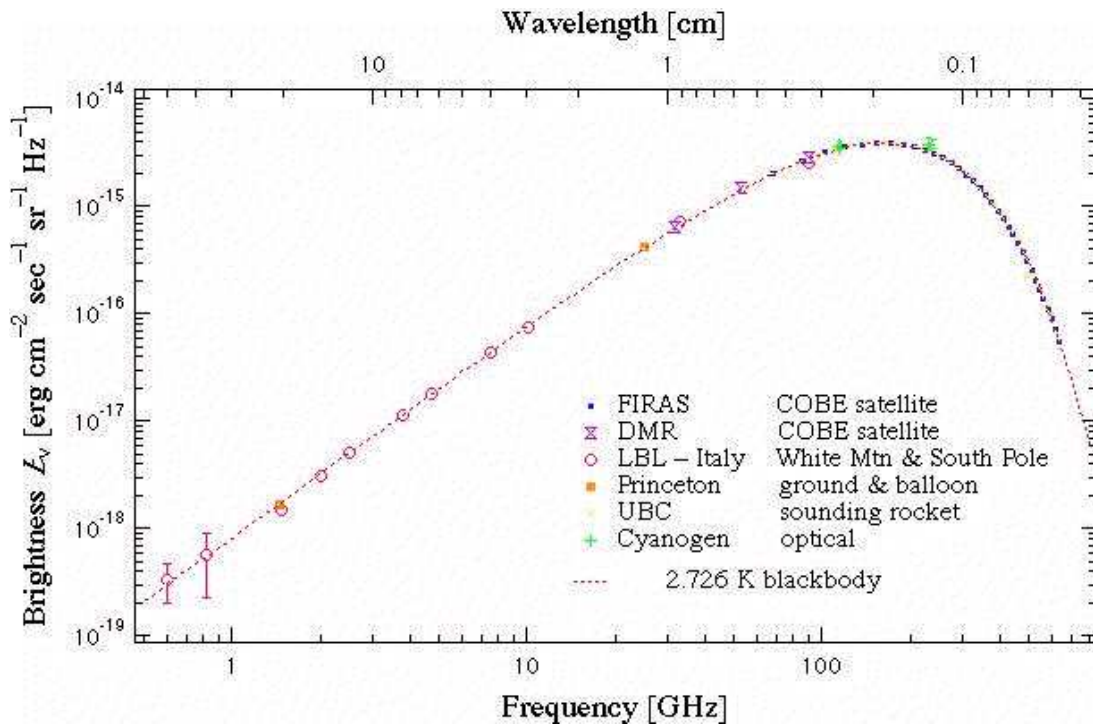


Рис. 1.4: Измерения спектра реликтового излучения. Компиляция данных выполнена в [8]. Пунктирной кривой показан планковский спектр (спектр “чёрного тела”). Недавний анализ [9] даёт значение температуры (1.7), а не  $T = 2.726$  K, как на рисунке.

(согласно анализу [9]). Температура фотонов, приходящих с разных направлений на небесной сфере, одинакова на уровне примерно  $10^{-4}$ ; это — ещё одно свидетельство однородности и изотропии Вселенной.

В то же время, экспериментально установлено, что эта температура всё же зависит от направления на небесной сфере. Угловая анизотропия температуры реликтовых фотонов на данный момент хорошо измерена (см. рис. 1.5), и составляет, грубо говоря, величину порядка  $\delta T/T_0 \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ . Тот факт, что спектр является планковским во всех направлениях, контролируется проведением измерений на разных частотах.

В этой книге мы будем неоднократно возвращаться к анизотропии реликтового излучения, поскольку, с одной стороны, она несёт ценнейшую информацию о ранней и современной Вселенной, а с другой стороны, её измерение возможно с высокой точностью.

Отметим, что наличие реликтового излучения позволяет ввести во Вселенной выделенную систему отсчёта: это та система отсчёта, в которой газ реликтовых фотонов покоится. Солнечная система движется относительно реликтового излучения в направлении на Гидру-Центавра. Скорость этого движения определяет величину дипольной компоненты анизотропии [10]

$$\delta T_{\text{диполь}} = 3.346 \text{ мК} . \quad (1.8)$$

▷ *Задача 7. Исходя из величины дипольной компоненты анизотропии реликтового излучения, определить скорость Солнечной системы относительно*

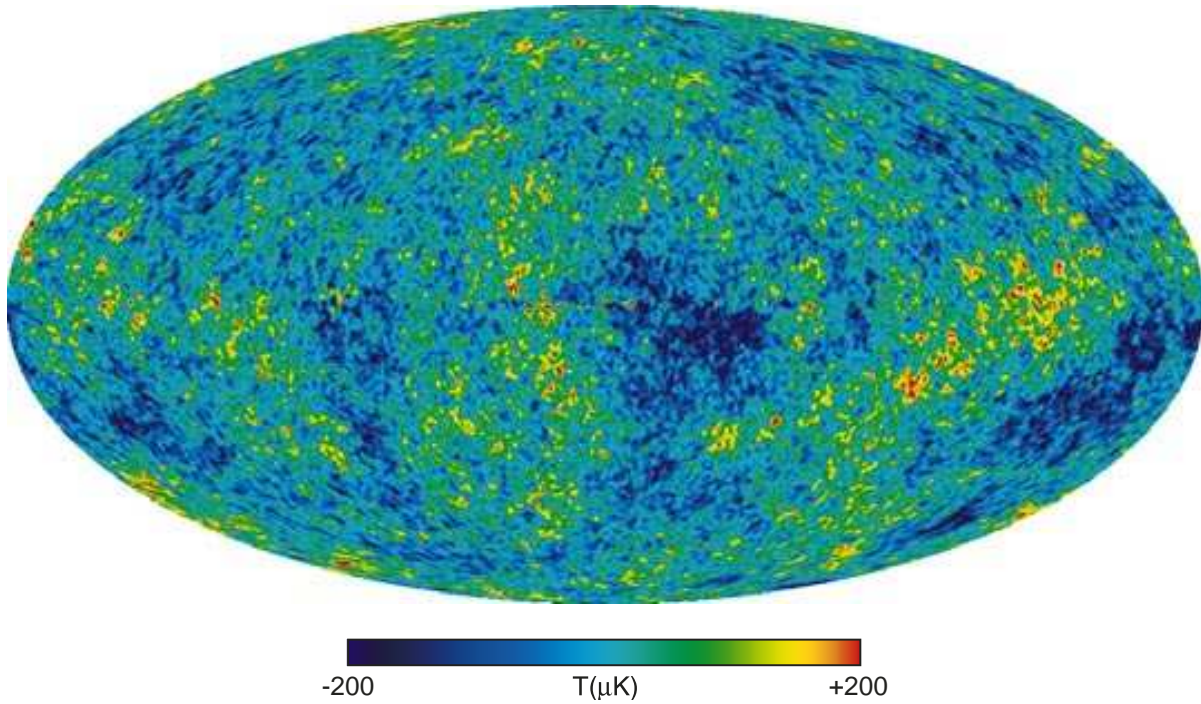


Рис. 1.5: Данные WMAP [5]: угловая анизотропия реликтового излучения, т.е. зависимость температуры фотонов от направления их прихода (показана цветом). Средняя температура фотонов и дипольная компонента (1.8) вычтены; изображённые вариации температуры находятся на уровне  $\delta T \sim 100 \mu\text{K}$ , т.е.  $\delta T/T_0 \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ .

реликтового излучения.

- ▷ **Задача 8.** Оценить годовую вариацию анизотропии реликтового излучения, связанную с вращением Земли вокруг Солнца.

Современная Вселенная прозрачна для реликтовых фотонов<sup>7</sup>: сегодня их длина свободного пробега велика по сравнению с размером горизонта  $H_0^{-1}$ . Это не всегда было так: в ранней Вселенной фотоны интенсивно взаимодействовали с веществом.

- ▷ **Задача 9. Эффект Грейзена–Зацепина–Кузьмина.** Известно, что при взаимодействии фотона с протоном при достаточно высоких энергиях возможно поглощение фотона с рождением  $\pi$ -мезона. Пусть сечение этого процесса в системе центра масс фотона и протона, где сумма импульсов фотона и протона равна нулю, имеет вид (для данной задачи это, в действительности, неплохое приближение):

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{при } \sqrt{s} < m_\Delta \\ 0.5 \text{ мбарн} & \text{при } \sqrt{s} > m_\Delta \end{cases}$$

где  $\sqrt{s}$  — суммарная энергия фотона и протона,  $m_\Delta = 1200 \text{ МэВ}$  (масса  $\Delta$ -резонанса),  $1 \text{ мбарн} = 10^{-27} \text{ см}^2$ .

<sup>7</sup>В действительности, “прозрачности” разных частей Вселенной различаются. Например, горячий газ ( $T \sim 10 \text{ кэВ}$ ) в скоплениях галактик рассеивает реликтовые фотоны, которые приобретают при этом дополнительную энергию. Этот процесс приводит к “подогреву” реликтовых фотонов — эффекту Зельдовича–Сюняева. Величина этого эффекта невелика, но вполне заметна при современных методах наблюдений.

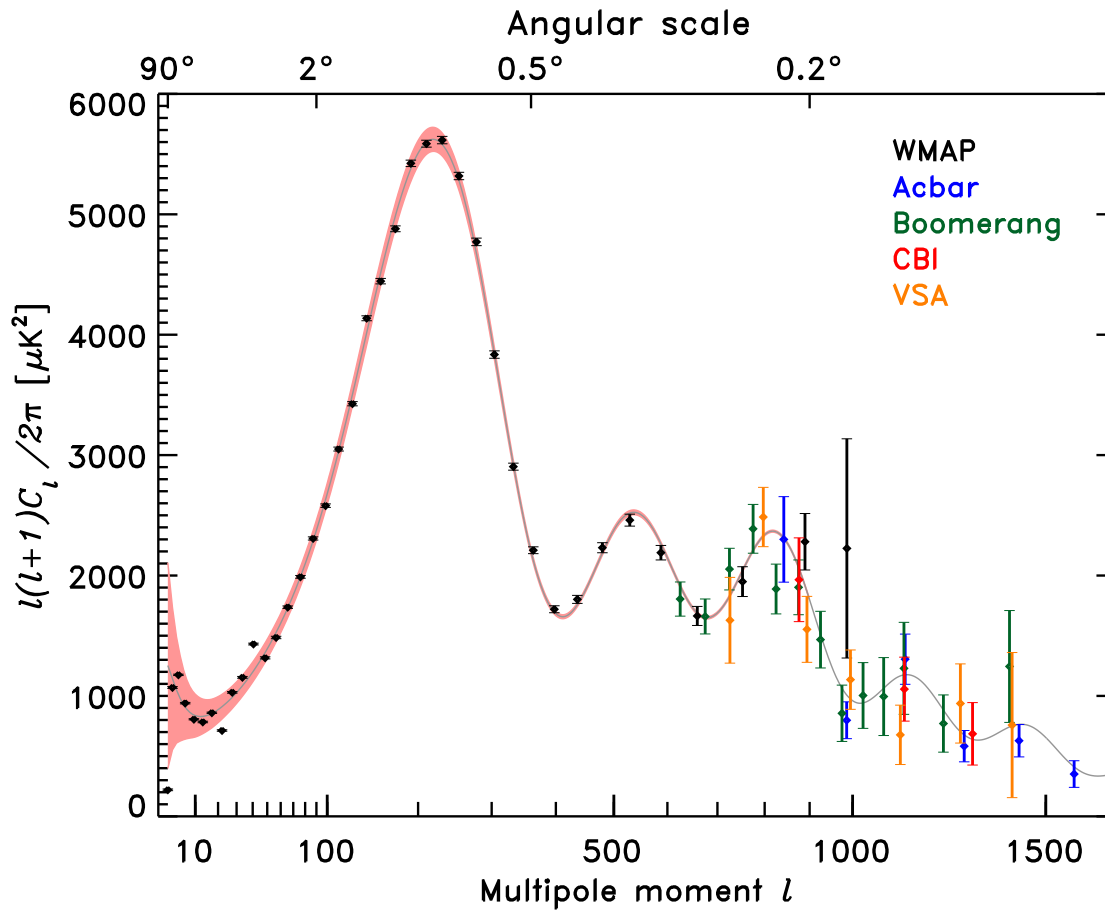


Рис. 1.6: Результаты измерений угловой анизотропии реликтового излучения различными экспериментами [5]. Теоретическая кривая получена в рамках модели  $\Lambda$ CDM, описанной в Главе 4. Подробное обсуждение см. во второй части книги.

*Найти длину свободного пробега протона в современной Вселенной по отношению к указанному процессу. На каком расстоянии от источника высокоэнергичный протон потеряет 2/3 своей энергии? Фотоны, излученные небесными телами, не учитывать.*

Поскольку температура реликтового излучения  $T$  зависит от направления  $\vec{n}$  на небесной сфере, то для изучения этой зависимости удобно использовать разложение по сферическим функциям (гармоникам)  $Y_{lm}(\mathbf{n})$ , образующим полный набор базисных функций на сфере. Под флуктуацией температуры  $\delta T$  в направлении  $\vec{n}$  понимают разность

$$\delta T(\mathbf{n}) \equiv T(\mathbf{n}) - T_0 - \delta T_{\text{диполь}} = \sum_{l,m} a_{l,m} Y_{lm}(\mathbf{n}),$$

где для коэффициентов  $a_{l,m}$  выполняется соотношение  $a_{l,m}^* = (-1)^m a_{l,-m}$ , являющееся необходимым следствием вещественности температуры. Угловые моменты  $l$  соответствуют флуктуациям с типичным угловым масштабом  $\pi/l$ . Существующие наблюдения позволяют изучать различные угловые масштабы, от самых крупных до масштабов меньше  $0.1^\circ$  ( $l \sim 1000$ , см. рис. 1.6).

Наблюдательные данные согласуются с тем, что флуктуации температуры  $\delta T(\mathbf{n})$  представляют собой случайное гауссово поле, т.е. коэффициенты  $a_{l,m}$  статистически

независимы для различных  $l$  и  $m$ ,

$$\langle a_{l,m} a_{l',m'}^* \rangle = C_{lm} \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (1.9)$$

где под угловыми скобками подразумевается усреднение по ансамблю вселенных, подобных нашей. Коэффициенты  $C_{lm}$  в изотропной Вселенной не зависят от  $m$ ,  $C_{lm} = C_l$ , и определяют корреляцию между флуктуациями температуры в разных направлениях:

$$\langle \delta T(\mathbf{n}_1) \delta T(\mathbf{n}_2) \rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l P_l(\cos \theta) ,$$

где  $P_l$  — полиномы Лежандра, зависящие только от угла  $\theta$  между векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ . В частности, для среднеквадратичной флуктуации получаем:

$$\langle \delta T^2 \rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \approx \int \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l d \ln l .$$

Таким образом, величина  $\frac{l(l+1)C_l}{2\pi}$  характеризует суммарный вклад угловых моментов одного порядка. Результаты измерения именно этой величины приведены на рисунке 1.6.

Важно отметить, что измерение угловой анизотропии реликтового излучения даёт не одно экспериментально измеренное число, а целый набор данных, т.е. значения  $C_l$  при различных  $l$ . Этот набор определяется целым рядом параметров ранней и современной Вселенной, поэтому его измерение даёт много космологической информации.

### 1.3 Баланс энергий в современной Вселенной

Размерную оценку плотности энергии во Вселенной можно получить следующим образом. При плотности энергии  $\rho_0$  плотность “гравитационного заряда” равна по порядку величины  $G\rho_0$ , где  $G$  — ньютоновская постоянная. Поскольку именно гравитационные взаимодействия определяют эволюцию Вселенной, величина  $G\rho_0$  должна быть каким-то образом связана с наблюдаемым темпом расширения Вселенной. Она имеет размерность  $M^2$ ; такую же размерность имеет  $H_0^2$ . Поэтому естественно ожидать, что  $\rho_0 \sim H_0^2 G^{-1} = M_{Pl}^2 H_0^2$ . Действительно, мы увидим, что современная плотность энергии в *пространственно-плоской* Вселенной равна

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi} H_0^2 M_{Pl}^2 .$$

С точностью не хуже 2% это и есть плотность энергии в современной Вселенной. Численно

$$\rho_c = 1.05 \cdot h^2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3} \approx 0.53 \cdot 10^{-5} \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3} .$$

Согласно данным космологических наблюдений, которые мы будем обсуждать в этой книге, вклад барионов (протонов, ядер) в полную современную плотность энергии составляет<sup>8</sup> примерно 4.2%,

$$\Omega_B \equiv \frac{\rho_B}{\rho_c} = 0.042 .$$

---

<sup>8</sup>Отметим, что в звёздах собрано лишь около 10% всех барионов (протонов и нейтронов). Считается, что основная часть барионов сосредоточена в облаках горячего газа, что подтверждается наблюдениями за распространённостью звёзд и горячего газа в скоплениях галактик.

Вклад реликтовых нейтрино всех типов ещё меньше: космологическое ограничение на него составляет

$$\Omega_\nu \equiv \frac{\sum \rho_{\nu_i}}{\rho_c} < 0.016 ,$$

где суммирование идёт по трём типам нейтрино  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$  и антинейтрино  $\bar{\nu}_e$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\tau$ . Подчеркнём, что речь здесь идёт именно об ограничении: скорее всего вклад известных нейтрино в действительности заметно меньше 1.6%. Другие известные стабильные частицы — электроны и фотоны — дают сегодня пренебрежимо малый вклад в полную плотность энергии. Таким образом, основной материал в современной Вселенной — это “неизвестно что”.

Ещё более замечательно, что имеются самые серьёзные основания утверждать, что это “неизвестно что” состоит по крайней мере из двух фракций, одна из которых имеет способность собираться в сгущения (кластеризоваться), а другая — нет. Первую компоненту традиционно называют “тёмной материей” (dark matter). Её вклад в плотность энергии оценивается на уровне 20%.

В этой книге мы будем обсуждать результаты (первичный нуклеосинтез, спектр анизотропии реликтового излучения, образование структур во Вселенной и др.), которые показывают, что тёмная материя не может состоять из известных частиц. Скорее всего она состоит из новых стабильных массивных частиц, которые были нерелятивистскими в далёком прошлом и остаются нерелятивистскими сейчас (холодная тёмная материя). Это — одно из немногих экспериментальных указаний на существование новой физики вне рамок Стандартной модели физики частиц. Упомянем в связи с этим, что прямое детектирование частиц тёмной материи — одна из важных и нерешённых задач физики частиц.

Согласно принятой сегодня точке зрения, оставшаяся часть энергии в современной Вселенной — около 75% — “разлита” равномерно по всему пространству. Это не какие-то известные или неизвестные частицы, а достаточно непривычная форма энергии вакуумного типа. Её называют по-разному: тёмная энергия (dark energy), вакуумоподобная материя, квинтэссенция, космологический  $\Lambda$ -член. Мы будем использовать термин “тёмная энергия”, и понимать под квинтэссенцией и  $\Lambda$ -членом тёмную энергию с конкретными свойствами: в случае  $\Lambda$ -члена плотность энергии не зависит от времени, а для квинтэссенции такая зависимость, хотя и слабая, имеется.

Вообще говоря, не исключено, что наблюдательные данные, свидетельствующие в пользу тёмной материи, можно объяснить иными способами. Один из примеров — возможное отличие теории гравитации от общей теории относительности на космологических масштабах длин и времён. Хотя теоретические работы в этом и подобных направлениях ведутся, рассмотрение таких возможностей выходило бы далеко за рамки этой книги. В этой книге мы всюду предполагаем, что гравитационные взаимодействия описываются общей теорией относительности.

Возможную природу тёмной энергии и наблюдения, свидетельствующие о её существовании, мы будем подробнее обсуждать в этой книге. Сейчас отметим тот факт, что вклад нерелятивистских частиц (барионов и холодной тёмной материи) в полную плотность энергии падает с расширением Вселенной обратно пропорционально кубу масштабного фактора. Поэтому на некотором этапе эволюция Вселенной начинает определяться не нерелятивистскими частицами, а тёмной энергией, чей вклад в плотность энергии не зависит (или слабо зависит) от масштабного фактора. Именно такой переход от одной стадии эволюции к другой и произошёл при  $z \simeq 0.5$ .

Плотность барионного вещества и тёмной материи в скоплениях галактик определяют, измеряя различными методами гравитационный потенциал в скоплении, т.е. распределение массы в нём. В качестве примера на левой половине рисунка 1.7 приведено распределение массы в одном из скоплений галактик,



Рис. 1.7: Скопление CL0024 + 1654 [11]: синий цвет на левом рисунке иллюстрирует распределение темной материи; серповидные объекты голубого цвета на правом рисунке — множественное изображение галактики, расположенной далеко за скоплением.

полученное методом гравитационного линзирования. Идея этого метода состоит в том, что лучи света, приходящего от галактик, расположенных за скоплением, искривляются гравитационным полем скопления<sup>9</sup>, что приводит к наблюдаемым искажениям образов удалённых галактик (см. правую половину рисунка 1.7). Таким образом, этот метод позволяет измерять гравитационный потенциал в скоплении вне зависимости от того, какое вещество его создает — светящееся или нет. Результат состоит в том, что светящееся вещество (обычные звезды, суммарную массу которых можно определить независимо) составляет малую часть массы скоплений; в основном масса определяется тёмной материей. Эта тёмная материя кластеризована, т.е. её плотность распределена неоднородно по Вселенной. В предположении, что отношение плотностей тёмной материи и светящегося вещества в целом во Вселенной такое же, как в скоплениях галактик<sup>10</sup>, получается, что плотность массы тёмной материи и барионов вместе составляет около 25% полной энергии во Вселенной,

$$\rho_M \approx 0.25\rho_c. \quad (1.10)$$

Помимо гравитационного линзирования, существует ряд других наблюдений, указывающих на существование тёмной материи.

В частности, наблюдения скоплений галактик в рентгеновском диапазоне выявили, что заметная часть барионов сосредоточена в облаках горячего газа в межгалактической среде<sup>11</sup>. На самом деле, непосредственным источником рентгеновского излучения являются, конечно, электроны. Точность рентгеновских телескопов позволяет найти пространственные распределения плотности  $n_e(\mathbf{r})$  и температуры  $T(\mathbf{r})$  электронов в облаках газа. В предположении сферической симметрии отсюда можно получить распределение полной гравитирующей массы в скоплении  $\rho(\mathbf{r})$ , воспользовавшись условием гидростатического равновесия

$$\frac{dP}{dR} = -\mu n_e(R) m_p \frac{GM(R)}{R^2}, \quad M(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr, \quad (1.11)$$

где  $\mu n_e(R)$  — плотность числа барионов в газе, а давление газа  $P$  определяется, в основном, электронной компонентой и следует из уравнения состояния идеального газа  $P(R) = n_e(R) T_e(R)$ . При этом мы учли,

<sup>9</sup>Отметим, что гравитационная линза приводит к усилению сигнала, чем пользуются при поиске наиболее удалённых галактик.

<sup>10</sup>Это предположение — отнюдь не безобидное, поскольку большинство галактик *не* расположены в скоплениях: в скоплениях находится около 10% галактик и, скорее всего, около 10% тёмной материи.

<sup>11</sup>Количество барионов в этих облаках в десяток раз превосходит количество светящегося вещества, наблюдаемого в галактиках, образующих скопления.



что основной вклад в массу барион-электронного облака дают барионы, и что среда электронейтральна, поэтому локальные плотности барионов и электронов совпадают с точностью до численного множителя  $\mu$ , зависящего от химического состава облака. Все величины кроме  $M(R)$ , входящие в уравнение (1.11), определяются из наблюдений, так что имеется возможность найти  $M(R)$ . Из сравнительного анализа распределений массы в скоплениях, полученных таким образом, и распределений видимого вещества в скоплениях вытекает необходимость дополнительной гравитирующей компоненты в скоплениях галактик — тёмной материи.

Аналогичный вывод о существовании тёмной материи следует и из изучения движений галактик в группах, а также галактик и групп в скоплениях. Предположив, что релаксационные процессы для галактик в скоплениях уже завершены, можно использовать теорему вириала для определения массы скопления:

$$3M\langle v_r^2 \rangle = G \frac{M^2}{R}. \quad (1.12)$$

Здесь  $M$  и  $R$  — масса и размер скопления, а  $\langle v_r^2 \rangle^{1/2}$  — дисперсия проекций скоростей галактик на луч наблюдения. Величину этой дисперсии можно оценить, изучая спектр скопления: спектральные линии от различных галактик будут смещены друг относительно друга из-за продольного эффекта Доплера<sup>12</sup>. Если спектры отдельных галактик различимы, то проекции их скорости вдоль луча наблюдения определяют непосредственно, если же они неразличимы, то относительные смещения линий приведут в суммарном спектре скопления к уширению линий излучения (поглощения), по которому и определяют  $\langle v_r^2 \rangle^{1/2}$ . Теорема вириала (1.12) позволяет определить массу скопления  $M$ . Наблюдения показывают, что полученные таким образом массы скоплений значительно (в сотни раз для центральных областей скопления) превышают массу светящегося вещества, которую можно оценить, измерив полную светимость скопления и используя средние значения для отношения массы к светимости, полученные из наблюдений близких звёзд и скорректированные с учётом распространённости различных типов звёзд и их эволюции. Даже с учетом тёмных гало галактик массы скоплений существенно превышают суммы масс входящих в них галактик, т.е. большую часть массы составляет тёмная материя, непрерывно распределённая внутри скоплений.

Как уже упоминалось выше, измерение дипольной компоненты анизотропии спектра реликтового излучения позволяет определить скорость Солнечной системы относительно выделенной системы отсчёта — реликтового излучения. Вся местная группа, к которой принадлежит наша Галактика, движется по направлению к скоплению Девы. Считая, что это “падение” обусловлено гравитационным потенциалом скопления галактик, можно оценить массу скопления. Эти оценки<sup>13</sup> также показывают, что одних галактик явно недостаточно, и для объяснения наблюдаемого движения требуется дополнительная материя.

Гипотеза о существовании тёмного вещества позволяет объяснить и наблюдаемое движение звёзд (распределение их пекулярных скоростей) на периферии галактик. Так, в предположении кругового движения, распределение скоростей  $v(R)$  в зависимости от расстояния  $R$  от центра Галактики до звезды следует из закона Ньютона

$$v(R) = \sqrt{G \frac{M(R)}{R}}, \quad M(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr ;$$

здесь  $\rho(r)$  — плотность массы. Экспериментально для областей, не слишком близких к центру Галактики,  $v(R) = \text{const}$ , в то время как учёт только вклада светящегося вещества давал бы  $v(R) \propto \sqrt{R}$  для областей заполненных светящимся веществом, и  $v(R) \propto 1/\sqrt{R}$  для периферии галактики. Такое различие можно объяснить, предположив, что видимое вещество галактики погружено в облако большего размера — гало галактики — состоящее из вещества, не взаимодействующего с фотонами. Такой же вывод следует из наблюдений за движением облаков холодного водорода вокруг нашей и ближайших галактик (см. рис. 1.8). Скорости облаков определяются при этом по доплеровскому уширению эмиссионной линии  $\lambda = 21$  см. О существовании тёмного гало свидетельствуют и измерения скоростей шаровых скоплений звёзд и карликовых галактик — спутников нашей Галактики и спутников галактик, близких к нашей.

Кластеризующуюся тёмную материю может имитировать и обычное вещество — барионы и электроны — находящиеся в состоянии, обеспечивающем их “пассивность” по отношению к электромагнитному излучению. В частности, таким свойством обладает вещество в нейтронных звездах, белых и коричневых карликах. Это — очень плотные объекты небольшого размера. Для объяснения наблюдений такие объекты должны заполнять не только область диска нашей Галактики, но быть основным компонентом гало (аналогичное распределение должно быть и в других галактиках). Плотность числа таких объектов можно определить из наблюдений. Попад на луч между Землёй и источником излучения (например, звездой из карликовой галактики), такие объекты привели бы к гравитационному линзированию. Это линзирование звёзд наблюдается, однако не настолько часто, чтобы утверждать, что такие компактные плотные объекты могут давать заметный вклад в плотность тёмной материи. Кроме того, многие из рассматриваемых кандидатов не подходят и по другим причинам. Так, нейтронные звёзды являются остатками взрывов сверхновых — источников основной массы кислорода, кремния и прочих тяжёлых элементов. Распространённость этих элементов в галактиках хорошо известна. Если они не вымываются в межзвёздную среду, то допустимого количества “скрытых” нейтронных звёзд в гало явно недостаточно, чтобы заменить тёмную материю. Аналогичная ситуация имеет место и для белых карликов, где роль индикатора играет углерод.

<sup>12</sup> Поперечный эффект Доплера пропорционален квадрату поперечной компоненты скорости объекта и поэтому мал для нерелятивистских объектов, таких как звезда или галактика.

<sup>13</sup> как и результаты локального измерения “постоянной Хаббла” в направлении на центр скопления Девы.

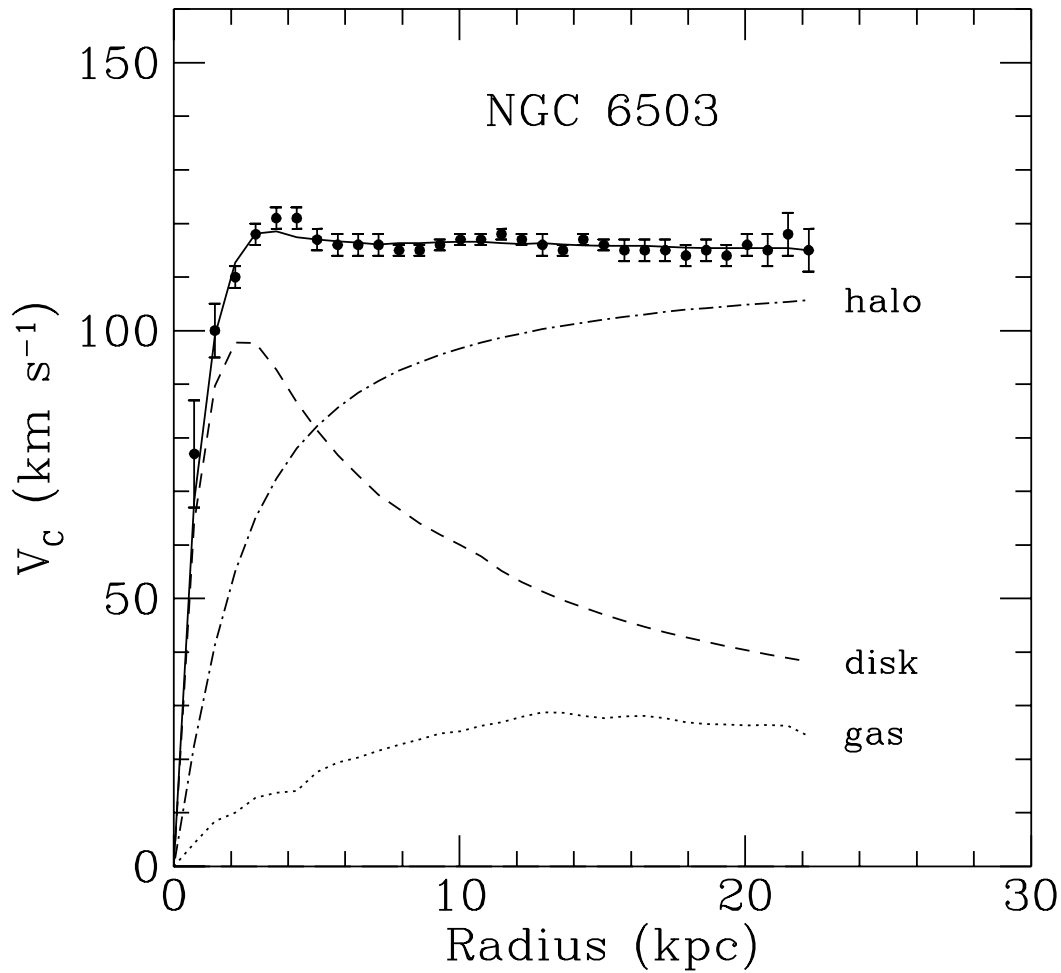


Рис. 1.8: Распределение скоростей облаков водорода в галактике NGC 6503 [12]. Разными линиями показаны вклады трёх основных компонент, формирующих гравитационный потенциал галактики.

В пользу того, что тёмная энергия действительно существует во Вселенной, говорят несколько наблюдательных результатов. Во-первых, как мы уже говорили, Вселенная с хорошей степенью точности пространственно плоская, а это означает, что полная плотность энергии в ней с точностью не хуже 2% совпадает с критической плотностью  $\rho_c$ . В то же время, оценки плотности энергии кластеризованной материи дают значение (1.10), которое заметно ниже  $\rho_c$ . Недостающий вклад — это и есть вклад тёмной энергии.

Независимое свидетельство в пользу существования тёмной энергии состоит в следующем. Мы увидим, что темп расширения Вселенной в прошлом зависит от того, какие формы энергии и в каком количестве в ней присутствуют и присутствовали. От того, как расширялась Вселенная, зависит, в свою очередь, соотношение (красное смещение)—(яркость) для удалённых “стандартных свеч”. В качестве последних сравнительно недавно стало возможным использовать сверхновые типа Ia<sup>14</sup>. Результат наблюдений сверхновых состоит в том, что далёкие сверхновые выглядят тусклее близких. Это может быть интерпретировано<sup>15</sup> как свидетельство ускоренного расширения Вселенной (сейчас и в не слишком далёком прошлом). Ускоренное расширение в общей теории относительности возможно только при наличии тёмной энергии, плотность которой слабо зависит (или вообще не зависит) от времени.

Имеется и ряд других соображений, основанных, в частности, на возрасте Вселенной, генерации струк-

<sup>14</sup>В основе их “стандартности” — выявленная по наблюдениям близких сверхновых связь между абсолютной светимостью и эволюцией: яркие сверхновые дольше затухают.

<sup>15</sup>В предположении, что светимость этих стандартных свеч не изменяется с красным смещением в интервале  $0 < z < 2$ .

тур, распространённости скоплений, спектре угловой анизотропии реликтового излучения. Все они согласуются с представлением о том, что тёмная энергия существует и даёт вклад в полную плотность энергии современной Вселенной на уровне  $0.75\rho_c$ . Можно рассчитывать на то, что будущие наблюдения позволят прояснить природу и свойства этой компоненты энергии во Вселенной.

Одним из кандидатов на роль тёмной энергии служит вакуум. В физике частиц энергию вакуума обычно не рассматривают, поскольку она служит началом отсчёта энергии, а интерес представляют массы и энергии возбуждений над вакуумом — частиц. Другая ситуация имеет место в общей теории относительности: вакуумная энергия, так же как любая другая форма энергии, участвует в гравитационных взаимодействиях. Если гравитационные поля не слишком сильны, вакуум везде одинаков, и его плотность энергии постоянна в пространстве и во времени. Другими словами, вакуумная энергия не способна кластеризоваться, так что вакуумная энергия — идеальный кандидат на роль тёмной энергии. Следует сказать, что в теории имеется фундаментальная трудность, связанная с оценкой величины вакуумной энергии. Плотность энергии вакуума в естественных единицах имеет размерность  $M^4$ , и можно было бы ожидать, что она по порядку величины равна четвёртой степени характерного энергетического масштаба фундаментальных взаимодействий. Таким масштабом является 1 ГэВ для сильных взаимодействий, 100 ГэВ для электрослабых взаимодействий и  $M_{Pl} \sim 10^{19}$  ГэВ для самих гравитационных взаимодействий. Таким образом можно было бы оценить соответствующие вклады в плотность энергии вакуума:

$$\begin{aligned}\rho_{vac} &\sim 1 \text{ ГэВ}^4, & \text{сильные взаимодействия} \\ &\sim 10^8 \text{ ГэВ}^4, & \text{электрослабые взаимодействия} \\ &\sim 10^{76} \text{ ГэВ}^4, & \text{гравитационные взаимодействия}\end{aligned}\tag{1.13}$$

Любая из этих оценок на много порядков превышает реальную плотность тёмной энергии

$$\rho_\Lambda \sim \rho_c \sim 10^{-5} \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3} \sim 10^{-46} \text{ ГэВ}^4.\tag{1.14}$$

В этом и состоит теоретическая проблема, которую часто называют проблемой космологической постоянной: совершенно непонятно, почему плотность энергии вакуума практически равна нулю по сравнению с оценками (1.13), и ещё более загадочно то, что она всё же отлична от нуля (если тёмная энергия — это энергия вакуума) и составляет чрезвычайно малую величину (1.14). Без преувеличения можно сказать, что проблема тёмной энергии (или проблема космологической постоянной) — одна из главных, если не самая главная, проблема теоретической физики. Здесь много загадок и совпадений, требующих точной подстройки параметров разной природы. Например, Вселенная с отрицательной космологической постоянной порядка возможного вклада сильных взаимодействий в плотность энергии вакуума коллапсировала бы, не просуществовав и десятка микросекунд после Большого Взрыва. Другое совпадение, требующее своего объяснения, — соизмеримость вкладов в современную плотность энергии трёх основных компонент: тёмной энергии, тёмной материи и барионов. У каждого из этих вкладов свой собственный источник, за каждым стоит свой механизм, и *a priori* они должны были бы давать вклады разных порядков величины.

Подчеркнём, что энергия вакуума — не единственный кандидат на роль тёмной энергии. В литературе обсуждаются другие, не менее экзотические кандидаты; о некоторых из них мы упомянем в этой книге.

## 1.4 Вселенная в будущем

Будущее Вселенной определяется её геометрией и свойствами тёмной энергии.

Мы увидим, что вклад пространственной кривизны в эффективную плотность энергии обратно пропорционален квадрату масштабного фактора. Поэтому для расширяющейся Вселенной с ненулевой пространственной кривизной наступит такой момент, когда вклад кривизны в энергию станет доминировать над вкладом нерелятивистской материи.

В перспективе конкурировать будут вклады пространственной кривизны и тёмной энергии. Если последняя зависит от времени, и в далёком будущем достаточно быстро произойдёт её релаксация до нуля, то для Вселенной с положительной кривизной (замкнутая Вселенная) расширение начнёт постепенно замедляться, потом сменится сжатием, и жизнь Вселенной завершится коллапсом. Для Вселенной с отрицательной кривизной (открытая Вселенная) расширение будет продолжаться вечно, хотя его темп будет постепенно замедляться. Скопления галактик будут всё дальше и дальше “разлетаться” друг от друга. Такая же судьба постигнет галактики, не входящие в состав скоплений. Все гравитационно несвязанные структуры исчезнут. Аналогично выглядит судьба пространственно-плоской Вселенной с нулевой тёмной энергией (правда, расширение в этом случае будет происходить медленнее).

Если же тёмная энергия не зависит от времени (как это имеет место для энергии вакуума<sup>16</sup>), или эта зависимость слабая, то именно тёмная энергия и будет определять будущее. Положительная энергия вакуума приведёт к экспоненциально раздувающейся Вселенной; Вселенная будет вечно расширяться с постоянным ускорением.

Не исключена и возможность того, что плотность тёмной энергии в далёком будущем станет отрицательной и постоянной во времени. В этом случае отрицательная тёмная энергия сначала вызовет замедление расширения Вселенной, а потом и сжатие — эволюция завершится коллапсом.

Если при интерпретации современных экспериментальных данных использовать простейшие космологические модели, то вполне вероятной перспективой является сценарий экспоненциально расширяющейся Вселенной. Действительно, вклад кривизны в эффективную плотность энергии уже сейчас не превышает 2%, причём он уменьшается с ростом масштабного фактора. Основную роль играет тёмная энергия, и если её вклад постоянен во времени, то он и будет поддерживать экспоненциальное расширение. Вселенная будет существовать вечно.

Подчеркнём, что уверенно предсказать судьбу Вселенной в далёком будущем на основании только космологических наблюдений невозможно в принципе. Эти наблюдения позволяют, вообще говоря, выяснить зависимость (или независимость) от времени тёмной энергии *в прошлом*, и на их основании о поведении тёмной энергии *в будущем* можно делать лишь более или менее правдоподобные гипотезы. Для предсказания далёкого будущего Вселенной необходимо знание природы тёмной энергии (или, в более широком контексте, природы ускоренного расширения Вселенной в современную эпоху). Можно ли получить такое знание, и если да — то на каком пути, сегодня сказать трудно.

В литературе обсуждается и возможность того, что эффективная плотность тёмной энергии в будущем будет расти. Если этот рост будет достаточно быстрым, то Вселенную ожидает “большой разрыв” (Big Rip):

<sup>16</sup>Мы не обсуждаем здесь возможность фазового перехода во Вселенной, который мог бы изменить баланс между различными составляющими полной энергии, и таким образом повлиять на всю дальнейшую космологическую эволюцию.

через конечное время масштабный фактор станет равным бесконечности, взаимодействия между частицами (даже электромагнитные и сильные) будут недостаточны для удержания их в связанном состоянии, и все связанные системы, включая атомы и ядра, развалятся на свои составляющие, которые улетят на бесконечное расстояние друг от друга.

В то же время, сегодня можно достаточно уверенно экстраполировать эволюцию Вселенной на ближайшие 10–20 миллиардов лет. В течение этого времени Вселенная будет расширяться, причём темп её расширения будет сравним с современным.

## 1.5 Вселенная в прошлом

Простой факт, что Вселенная расширяется, сразу приводит к представлению о том, что в прошлом Вселенная была более горячей и более плотной. Мы увидим, что экстраполяция современного состояния Вселенной назад во времени на основе общей теории относительности и стандартной термодинамики показывает, что на всё более ранних стадиях эволюции вещество во Вселенной характеризовалось всё более высокой температурой и плотностью, причём на большинстве этапов космологического расширения выполнялись условия термодинамического равновесия. Двигаясь назад по времени, и, соответственно, поднимаясь по шкале температур, можно отметить несколько характерных “моментов” (точнее, более или менее длительных этапов) в эволюции Вселенной, см. рис. 1.9. Кратко обсудим некоторые из них.

### 1.5.1 Рекомбинация

При относительно низких температурах обычное вещество во Вселенной представляло собой нейтральный газ (в основном водород). На более ранней стадии, то есть при более высоких температурах, энергии связи в атоме водорода было недостаточно для того, чтобы удерживать электроны в атомах, и вещество находилось в фазе электрон-фотон-протонной плазмы. Температура рекомбинации — перехода из плазменного в газообразное состояние — определяется, грубо говоря, энергией связи атома водорода, 13.6 эВ. Мы увидим, что в действительности рекомбинация происходила при несколько меньшей температуре, около 0.35–0.25 эВ. Этот момент важен в связи с тем, что он представляет собой момент последнего рассеяния реликтовых фотонов: до этого момента фотоны интенсивно взаимодействовали с электронами плазмы (рассеивались, поглощались, испускались), а после рекомбинации нейтральный газ стал прозрачен для фотонов<sup>17</sup>. Таким образом, реликтовое излучение несёт непосредственную информацию о состоянии Вселенной в то время, когда её температура составляла около 0.27 эВ  $\approx$  3100 К; время жизни Вселенной составляло тогда около 480 тысяч лет.

Упомянутая выше высокая степень изотропии реликтового излучения прямо говорит о степени однородности Вселенной в момент рекомбинации: тогда Вселенная была гораздо однороднее чем сейчас, неоднородности плотности  $\delta\rho/\rho$  были сравнимы с флуктуациями температуры и составляли величину порядка  $10^{-5}$ . Тем не менее именно эти неоднородности привели в конечном итоге к возникновению структур во Вселенной — сначала первичных галактик, потом галактических скоплений и т.д.

<sup>17</sup>Точнее, при температуре 0.35–0.25 эВ произошло последовательно сразу три события: рекомбинация — образование атомов водорода, прекращение процессов рассеяния фотонов на электронах и “закалка” водорода — прекращение процессов дезинтеграции водорода фотонами.

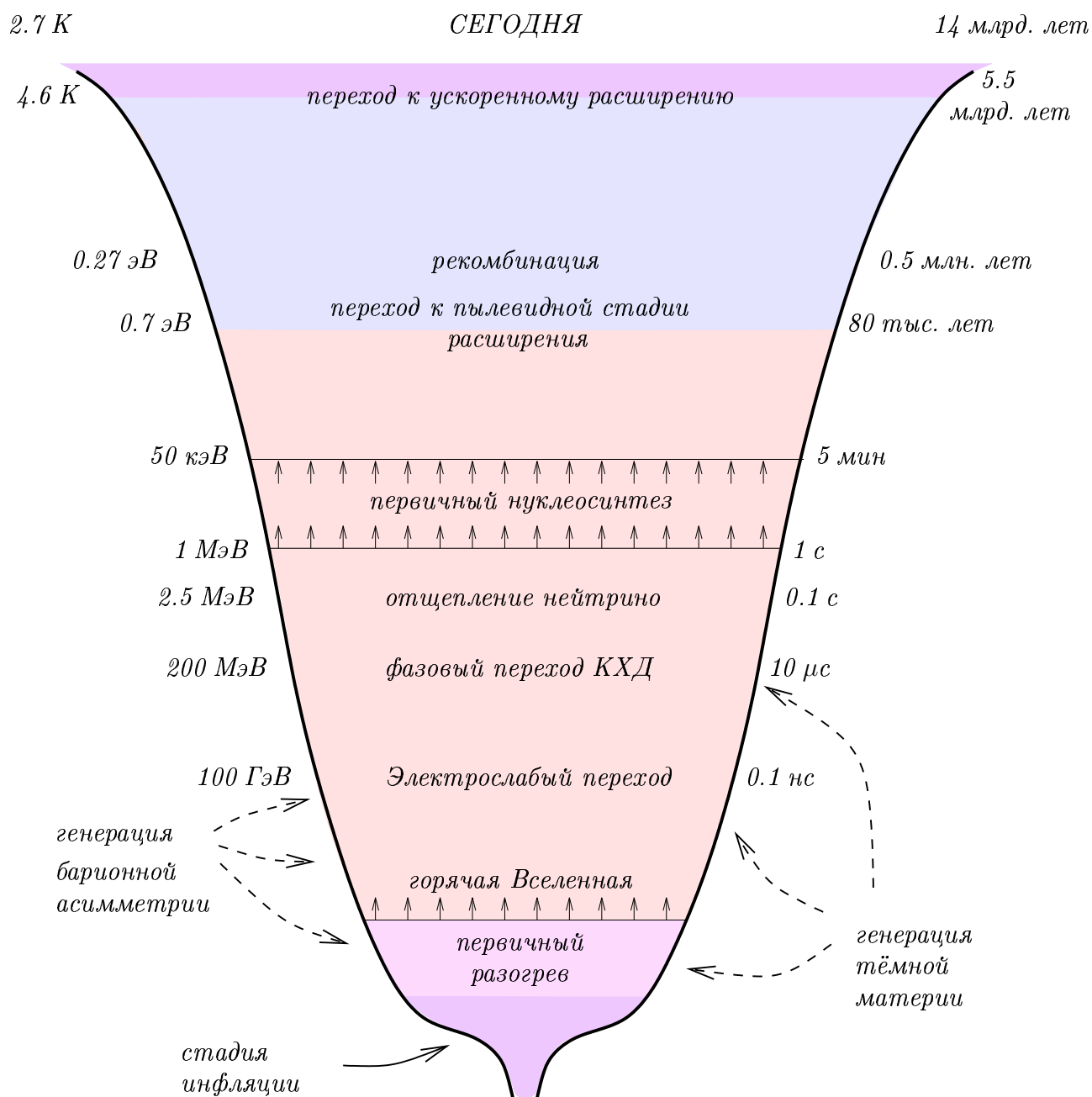


Рис. 1.9: Этапы эволюции Вселенной.

На самом деле, как указывают наблюдения, оптическая толщина (вероятность рассеяния) для фотонов после рекомбинации отлична от нуля и составляет  $\tau \simeq 0.06 - 0.12$ . Причиной этого является вторичная ионизация газа во Вселенной, начавшаяся на той стадии, когда образовывались и исчезали первые звёзды,  $z \lesssim 20$ .

Тот факт, что водород во Вселенной почти полностью ионизован ( $n_H/n_p < 10^{-5}$ ) при  $z \leq 6$ , было известно из наблюдений эмиссионных линий водорода от далёких квазаров: если бы на своём пути это излучение проходило бы через облака водорода, то оно полностью поглотилось бы ими. Действительно, красное смещение изменяет частоту падающего излучения, однако, вследствие разброса скоростей молекул газа, всегда найдётся большое количество молекул, движущихся от источника излучения так, что для них рассеяние будет происходить в резонансе, а значит, поглощение будет очень интенсивным. Наоборот, отсутствие эмиссионных линий гелия в спектре излучения квазаров свидетельствует в пользу того, что, основная часть гелия во Вселенной находилась в нейтральном состоянии.

В пользу именно ранней ионизации,  $z \sim 10$ , свидетельствует спектр анизотропии реликтового излучения, а также тот факт, что это излучение имеет поляризацию. Поляризацию можно объяснить, предположив, что часть реликтовых фотонов на пути к наблюдателю (Земле) рассеялась на свободных электронах. Чтобы обеспечить необходимое количество свободных электронов (ту самую оптическую толщину в 5-10%) требуется ионизовать весь водород при  $z \simeq 8 - 13$  или только часть водорода, но несколько раньше.

## 1.5.2 Первичный нуклеосинтез

Ещё один важный этап эволюции Вселенной характеризуется гораздо более высокими температурами, масштаб которых, грубо говоря, определяется масштабом энергии связи ядер, т.е.  $1 \div 10$  МэВ. При температурах выше этой энергии связи нейтроны и протоны существовали в космической плазме по-отдельности, но в результате охлаждения Вселенной за счёт её расширения становилось термодинамически выгодным объединение нейтронов и протонов в ядра. В результате наряду с водородом во Вселенной образовался в основном первичный  ${}^4\text{He}$  (наиболее сильно связанное лёгкое ядро), а также небольшое количество дейтерия ( ${}^2\text{H}$ ), гелия-3 ( ${}^3\text{He}$ ) и лития-7 ( ${}^7\text{Li}$ ); более тяжелые элементы в ранней Вселенной не образовывались<sup>18</sup>. Эта эпоха первичного нуклеосинтеза важна и интересна тем, что она является самой ранней стадией эволюции горячей Вселенной, для которой сегодня возможно прямое сравнение теории с наблюдениями: вычисление количества образовавшихся лёгких ядер основывается, помимо общей теории относительности, на известной микроскопической физике (физике ядра и слабых взаимодействий), а измерение этого количества — хотя и трудная, но вполне решаемая задача.

Прекрасное согласие теории первичного нуклеосинтеза с наблюдениями является одним из краеугольных камней теории горячей Вселенной. Подчеркнём, что эпоха первичного нуклеосинтеза охватывает период от примерно 1 секунды до 300 секунд с момента Большого взрыва, соответствующие температуры — от 1 МэВ до 50 кэВ.

Трудность экспериментального определения состава первичной плазмы состоит в том, что большинство вещества в современной Вселенной было переработано в звездах, и его ядерный состав сильно отличается от состава первичной плазмы. Тем не менее, удастся найти такие области во Вселенной, про вещество в которых с большой долей уверенности можно сказать, что оно не подвергалось переработке в звездах, и его состав соответствует первичному.

<sup>18</sup>Тяжелые элементы, присутствующие в современной Вселенной, образовались в результате эволюции звёзд. В частности, важнейшее звено звёздного нуклеосинтеза, углерод, образовался в результате слияния трёх ядер  ${}^4\text{He}$  — процесса, возможного лишь при очень высокой плотности, достигаемой при коллапсе звёзд. Все последующие элементы синтезировались из углерода: относительно лёгкие элементы, включая железо, образовались в термоядерных реакциях внутри звёзд. Более тяжёлые элементы образовались в результате захвата нейтронов в звёздах и при вспышках сверхновых, а часть, по-видимому, в результате захвата протонов или позитронов.

### 1.5.3 Закалка нейтрино

Если фотоны испытывают последнее рассеяние при температуре около 0.26 эВ, то нейтрино, как мы увидим в этой книге, перестают взаимодействовать с космической плазмой при температуре 2 – 3 МэВ. До этого момента нейтрино находились в термодинамическом равновесии с остальным веществом, а после него — свободно распространяются во Вселенной. В дальнейшем мы остановимся на вычислении температуры и плотности числа реликтовых нейтрино, а сейчас отметим только, что по порядку величины они совпадают соответственно с температурой и плотностью числа реликтовых фотонов. К сожалению, прямое наблюдение реликтовых нейтрино представляет собой чрезвычайно сложную, а, возможно, и вообще неразрешимую экспериментальную проблему.

▷ *Задача 10. Если в природе существуют источники нейтрино сверхвысоких энергий, то возможно рассеяние таких нейтрино на реликтовых нейтрино. Сечение рассеяния нейтрино на нейтрино в Стандартной модели физики частиц очень мало. Максимального значения,  $\sigma_{\nu\nu} = 0.15 \text{ мбн} = 1.5 \cdot 10^{-31} \text{ см}^2$ , это сечение достигает при энергии в системе центра масс  $\sqrt{s} \approx M_Z \approx 90 \text{ ГэВ}$ , когда нейтрино аннигилируют с резонансным образованием  $Z$ -бозона, который затем быстро распадается. Обнаружение продуктов этого распада (в основном, фотонов) позволило бы получить косвенное подтверждение существования реликтовых нейтрино.*

*Найти длину свободного пробега нейтрино сверхвысоких энергий в современной Вселенной по отношению к этому процессу. Стоит ли ожидать обрезания спектра нейтрино сверхвысоких энергий, аналогичного обрезанию, предсказанному для спектра протонов сверхвысоких энергий (см. задачу 9)?*

По-видимому, роль нейтрино в современной Вселенной невелика. Тем не менее, плотность нейтрино в ранней Вселенной является важным параметром теории нуклеосинтеза. Образование элементов происходило в процессе расширения Вселенной, а присутствие нейтринной компоненты влияло на темп расширения и, соответственно, на скорость остывания космической плазмы. От этой скорости зависели неравновесные процессы в плазме, приводящие к образованию лёгких ядер. Успех теории нуклеосинтеза в предсказании концентрации реликтовых ядер даёт твердую уверенность в том, что реликтовые нейтрино действительно существуют во Вселенной.

Нейтрино также играют роль в процессе образования структур во Вселенной и в формировании спектра анизотропии реликтового излучения на малых угловых масштабах. В этой книге мы будем возвращаться к нейтрино, чтобы подробнее исследовать их роль в ранней Вселенной.

### 1.5.4 Фазовые переходы во Вселенной

Двигаясь ещё дальше назад по времени, мы попадаем в область экстраполяций, пока не подтвержденных наблюдениями. Наиболее естественно предположить, тем не менее, что теория горячей Вселенной может быть продолжена назад во времени до температур порядка сотен ГэВ, и, вполне вероятно, до ещё более высоких температур. Интересные, по крайней мере с теоретической точки зрения, эпохи эволюции Вселенной при столь высоких температурах связаны с фазовыми переходами в космической плазме.



— Переход кварк-глюонная плазма — адроны. Температура этого фазового перехода определяется энергетическим масштабом сильных взаимодействий и составляет около 200 МэВ. При более высоких температурах кварки и глюоны ведут себя, грубо говоря, как свободные частицы, а при меньших температурах они заключены в адроны — бесцветные связанные состояния кварков и глюонов. Примерно при этой же температуре происходит фазовый переход с нарушением киральной симметрии.

— Электрослабый переход. Упрощая ситуацию, можно сказать, что при температурах выше 100 ГэВ — масштаба слабых взаимодействий — хиггсовский конденсат отсутствует, а  $W$ - и  $Z$ -бозоны имеют нулевые массы. Имеющаяся сейчас фаза с нарушенной электрослабой симметрией, ненулевым хиггсовским конденсатом и массивными  $W$ - и  $Z$ -бозонами возникает в результате электрослабого перехода<sup>19</sup>, происходящего при температуре порядка 100 ГэВ.

— Переход Большого объединения. Имеются определённые указания на то, что при энергиях и температурах выше  $10^{16}$  ГэВ различия между сильными, слабыми и электромагнитными взаимодействиями отсутствуют, и фундаментальная физика описывается теорией Большого объединения всех взаимодействий, кроме гравитационного. Если это так, и если во Вселенной реализовывались столь высокие температуры, то при температуре Большого объединения  $T_{GUT} \sim 10^{16}$  ГэВ должен был происходить соответствующий фазовый переход. Отметим, однако, что максимальная температура во Вселенной вполне могла и не достигать  $T_{GUT}$  (в частности, во многих инфляционных моделях температура разогрева значительно ниже  $T_{GUT}$ ), т.е. фаза Большого объединения во Вселенной могла не реализовываться.

### 1.5.5 Генерация барионной асимметрии

В современной Вселенной имеются барионы (протоны, нейтроны) и практически нет антибарионов. Количественно концентрацию барионов в современной Вселенной можно охарактеризовать отношением плотности числа барионов к плотности числа фотонов; исследования первичного нуклеосинтеза и анизотропии реликтового излучения дают

$$\eta_B \equiv \frac{n_B}{n_\gamma} = 6.15 \cdot 10^{-10} \quad (1.15)$$

с точностью около 5%. Барионное число сохраняется при не слишком высоких энергиях и температурах, и мы увидим, что отношение  $n_B/n_\gamma$  в ранней Вселенной совпадало по порядку величины со значением (1.15). Таким образом, барионная асимметрия  $\eta_B$  — один из важных параметров ранней Вселенной.

При температурах порядка сотен МэВ и выше интенсивно происходят процессы рождения и аннигиляции кварк-антикварковых пар. Поэтому, в отличие от современной Вселенной, где частиц с отрицательным барионным числом практически нет, в ранней Вселенной присутствовали как кварки (положительное барионное число), так и антикварки (отрицательное барионное число). Простые термодинамические соображения, которые мы будем рассматривать в этой книге, показывают, что при высоких температурах число кварк-антикварковых пар по порядку величины совпадает с числом фотонов, поэтому барионную асимметрию в ранней Вселенной можно

<sup>19</sup>В действительности ситуация в электрослабой теории более сложная: параметр порядка в ней отсутствует (по крайней мере в рамках Стандартной модели физики частиц), и фазового перехода в ней может и не быть (и действительно, в Стандартной модели, с учётом имеющихся ограничений на массу бозона Хиггса, вместо фазового перехода имеет место гладкий кроссовер).

охарактеризовать отношением<sup>20</sup>

$$\frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q + n_{\bar{q}}} \sim \eta_B \sim 10^{-10}, \quad (1.16)$$

здесь  $n_q$  и  $n_{\bar{q}}$  — плотности числа кварков и антикварков, соответственно. Мы заключаем, что в ранней Вселенной примерно на десять миллиардов кварк-антикварковых пар приходился один “лишний” кварк. Именно эта маленькая асимметрия ответственна за то, что в современной Вселенной есть обычное барионное вещество: в процессе расширения и охлаждения Вселенной антикварки аннигилируют с кварками, а избыточные кварки остаются и в конечном итоге образуют протоны и нейтроны.

Одна из задач космологии — объяснить само существование барионной асимметрии, а также её величину (1.15). Совершенно невероятно, что слабый избыток кварков над антикварками (1.16) существовал во Вселенной с самого начала, т.е. представлял собой начальное данное космологической эволюции; гораздо более правдоподобно, что “в начале” Вселенная была барион-симметричной. К такому же выводу приводит инфляционная теория. Асимметрия (1.16) *образовалась* в процессе эволюции Вселенной в результате процессов с несохранением барионного числа. В этой книге мы будем обсуждать возможные механизмы генерации барионной асимметрии, но нужно сразу подчеркнуть, что однозначного ответа на вопрос о происхождении барионной асимметрии пока нет. Здесь мы заметим только, что барионная асимметрия образовалась, по-видимому, при весьма высоких температурах — по крайней мере 100 ГэВ, а скорее всего заметно выше, хотя возможны механизмы её генерации и при более низких температурах.

Проблема барионной асимметрии не может быть решена в рамках Стандартной модели физики частиц. Это — ещё одно указание на существование “новой физики”, которое следует из космологии.

### 1.5.6 Генерация тёмной материи

Из каких частиц состоит кластеризованная небарионная тёмная материя — экспериментально неизвестно. Можно ожидать только, что это — стабильные или практически стабильные новые частицы, отсутствующие в Стандартной модели элементарных частиц. С одной стороны, само существование тёмной материи представляет собой сильный аргумент о неполноте Стандартной модели элементарных частиц, что делает детектирование частиц тёмной материи и экспериментальное изучение их свойств интереснейшей задачей. С другой стороны, отсутствие на сегодня экспериментальной информации о свойствах этих частиц не даёт возможности однозначно ответить на вопрос о механизме образования тёмной материи в ранней Вселенной. Мы будем обсуждать различных кандидатов на роль частиц тёмной материи в этой книге, а здесь ограничимся одним замечанием. Мы увидим, что гипотетические стабильные частицы с массой порядка сотен ГэВ, сечение аннигиляции которых сравнимо со слабыми сечениями, не успевают полностью проаннигилировать в процессе эволюции Вселенной, и плотность массы таких частиц в современной Вселенной естественным образом оказывается сравнима с критической плотностью  $\rho_c$ . Поэтому такие частицы — хорошие кандидаты на роль частиц тёмной материи, тем более

<sup>20</sup>Мы учли, что соотношение между кварк-антикварковой асимметрией и  $\eta_B$  справедливо с точностью одного порядка величины.

что они имеются в ряде расширений Стандартной модели, включая Минимальную суперсимметричную стандартную модель и её обобщения. Частицы, о которых идёт речь, получили название WIMPs (weakly interacting massive particles). “Закалка” частиц тёмной материи, т.е. прекращение их взаимной аннигиляции, в случае WIMPs происходит при температуре, несколько меньшей их массы, т.е.  $T \sim 10 - 100$  ГэВ.

Разумеется, кроме WIMPs имеется целый ряд других кандидатов на роль частиц темной материи, таких как аксион, гравитино и т.д.

## 1.6 Образование структур во Вселенной

В предыдущих разделах мы кратко рассмотрели наиболее важные этапы развития Вселенной. Каждый этап, будь то нуклеосинтез или рекомбинация, имеет конечную продолжительность. Во Вселенной, однако, существует процесс, начавшийся, по-видимому, на самом раннем этапе её развития и продолжающийся до сих пор. Речь идёт об образовании структур — галактик, скоплений, сверхскоплений. При этом первичными (по времени появления) образованиями считаются галактики.

Теория, описывающая образование этих структур, основана на так называемой джинсовской нестабильности — гравитационной неустойчивости возмущений плотности материи. При этом нужно, разумеется, предполагать, что на самых ранних стадиях эволюции неоднородности плотности уже существовали, хотя и были малы по величине. Отметим, что теория горячего Большого взрыва не только не даёт форму спектра этих первичных возмущений, но и вообще не может объяснить их появление. Для объяснения их возникновения требуется привлекать дополнительные механизмы, наиболее изящный из которых имеется в инфляционной теории. Замечательно, что инфляционный механизм согласуется со всей совокупностью космологических наблюдательных данных.

Для теории возникновения галактик источник первичных возмущений в общем-то не важен. Быстрый рост возмущений плотности начался на том этапе эволюции Вселенной, когда она уже настолько остыла, что плотность энергии в ней в основном стала определяться нерелятивистским веществом. Это произошло через 80 тыс. лет после Большого взрыва. В это время возмущения плотности имели небольшую амплитуду,  $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ . Островки повышенной плотности стали источниками дополнительного гравитационного поля. Они притягивали к себе окружающее вещество, в результате чего плотность в них ещё более увеличивалась. В этом и состоит физическая причина гравитационной неустойчивости<sup>21</sup>. При достижении достаточно большой плотности островки стали гравитационно связанными и стали “жить своей жизнью”, в частности, их размеры не увеличивались, несмотря на продолжающееся расширение Вселенной. Более того, гравитационная динамика внутри этих локальных образований привела к тому, что они, наоборот, сжимались: частицы, стремясь друг к другу, стекались к общему гравитационному центру. В результате основной объём такого островка становился практически пустым, свободным от частиц, зато в центре образовывался новый объект — протогалактика с большим относительным контрастом плотности,  $\delta\rho/\rho > 1$ . Формирование протогалактик происходило при красных смещениях порядка нескольких десятков.

Размер структуры — галактики, скопления и т.п. — связан с пространственным

<sup>21</sup>Для релятивистских частиц (например, нейтрино), описываемый механизм не работает, поскольку слабое гравитационное поле не способно удерживать такие частицы внутри островка.

размером первичного островка повышенной плотности, а значит со спектром возмущений. Именно от него зависят плотности числа галактик и скоплений и их распределение по массе. Измерение этих характеристик позволяет определить спектр первичных возмущений. Имеющиеся на сегодняшний день наблюдательные данные с неплохой точностью соответствуют простейшему “плоскому” спектру первичных флуктуаций, получившему название спектра Гаррисона–Зельдовича. Отличительной особенностью этого спектра является отсутствие выделенного масштаба длины.

Неоднородности, имевшиеся в космической среде в эпоху рекомбинации, приводят к анизотропии реликтового излучения. Поэтому спектр анизотропии реликтового излучения является ценным источником информации о спектре первичных флуктуаций материи. В частности, из спектра анизотропии реликтового излучения определяются амплитуда первичных флуктуаций плотности  $\delta\rho/\rho$  и наклон спектра.

Образование структур даёт ещё один аргумент в пользу существования тёмной материи: без последней флуктуации плотности начали бы расти слишком поздно и к настоящему моменту времени просто не успели бы достаточно развиться. Кроме того, из теории образования структур следует, что основная часть тёмной материи должна быть *холодной*, т.е. состоять из частиц, которые перестали взаимодействовать с плазмой уже будучи нерелятивистскими. Если бы основная часть тёмной материи была, наоборот, *горячей*, т.е. состояла бы из частиц, которые перестали взаимодействовать с плазмой ещё будучи релятивистскими<sup>22</sup>, то образование структур протекало бы несколько по-другому: как один из результатов, первичными структурами были бы скопления галактик. Из наблюдения структур с размерами порядка десятка Мегапарсек и меньше следует, что горячая тёмная материя не даёт большого вклада в полную плотность энергии Вселенной: во Вселенной, чья плотность энергии в основном определялась бы горячей тёмной материей, структур относительно небольших размеров было бы значительно меньше.

Во второй части этой книги мы будем рассматривать образование структур во Вселенной и роль различных компонент первичной плазмы в этом процессе.

## 1.7 Инфляционная стадия

Теория горячего Большого Взрыва, о которой шла речь в предыдущих разделах, имеет внутренние трудности. Часть из них связана с тем, что в рамках этой теории для успешного описания ранней и современной Вселенной требуется наложить начальные условия для космологической эволюции, причём эти начальные условия имеют весьма специальный и “неестественный” вид. Мы будем детально обсуждать проблему начальных данных в теории горячей Вселенной во второй части книги, а здесь приведём лишь одно соображение, поясняющее, о проблемах какого рода идет речь.

Как мы уже говорили, современная Вселенная — “тёплая”, и, следовательно, она может характеризоваться энтропией. Плотность энтропии по порядку величины рав-

---

<sup>22</sup>В действительности, последнее свойство имеет как горячая, так и “тёплая” тёмная материя. Для горячей тёмной материи характерно ещё и то, что её составляют частицы, остававшиеся релятивистскими в начале этапа доминирования нерелятивистской материи. Примером горячей тёмной материи являются нейтрино с массами  $m_\nu \sim 1 - 10^{-3}$  эВ. Отметим, что вариант тёплой (а не холодной) тёмной материи пока нельзя исключить на основе наблюдательных данных.

на плотности числа фотонов; в современной Вселенной

$$s \sim 10^3 \text{ см}^{-3}.$$

Оценим энтропию видимой части Вселенной, которая имеет размер  $R_0 \sim 10^4 \text{ Мпк} \sim 10^{28} \text{ см}$ :

$$S \sim sR_0^3 \sim 10^{88}.$$

Это огромное безразмерное число — одна из характеристик нашей Вселенной. Почему Вселенная имеет столь большую энтропию? В теории горячего Большого взрыва на этот вопрос ответа нет, поскольку в её рамках энтропия сохраняется (или, точнее, почти сохраняется). Огромную энтропию Вселенной приходится закладывать “руками” в качестве начального данного. Это неудовлетворительное положение дел получило название “проблемы энтропии”. Таких трудностей в теории горячего Большого взрыва несколько; на качественном уровне все они сводятся к тому, что эта теория не объясняет, почему Вселенная такая большая, горячая, пространственно-плоская, однородная и изотропная.

Другая трудность теории горячего Большого взрыва — проблема начальных неоднородностей. На горячей стадии Вселенная не была абсолютно однородной: неоднородности плотности в ней составляли величину  $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$ . В рамках теории горячего Большого взрыва механизма образования начальных неоднородностей нет: их также приходится закладывать “руками” в качестве начального данного космологической эволюции.

Оба этих круга проблем находят изящное решение в инфляционной теории. Согласно этой теории, горячей стадии развития Вселенной предшествовала стадия экспоненциально быстрого расширения (стадия инфляции). Во время этой стадии первоначально малая область Вселенной (размер которой был сравним, скажем, с планковской длиной  $l_{Pl}$ ) растянулась до огромных размеров: вполне возможно, что современный размер этой области на много порядков превышает всю наблюдаемую часть Вселенной! Это в конечном итоге и объясняет плоскостность, однородность и изотропию наблюдаемой Вселенной. Благодаря экспоненциальному характеру расширения достаточно, чтобы инфляционная стадия продолжалась короткое время: первый круг проблем теории горячего Большого взрыва находит своё решение, если длительность инфляции составляла  $(50 - 70)H_{infl}^{-1}$ , где  $H_{infl} \sim 10^{-4}M_{Pl}$  (а может быть и заметно меньше). Таким образом, минимальная длительность инфляции — порядка  $10^6 t_{Pl} \sim 10^{-37} \text{ с}$ . Скорее всего, инфляционная стадия продолжалась гораздо дольше, но в любом случае вполне вероятно, что мы имеем дело с микроскопическим временным масштабом.

Для реализации режима экспоненциального расширения требуется, чтобы плотность энергии во Вселенной очень слабо зависела от времени. Плотность энергии обычной материи — газа частиц — таким свойством не обладает. Поэтому все модели инфляции используют гипотетические новые поля.<sup>23</sup>

При определённых условиях это новое поле — инфлатон — является пространственно-однородным и достаточно медленно меняется со временем в области, испытывающей инфляцию. Медленно меняется и потенциальная энергия инфлатона, что и обеспечивает экспоненциальный режим расширения.

<sup>23</sup> Другая возможность — включение новых слагаемых в действие гравитационного поля — как правило эквивалентно введению новых полей.

В некоторый момент условия, необходимые для экспоненциального расширения, нарушаются, и инфляционная стадия заканчивается. Наступает период разогрева Вселенной, в течение которого энергия инфлатона переходит в энергию обычного вещества. В итоге Вселенная разогревается до высокой температуры и входит в горячую стадию. Процессы разогрева сопровождаются генерацией энтропии, что даёт решение упомянутой выше проблемы энтропии.

Первоначально инфляционная теория была предложена для решения первого круга упомянутых выше проблем, но довольно скоро выяснилось, что в ней находит решение и проблема начальных неоднородностей. Изначальным источником неоднородностей служат вакуумные флуктуации полей, в простых вариантах — флуктуации самого инфлатонного поля. На инфляционной стадии эти вакуумные флуктуации многократно усиливаются благодаря быстрому изменению гравитационного поля Вселенной во времени. По окончании инфляции они перерабатываются в возмущения плотности вещества. Амплитуда возмущений плотности зависит от неизвестных параметров модели, однако спектр (зависимость от длины волны) однозначно вычисляется в каждой конкретной модели инфляции. Замечательно, что большинство моделей предсказывают спектр, близкий к плоскому (т.е. к спектру Гаррисона–Зельдовича), что соответствует наблюдательным данным по анизотропии реликтового излучения и крупномасштабной структуре Вселенной. В то же время, характерным для инфляционных моделей является предсказание небольшого наклона спектра (т.е. отличие от спектра Гаррисона–Зельдовича), который может быть обнаружен космологическими наблюдениями.

Другим предсказанием многих моделей инфляции является наличие реликтовых гравитационных волн. Они также возникают в результате усиления на инфляционной стадии вакуумных флуктуаций, в этом случае гравитационного поля. Во многих моделях амплитуды гравитационных волн с длинами, сравнимыми с размером видимой части Вселенной, составляют величину порядка  $10^{-5} - 10^{-6}$ . Такие гравитационные волны оказывают влияние на свойства реликтового излучения — его анизотропию и поляризацию. Эти эффекты ещё не обнаружены, но будут доступны наблюдению в будущих экспериментах. Открытие эффектов, обусловленных реликтовыми гравитационными волнами, не только будет служить сильнейшим аргументом в пользу инфляционной теории, но и позволит определить важнейшие параметры инфляционной стадии, такие как темп расширения Вселенной  $H_{infl}$ .

К настоящему времени инфляционная теория хорошо разработана. Мы будем довольно подробно изучать различные ее аспекты во второй части этой книги.

В заключение нашего беглого обзора отметим, что за его рамками остался целый ряд вопросов, которые мы будем изучать в этой книге. Надеемся, тем не менее, что после этого введения содержание книги стало более или менее обозримым.

## Глава 2

# Однородная изотропная Вселенная

### 2.1 Однородные изотропные пространства

С высокой степенью точности наша Вселенная пространственно однородна и изотропна на достаточно больших масштабах. Это означает, что в фиксированный момент времени геометрия пространства — это геометрия однородного и изотропного трёхмерного многообразия. Таких многообразий существует всего три<sup>1</sup> (с точностью до общих растяжений): трёхмерная сфера, трёхмерное евклидово пространство (3-плоскость) и трёхмерный гиперболоид. Геометрию трёхмерной сферы проще всего понять, представив себе её вложенной в (фиктивное с точки зрения физики) четырёхмерное евклидово пространство и записав уравнение 3-сферы в виде

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = R^2 ,$$

где  $y^a$  ( $a = 1, \dots, 4$ ) — координаты четырёхмерного евклидова пространства, а  $R$  — радиус 3-сферы. Введем на 3-сфере сферические углы  $\chi$ ,  $\theta$  и  $\phi$ , так что

$$\begin{aligned} y^1 &= R \cos \chi , \\ y^2 &= R \sin \chi \cos \theta , \\ y^3 &= R \sin \chi \sin \theta \cos \phi , \\ y^4 &= R \sin \chi \sin \theta \sin \phi . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тогда расстояние между двумя точками на 3-сфере, имеющими координаты  $(\chi, \theta, \phi)$  и  $(\chi + d\chi, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$  будет равно

$$\begin{aligned} dl^2 &= (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 \\ &= R^2 \{ [d(\cos \chi)]^2 + [d(\sin \chi \cos \theta)]^2 + [d(\sin \chi \sin \theta \cos \phi)]^2 \\ &\quad + [d(\sin \chi \sin \theta \sin \phi)]^2 \} . \end{aligned} \tag{2.2}$$

После простого вычисления получим, что метрика трёхмерной сферы имеет вид

$$\text{3-сфера :} \quad dl^2 = R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \tag{2.3}$$

---

<sup>1</sup>Существенно при этом, что трёхмерная метрика имеет евклидову сигнатуру, иначе говоря, локально может быть приведена к стандартному виду  $dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ . Мы не приводим здесь доказательства того, что других типов однородных и изотропных трёхмерных пространств нет.

Отметим, что в этой формуле не осталось следов от вспомогательного четырёхмерного евклидова пространства, как и должно быть.

Аналогично 3-сфере, трёхмерный гиперboloид удобно представлять себе вложенным в фиктивное четырёхмерное пространство Минковского с метрикой

$$ds^2 = -(dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 ,$$

при этом уравнение гиперboloида имеет вид

$$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = R^2 , \quad (2.4)$$

и нас интересует одна из компонент связности  $y^1 > 0$ .

▷ *Задача 1.* Убедитесь, что гиперboloид действительно является однородным и изотропным пространством. Указание: Начните с того, что дайте четкое определение того, что понимается под однородным и изотропным пространством.

Координаты на 3-гиперboloиде можно ввести по аналогии с (2.1):

$$\begin{aligned} y^1 &= R \operatorname{ch} \chi , \\ y^2 &= R \operatorname{sh} \chi \cos \theta , \\ y^3 &= R \operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \phi , \\ y^4 &= R \operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \phi . \end{aligned}$$

Вычисление расстояния между двумя точками на гиперboloиде вполне аналогично (2.2) и даёт

$$\text{3-гиперboloид :} \quad dl^2 = R^2 [d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \quad (2.5)$$

Для полноты запишем и метрику 3-плоскости (трехмерного евклидова пространства)

$$\text{3-плоскость :} \quad dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 . \quad (2.6)$$

Одним из характерных свойств однородных и изотропных пространств является то, что все ковариантные геометрические величины выражаются через метрический тензор  $\gamma_{ij}$  и, возможно, тензоры  $\delta_i^j$  и  $E_{ijk}$ , существующие в любом римановом пространстве, см. Приложение А (здесь  $i, j = 1, 2, 3$ ; мы обозначаем метрический тензор трёхмерного пространства символом  $\gamma_{ij}$ , чтобы отличать его от метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  четырёхмерного пространства-времени). При этом коэффициенты перед соответствующими комбинациями тензора  $\gamma_{ij}$  не зависят от координат. В частности, тензор Римана трёхмерного однородного изотропного пространства равен

$${}^{(3)}R_{ijkl} = \frac{\varkappa}{R^2} (\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) , \quad (2.7)$$

где мы ввели параметр  $\varkappa = 0, \pm 1$ , различающий 3-плоскость, 3-сферу и 3-гиперboloид

$$\varkappa = \begin{cases} +1 , & \text{3-сфера} \\ 0 , & \text{3-плоскость} \\ -1 , & \text{3-гиперboloид} \end{cases} \quad (2.8)$$

Из (2.7) сразу следует, что тензор Риччи равен

$${}^{(3)}R_{ij} = 2 \frac{\varkappa}{R^2} \gamma_{ij} , \quad (2.9)$$

а скаляр кривизны постоянен в пространстве и равен  $6\varkappa R^{-2}$ .



▷ *Задача 2.* Получить соотношения (2.7) и (2.9) прямым вычислением.

Метрикам 3-сферы, 3-плоскости и 3-гиперболоида можно придать унифицированный вид. Для этого заметим сначала, что введя координату  $\rho = R\chi$  для сферы и гиперболоида и сферические координаты  $(\rho, \theta, \phi)$  для плоскости, метрики (2.3), (2.5) и (2.6) можно представить в виде

$$dl^2 = d\rho^2 + r^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.10)$$

где

$$r(\rho) = \begin{cases} R \sin(\rho/R), & \text{3-сфера} \\ \rho, & \text{3-плоскость} \\ R \operatorname{sh}(\rho/R), & \text{3-гиперболоид} \end{cases} \quad (2.11)$$

Интерпретация величин, входящих в формулу (2.10) очевидна:  $\rho$  — это геодезическое (кратчайшее) расстояние от (произвольно выбранного) начала координат до точки с координатами  $(\rho, \theta, \phi)$ , а  $r(\rho)$  — определяет площадь двумерной сферы, находящейся на расстоянии  $\rho$  от начала координат,  $S = 4\pi r^2(\rho)$ . Ясно также, что отрезок длины  $l$ , находящийся на расстоянии  $\rho$  от начала координат, виден оттуда под углом

$$\Delta\theta = \frac{l}{r(\rho)}.$$

В качестве радиальной координаты можно вместо  $\rho$  выбрать  $r$ , тогда получим, например, для 3-гиперболоида

$$d\rho^2 = \frac{dr^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{\rho}{R}} = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{R^2}},$$

так что метрика приобретает вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \varkappa \frac{r^2}{R^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.12)$$

где параметр  $\varkappa$  — тот же, что в (2.8). Отметим, что координаты  $(\rho, \theta, \phi)$  покрывают лишь половину 3-сферы, поскольку область  $0 \leq r < R$  — это часть 3-сферы от начала координат (полюса) до поверхности максимальной площади (экватора 3-сферы). Отсюда и координатная сингулярность в метрике (2.12) при  $\varkappa = 1$  и  $r = R$ .

## 2.2 Метрика Фридмана–Робертсона–Уокера

Расширяющаяся однородная изотропная Вселенная описывается метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.13)$$

где  $\gamma_{ij}(x)$  — метрика *единичной* 3-сферы (метрика (2.3) с  $R = 1$ ), единичного 3-гиперболоида или 3-плоскости. Метрику (2.13) называют метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера (FRW), и говорят о замкнутой Вселенной (пространство — это 3-сфера,  $\varkappa = +1$ ), открытой и плоской Вселенной (пространство — это 3-гиперболоид и 3-плоскость,  $\varkappa = -1$  и  $\varkappa = 0$  соответственно). В случаях замкнутой и открытой Вселенной масштабный фактор  $a(t)$  в каждый фиксированный момент времени

имеет смысл радиуса кривизны пространства. В случае же пространственно плоской Вселенной сам по себе масштабный фактор физического смысла не имеет, поскольку в фиксированный момент времени его можно сделать равным любому наперёд заданному числу (например, единице) растяжением пространственных координат. Физический смысл в плоской Вселенной имеет отношение масштабных факторов в различные моменты времени  $a(t_1)/a(t_2)$ , и, в частности, параметр Хаббла

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} .$$

Здесь и далее точка означает производную по времени.

Метрика однородной изотропной Вселенной имеет вид (2.13) в определённой системе отсчёта, которая выделена тем, что в каждый фиксированный момент времени пространство выглядит одинаково в разных областях Вселенной. Эта система отсчёта является к тому же сопутствующей: мировые линии частиц, покоящихся в этой системе отсчёта, являются геодезическими, т.е. такие частицы свободны. Прежде чем убедиться в этом, заметим ещё, что для таких частиц  $ds^2 = dt^2$ , т.е. временная координата  $t$  имеет смысл собственного времени покоящихся частиц. В современной Вселенной в качестве таких покоящихся частиц выступают галактики, если отвлечься от их локального (как говорят, пекулярного) движения, обусловленного локальными гравитационными потенциалами (например, созданными близкими галактиками).

Покажем, что мировая линия  $x^i = \text{const}$  удовлетворяет уравнению геодезической в метрике (2.13),

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = 0 , \quad (2.14)$$

где  $u^\mu$  — четырёхскорость (см. Приложение А). Вычислим для этого символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) . \quad (2.15)$$

Ненулевые компоненты метрического тензора равны

$$g_{00} = 1 , \quad g_{ij} = -a^2(t) \gamma_{ij}(x) ,$$

а для обратного тензора имеем

$$g^{00} = 1 , \quad g^{ij} = -\frac{1}{a^2(t)} \gamma^{ij}(x) .$$

Очевидно, что

$$\Gamma_{00}^0 = 0 , \quad \Gamma_{0i}^0 = 0 , \quad \Gamma_{00}^i = 0$$

(в выражении в скобках в (2.15) по крайней мере два индекса должны принимать нулевое значение, но  $g_{0i} = 0$ ,  $\partial_\mu g_{00} = 0$ ). Для  $\Gamma_{0j}^i$  имеем

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2} g^{ik} \partial_0 g_{jk} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i . \quad (2.16)$$

Для остальных символов Кристоффеля имеем в результате столь же простого вычисления

$$\Gamma_{ij}^0 = a \dot{a} \gamma_{ij} , \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{jk}^i = {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i , \quad (2.18)$$

где  ${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i$  — символы Кристоффеля, вычисленные по трёхмерной метрике  $\gamma_{ij}$ .

Обратимся к уравнению (2.14). Единственной отличной от нуля компонентой четырёхскорости  $u^\mu = dx^\mu/ds$  для покоящейся частицы является

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{ds} = 1 .$$

Уравнение (2.14) с очевидностью удовлетворяется, поскольку  $du^\mu/ds = 0$  и  $\Gamma_{00}^\mu = 0$  для любого  $\mu$ . Мировые линии частиц, покоящихся в выбранной системе отсчёта, действительно являются геодезическими.

▷ *Задача 3. Если выбрать временную координату не совпадающей с собственным временем покоящихся частиц, то FRW-метрика будет иметь вид*

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j .$$

*Показать непосредственным вычислением, что и в этой метрике мировые линии покоящихся частиц — геодезические (это, конечно, заранее очевидно, поскольку это те же линии, что и в тексте).*

В заключение этого раздела отметим, что и для замкнутой, и для открытой модели нередко бывает возможно пренебречь пространственной кривизной и использовать пространственно-плоскую метрику

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} . \quad (2.19)$$

Это во всяком случае законно, если рассматриваются пространственные расстояния, много меньшие радиуса пространственной кривизны  $a(t)$ . Мы уже упоминали во Введении, что наблюдательные данные свидетельствуют о том, что Вселенная и сейчас, и в прошлом — пространственно плоская с хорошей степенью точности, поэтому приближение (2.19) в действительности является очень хорошим. Мы ещё будем уточнять это утверждение в дальнейшем.

## 2.3 Красное смещение. Закон Хаббла

С течением времени масштабный фактор  $a(t)$  увеличивается, так что расстояния между точками с фиксированными пространственными координатами  $x^i$  увеличиваются — Вселенная расширяется. Из-за этого длина волны фотона, испущенного в прошлом удалённым источником, увеличивается при движении фотона к наблюдателю, т.е. фотон испытывает красное смещение. Чтобы описать это явление количественно, запишем действие свободного электромагнитного поля в искривлённом пространстве-времени с метрикой  $g_{\mu\nu}(x)$ :

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} , \quad (2.20)$$

где, как обычно,

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu ,$$

и  $A_\mu$  — вектор-потенциал электромагнитного поля. Действие (2.20) — простейшее ковариантное обобщение действия максвелловской электродинамики; множитель  $\sqrt{-g}$

обеспечивает инвариантность элемента четырёхмерного объема (см. Приложение А). В принципе к действию (2.20) можно было бы добавить другие инвариантные слагаемые, обращающиеся в нуль в случае плоского пространства-времени, например,

$$\delta S = \frac{\alpha}{M_{Pl}^2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} \quad (2.21)$$

где  $R^{\lambda\rho}$  — тензор Риччи,  $\alpha$  — безразмерная константа, а множитель  $M_{Pl}^{-2}$  включён из размерных соображений. Однако слагаемые типа (2.21) пренебрежимо малы по сравнению с (2.20), если кривизна пространства-времени мала по сравнению с планковским значением,  $|R_{\mu\nu}| \ll M_{Pl}$ , а константа  $\alpha$  не слишком велика. Поэтому на всех этапах классической эволюции Вселенной, когда её параметры далеки от планковских, фотоны можно описывать действием (2.20) (если, конечно, можно пренебречь взаимодействием фотонов с веществом).

Рассмотрим свободное распространение фотона в однородной изотропной Вселенной, и ограничимся случаем, когда длина волны фотона много меньше радиуса пространственной кривизны (если Вселенная — открытая или замкнутая). Тогда Вселенную можно считать пространственно-плоской и использовать метрику

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j . \quad (2.22)$$

Удобно ввести вместо временной координаты  $t$  конформное время  $\eta$ , такое что

$$dt = a d\eta , \quad (2.23)$$

т.е.

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} .$$

В терминах новой временной координаты метрика имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j] . \quad (2.24)$$

Иными словами

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \eta_{\mu\nu} , \quad (2.25)$$

где  $\eta_{\mu\nu}$  — метрика Минковского. В связи с тем, что метрика (2.25) отличается от плоской метрики только общим растяжением (зависящим от времени), говорят, что в координатах  $(\eta, x^i)$  метрика имеет конформно-плоский вид. В этих координатах имеем

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \frac{1}{a^2} \eta^{\mu\nu} , \\ \sqrt{-g} &= a^4 . \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (2.20), получим, что в координатах  $(\eta, x^i)$  действие электромагнитного поля совпадает с действием в плоском пространстве-времени:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} . \quad (2.26)$$

Такое свойство характерно именно для безмассовых векторных полей; для других полей действие в конформных координатах  $(\eta, x^i)$  к “плоскому” действию, вообще

говоря, не сводится. В связи с этим говорят, что свободное электромагнитное поле — это конформное поле, а другие поля конформными, вообще говоря, не являются.

Из (2.26) сразу следует, что решения уравнений свободного электромагнитного поля во Вселенной с метрикой (2.22) (или, что то же самое, с метрикой (2.24)) являются суперпозициями плоских волн

$$A_{\mu}^{(\alpha)} = e_{\mu}^{(\alpha)} e^{ik\eta - i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

где  $\mathbf{k}$  — постоянный вектор (вектор координатного импульса),  $k = |\mathbf{k}|$ , а  $e_{\mu}^{(\alpha)}$  — обычные вектора поляризации фотона,  $\alpha = 1, 2$ . Подчеркнем, что  $\mathbf{k}$  не является физическим импульсом фотона, а  $k$  не является физической частотой, поскольку  $d\mathbf{x}$  и  $d\eta$  не совпадают с физическими расстояниями и промежутками времени. Величина  $\Delta x = 2\pi/k$  — это координатная длина волны фотона; физическая же длина волны фотона в момент времени  $t$  равна в соответствии с (2.22)

$$\lambda(t) = a(t)\Delta x = 2\pi \frac{a(t)}{k}. \quad (2.27)$$

Аналогично,  $\Delta\eta = 2\pi/k$  — это период электромагнитной волны в конформном времени, а период волны в физическом времени<sup>2</sup>  $t$  равен, в соответствии с (2.23),

$$T = a(t)\Delta\eta = 2\pi \frac{a(t)}{k}. \quad (2.28)$$

Таким образом, физический импульс  $\mathbf{p}$  и физическая частота фотона в момент времени  $t$  равны

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{k}}{a(t)}, \quad \omega(t) = \frac{k}{a(t)}. \quad (2.29)$$

В расширяющейся Вселенной  $a(t)$  растёт со временем, физическая длина волны фотона (2.27) соответственно растёт, а его физические частота и импульс уменьшаются — фотон испытывает красное смещение. Если фотон был испущен с определённой длиной волны  $\lambda_i$  в момент времени  $t_i$  (например, в результате перехода атома водорода с возбуждённого на основной уровень), то на Земле он будет наблюдаться с длиной волны

$$\lambda_0 = \lambda_i \frac{a_0}{a(t_i)} \equiv \lambda_i(1 + z(t_i)). \quad (2.30)$$

Как обычно, индекс 0 относится к величинам в настоящий момент времени.

Величина

$$z(t) = \frac{a_0}{a(t)} - 1 \quad (2.31)$$

называется красным смещением. Чем дальше от нас объект, излучающий фотоны, тем дольше эти фотоны летят по Вселенной и тем меньшее значение имеет  $a(t_i)$  — более отдалённые объекты имеют большее красное смещение. Красное смещение объекта — непосредственно измеримая величина: её измерение сводится к идентификации линии или системы линий излучения (или поглощения) атомов и определению того, насколько они смещены в область длинных волн, см. Главу 1.

---

<sup>2</sup>Отметим, что здесь мы предполагаем, что период  $T$  значительно меньше характерного времени изменения масштабного фактора  $a(t)$ . Это предположение, конечно, прекрасно выполняется в современной Вселенной.

Подчеркнём, что формулы (2.30) и (2.31) имеют общий характер и справедливы при любых  $z$ .

Для не слишком далёких объектов разность  $(t_0 - t_i)$  — время хода фотонов — не слишком велика, и можно записать

$$a(t_i) = a_0 - \dot{a}(t_0)(t_0 - t_i)$$

(здесь и далее точка обозначает производную по времени). В терминах параметра Хаббла

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}(t)$$

и его современного значения

$$H_0 = H(t_0)$$

получим

$$a(t_i) = a_0[1 - H_0(t_0 - t_i)] .$$

Поэтому в линейном порядке по  $(t_0 - t_i)$  справедливо

$$z(t_i) = H_0(t_0 - t_i) .$$

Наконец, время хода равно расстоянию до объекта, с точностью до поправок порядка  $(t_0 - t_i)^2$ ,

$$r = t_0 - t_i .$$

Отсюда имеем закон Хаббла

$$z = H_0 r , \quad z \ll 1 . \quad (2.32)$$

При его выводе мы считали, что  $(t_0 - t_i)$  невелико; это соответствует небольшим красным смещениям, что и отмечено в формуле (2.32).

Параметр Хаббла  $H_0$  — один из фундаментальных космологических параметров, характеризующих современную Вселенную. Его измерение связано с довольно деликатной задачей измерения абсолютного расстояния до объектов во Вселенной, что уже обсуждалось во Введении. Принято использовать параметризацию

$$H_0 = h \cdot 100 \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} , \quad (2.33)$$

где  $h$  — безразмерная величина. Измерения дают

$$h = 0.73_{-0.03}^{+0.04} , \quad (2.34)$$

так что

$$H_0 = (73_{-3}^{+4}) \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}} \quad (2.35)$$

В дальнейшем для оценок мы будем использовать центральное значение  $h = 0.7$ , если не оговорено противное.

Как мы упоминали во Введении, с параметром  $H_0$  связаны характерные масштабы времени и расстояния

$$H_0^{-1} = h^{-1} \cdot 1.0 \cdot 10^{10} \text{ лет} \quad (2.36)$$

$$= h^{-1} \cdot 3000 \text{ Мпк} \quad (2.37)$$

Для  $h = 0.7$  имеем

$$H_0^{-1} = 1.4 \cdot 10^{10} \text{ лет} \quad (2.38)$$

$$= 4300 \text{ Мпк} \quad (2.39)$$

Мы увидим, что эти величины дают грубую оценку возраста Вселенной и размера её наблюдаемой части.

В заключение этого раздела сделаем следующее замечание. Наш вывод формул (2.27), (2.28), (2.29) и, соответственно, (2.30) основывался на том, что свободное электромагнитное поле является конформным, т.е. в координатах  $(\eta, x^i)$  его действие сводится к действию в плоском пространстве-времени. Однако, эти формулы имеют более общий характер и справедливы для любых безмассовых частиц.

Рассмотрим, например, безмассовое скалярное поле с действием

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (2.40)$$

В конформных координатах  $(\eta, x^i)$  явный вид действия в пространстве-времени с метрикой (2.24) — это

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x d\eta a^2(\eta) \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (2.41)$$

Скалярное поле с действием (2.40) не является конформным: действие (2.41) не сводится к плоскому заменой переменных. Из (2.41) варьированием по  $\phi$  получим уравнение для безмассового скалярного поля в метрике (2.24)

$$\frac{1}{a^2} \partial_\eta (a^2 \partial_\eta \phi) - \partial_i \partial_i \phi = 0. \quad (2.42)$$

(суммирование по  $i = 1, 2, 3$  подразумевается, так что  $\partial_i \partial_i$  — это лапласиан в плоском трехмерном пространстве). Заметим, прежде всего, что оператор в левой части этого уравнения — ковариантный даламбертиан — не зависит от  $x^i$ , поэтому решение можно искать в виде разложения по трёхмерным плоским волнам

$$\phi = \frac{1}{a(\eta)} f(\eta) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

Множитель  $a^{-1}(\eta)$  выделен для удобства: с его учетом получаем, что уравнение (2.42) приводится к уравнению для  $f(\eta)$ , не содержащему первой производной по времени:

$$\partial_\eta^2 f - \frac{\partial_\eta^2 a}{a} f + \mathbf{k}^2 f = 0. \quad (2.43)$$

Если темп расширения Вселенной и его производная по времени невелики по сравнению с частотой безмассовой скалярной частицы, то вторым слагаемым в уравнении (2.43) можно пренебречь, поэтому решением уравнения (2.43) является  $f = e^{ik\eta}$ , а решения для скалярного поля — это линейные суперпозиции плоских волн

$$\phi = \frac{1}{a(\eta)} e^{ik\eta - i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (2.44)$$

Координатные частота и импульс,  $k$  и  $\mathbf{k}$ , вновь не зависят от времени, что вновь приводит к соотношениям (2.27), (2.28), (2.29), в чём мы и хотели убедиться. Отметим,

что фактор  $a^{-1}(\eta)$  в решении (2.44) компенсирует множитель  $a^2(\eta)$  в лагранжиане (2.40); иначе говоря, для поля  $f(\mathbf{x}, \eta)$ , определённого соотношением

$$\phi(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{a(\eta)} f(\mathbf{x}, \eta)$$

действие (2.40) сводится к “плоскому” действию безмассового скалярного поля с точностью до поправок, содержащих производные масштабного фактора по времени.

- ▷ *Задача 4.* Сформулировать количественно условия, при которых второе слагаемое в уравнении (2.43) мало по сравнению с третьим. Выразить их в терминах физической частоты волны, параметра Хаббла и его производной по физическому времени  $t$ .
- ▷ *Задача 5.* Рассматривая в качестве примера фотоны и безмассовые скалярные частицы (действие (2.20) и (2.40) соответственно) показать, что соотношение (2.31) между красным смещением и масштабными факторами остаётся справедливым и в случаях открытой и замкнутой Вселенной, если длина волны  $\lambda(t)$  мала по сравнению с радиусом пространственной кривизны  $a(t)$  в течение всего движения частицы.

## 2.4 Замедление относительного движения

Уменьшение физического импульса по закону

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{k}}{a(t)}, \quad (2.45)$$

где  $\mathbf{k}$  — не зависящий от времени координатный импульс, характерно и для массивных свободных частиц. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим уравнение геодезической

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0, \quad (2.46)$$

которому подчиняются четырёхскорости свободных частиц

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$$

(см. Приложение А). Заметим сразу, что  $u^i$  — это ещё не физические значения пространственных компонент четырёхскорости: поскольку физические расстояния  $dX^i$  связаны с координатными соотношением

$$dX^i = a(t) dx^i,$$

физические компоненты равны

$$U^i = \frac{dX^i}{ds} = a(t) u^i.$$

Как обычно в релятивистской физике, физические импульсы выражаются через эти компоненты,

$$p^i = m U^i,$$



а обычные скорости

$$v^i = \frac{dX^i}{dt}$$

связаны с  $U^i$  соотношением

$$U^i = \frac{v^i}{\sqrt{1 - v^2}} . \quad (2.47)$$

Действительно, четырёхскорости  $u^\mu$  удовлетворяют соотношению

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1 .$$

В метрике (2.25) оно выглядит следующим образом

$$(u^0)^2 - a^2 u^i u^i = 1$$

(суммирование по  $i$  подразумевается), или

$$\left( \frac{dt}{ds} \right)^2 - (U^i)^2 = 1 .$$

Поэтому

$$v^i = \frac{dX^i}{dt} = \frac{dX^i}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{U^i}{\sqrt{1 + U^2}} ,$$

откуда и следует соотношение (2.47).

Вернёмся к уравнению геодезической (2.46). В метрике (2.22) отличны от нуля только компоненты связности (2.16) и (2.17). Для пространственных компонент уравнения (2.46) (т.е. при  $\mu = i = 1, 2, 3$ ) имеем поэтому

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{0j}^i u^0 u^j + \Gamma_{j0}^i u^j u^0 = 0 ,$$

или

$$\frac{du^i}{ds} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{dt}{ds} u^i = 0 .$$

В терминах физических компонент последнее уравнение имеет вид

$$\frac{dU^i}{dt} = - \frac{\dot{a}}{a} U^i .$$

Поэтому скорости свободных массивных частиц убывают со временем как

$$U^i = \frac{\text{const}}{a(t)} ,$$

т.е. справедлив закон (2.45).

Таким образом, скорости свободных частиц относительно сопутствующей системы отсчета убывают в расширяющейся Вселенной; частицы постепенно “вмораживаются”. В частности, если на ранних этапах эволюции Вселенной частицы были релятивистскими, то на более поздних этапах они становятся нерелятивистскими (разумеется, если их масса отлична от нуля). Такое поведение характерно для нейтрино, если их масса превышает  $10^{-4}$  эВ.

В заключение этого раздела приведём другой вывод соотношения (2.45). Он связан с изучением решений уравнений массивных полей в расширяющейся Вселенной. Рассмотрим, например, действие для массивного скалярного поля

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right).$$

В метрике (2.24) оно имеет вид

$$S = \int d^3x d\eta \left( \frac{1}{2} a^2(\eta) \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{m^2 a^4}{2} \phi^2 \right)$$

Уравнение, получаемое отсюда варьированием по  $\phi$ , — это уравнение Клейна–Гордона в расширяющейся Вселенной (в конформных координатах)

$$\frac{1}{a^2} \partial_\eta (a^2 \partial_\eta \phi) - \partial_i \partial_i \phi + m^2 a^2 \phi = 0. \quad (2.48)$$

В это уравнение вновь пространственные координаты явно не входят, поэтому его решения — это линейные комбинации волн

$$\phi = \frac{1}{a(\eta)} f(\eta) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

где  $\mathbf{k}$  не зависит от времени. Физическая длина волны частицы вновь даётся соотношением (2.27), а её физический импульс — равенством (2.45).

▷ *Задача 6. Показать, что в случае медленного изменения масштабного фактора решением уравнения (2.48) являются линейные комбинации функций вида*

$$\phi = \frac{1}{a(\eta) \sqrt{\Omega(\eta)}} e^{i \int^\eta \Omega(\eta) d\eta} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \cdot (1 + \mathcal{O}(\partial_\eta a))$$

где  $\Omega(\eta) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2 a^2(\eta)}$ . Таким образом, координатная частота (производная показателя экспоненты по конформному времени) равна  $\Omega(\eta)$ , а физическая частота равна

$$\omega(\eta) = \frac{\Omega(\eta)}{a(\eta)} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

как и должно быть в релятивистской физике.

## 2.5 Газы свободных частиц в расширяющейся Вселенной

Рассмотрим, как ведут себя газы невзаимодействующих частиц в однородной изотропной Вселенной. Поскольку речь пойдет о локальных характеристиках типа плотности числа частиц, вновь можно пренебречь пространственной кривизной и выбрать метрику в виде (2.22). Газ частиц можно характеризовать функцией распределения, такой, что  $f(\mathbf{X}, \mathbf{p}) d^3\mathbf{X} d^3\mathbf{p}$  — это число частиц в элементе физического объема  $d^3\mathbf{X}$  в интервале физических импульсов  $d^3\mathbf{p}$ . Функция распределения, вообще

говоря, зависит от времени и не является равновесной (поскольку здесь мы рассматриваем случай, когда частицы не взаимодействуют и, следовательно, не находятся в термодинамическом равновесии). Мы будем рассматривать однородные газы, для которых функция распределения не зависит от координат, а зависит только от импульсов (и времени).

Мы видели в предыдущих разделах, что координатные импульсы свободных частиц  $\mathbf{k}$  не изменяются во времени. Координатный объем  $d^3\mathbf{x}$  также постоянен, поэтому функция распределения, записанная в терминах координатного импульса, не зависит от времени

$$f(k) = \text{const} .$$

Число частиц в элементе сопутствующего фазового объема также не зависит от времени

$$f(k)d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{k} = \text{const}$$

Сопутствующий фазовый объем совпадает с физическим:

$$d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{k} = d^3(a\mathbf{x})d^3\left(\frac{\mathbf{k}}{a}\right) = d^3\mathbf{X}d^3\mathbf{p} .$$

Поэтому функция распределения свободных частиц целиком определяется тем, как “краснеют” импульсы:

$$f(\mathbf{p}, t) = f(a(t)\mathbf{k}) .$$

Если в какой-то момент времени функция распределения известна и равна  $f_i(\mathbf{p})$ , то в последующие времена она равна

$$f(\mathbf{p}, t) = f_i\left(\frac{a(t)}{a_i}\mathbf{p}\right) . \quad (2.49)$$

Разумеется, эта формула годится, вообще говоря, только для свободных частиц.

Мы увидим, что в ранней Вселенной частицы интенсивно взаимодействовали между собой и находились в термодинамическом равновесии. В какой-то момент (для каждого типа частиц — свой) Вселенная расширилась настолько, что плотность и температура в ней стали малы и взаимодействия между частицами прекратились. В момент прекращения взаимодействий частицы имели тепловую функцию распределения, а в дальнейшем она изменялась согласно закону<sup>3</sup> (2.49).

Рассмотрим более подробно предельные случаи. Начнем с безмассовых частиц; наибольший интерес представляют фотоны. В момент, когда они прекращают взаимодействовать с веществом (момент рекомбинации, который мы будем подробно обсуждать в дальнейшем), их функция распределения — планковская, и зависит только от отношения импульса и температуры в этот момент,  $\frac{|\mathbf{p}|}{T_i}$ :

$$f_i(\mathbf{p}) = f_{\text{пл}}\left(\frac{|\mathbf{p}|}{T_i}\right) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{|\mathbf{p}|/T_i} - 1} . \quad (2.50)$$

---

<sup>3</sup>Это утверждение требует уточнения. Оно было бы справедливо в строго однородной изотропной Вселенной. В реальной Вселенной имеются неоднородности плотности, которые в какой-то момент становятся значительными и создают заметные гравитационные потенциалы (галактик, скоплений и т.д.). Для реликтовых фотонов это с хорошей точностью несущественно, но для нерелятивистских частиц весьма важно. Для последних закон (2.49) справедлив только на достаточно ранних стадиях, когда неоднородности плотности ещё малы.

Для безмассовых фермионов это была бы функция Ферми–Дирака с нулевой массой (см. Главу 5), которая тоже зависит только от отношения  $\frac{|\mathbf{p}|}{T_i}$ . В последующие времена, согласно (2.49), функция распределения равна

$$f(\mathbf{p}, t) = f_{\text{пл}} \left( \frac{a(t)|\mathbf{p}|}{a_i T_i} \right) = f_{\text{пл}} \left( \frac{|\mathbf{p}|}{T_{\text{eff}}(t)} \right),$$

где

$$T_{\text{eff}}(t) = \frac{a_i}{a(t)} T_i. \quad (2.51)$$

Таким образом, функция распределения всегда имеет равновесную форму, несмотря на то, что фотоны не находятся в термодинамическом равновесии. Из (2.51) видно, что реликтовые фотоны имеют планковский спектр с (эффективной) температурой, убывающей с течением времени по закону

$$T_{\text{eff}}(t) \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (2.52)$$

Отметим, что так же (с некоторыми оговорками) ведёт себя температура в ранней Вселенной, когда имеется термодинамическое равновесие фотонов с веществом (мы увидим это в дальнейшем).

Разумеется, соотношение (2.52) справедливо и для других безмассовых частиц, включая фермионы (если в природе действительно имеются безмассовые частицы, помимо фотонов и гравитонов). Существенно, что эффективная температура таких частиц падает по закону (2.52) начиная с того момента, когда эти частицы выходят из термодинамического равновесия с остальным веществом. В более поздние времена их температура может не совпадать с температурой фотонов. Мы столкнемся с этой ситуацией в Главе 7. Если частицы имеют малую, но ненулевую массу  $m$  и в момент “закалки” (прекращения взаимодействий между собой и с другими частицами и выхода из термодинамического равновесия) были ультрарелятивистскими, их спектр остаётся тепловым, а эффективная температура падает как  $a^{-1}(t)$  до тех пор пока  $T_{\text{eff}} \gg m$ . В более поздние времена спектр этих частиц тепловым не является. Действительно, функция распределения всё время остается планковской (если эти частицы — бозоны), т.е. имеет вид (2.50) с температурой  $T_{\text{eff}}(t)$ , в то время как при  $T_{\text{eff}} \ll m$  равновесное распределение — это распределение Максвелла–Больцмана. Такие реликтовые частицы называют “горячей тёмной материей”; “горячая” она в том смысле, что частицы отщепляются будучи ультрарелятивистскими, и все время характеризуются безмассовой функцией распределения<sup>4</sup>. Важный пример таких частиц — реликтовые нейтрино.

Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда частицы отщепляются (перестают взаимодействовать), будучи нерелятивистскими. В момент закалки они характеризуются больцмановской функцией распределения (см. Главу 5)

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp \left( -\frac{m - \mu_i}{T_i} \right) \exp \left( -\frac{\mathbf{p}^2}{2mT_i} \right),$$

где  $T_i$  и  $\mu_i$  — температура и химический потенциал в этот момент. Согласно (2.49), функция распределения в последующие времена равна

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp \left( -\frac{m - \mu_i}{T_i} \right) \exp \left( -\frac{a^2(t)\mathbf{p}^2}{2ma_i^2 T_i} \right).$$

---

<sup>4</sup>Это же свойство имеет “тёплая” тёмная материя; по поводу различия между горячей и тёплой тёмной материей см. раздел 9.1.

Её снова можно представить в больцмановском виде

$$f(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2\pi^3} \exp\left(-\frac{m - \mu_{eff}}{T_{eff}}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2mT_{eff}}\right), \quad (2.53)$$

где

$$T_{eff}(t) = \left(\frac{a_i}{a(t)}\right)^2 T_i,$$

а эффективный химический потенциал определяется из соотношения

$$\frac{m - \mu_{eff}(t)}{T_{eff}} = \frac{m - \mu_i}{T_i}.$$

Равенство (2.53) означает, что функция распределения по-прежнему имеет равновесный вид<sup>5</sup> (хотя частицы в термодинамическом равновесии не находятся), а эффективная температура падает со временем как

$$T_{eff}(t) \propto \frac{1}{a^2(t)}$$

и убывает быстрее, чем в случае безмассовых частиц. Частицы, которые в момент заковки были нерелятивистскими, называют “холодной тёмной материей”. Как мы упоминали во Введении, холодная тёмная материя, состоящая, по-видимому, из неизвестных стабильных частиц, составляет бóльшую часть вещества во Вселенной, а её плотность энергии (массы) составляет сегодня около 20% полной плотности энергии.

---

<sup>5</sup>См. сноску 3 в этой главе.

## Глава 3

# Динамика расширения Вселенной

### 3.1 Уравнение Фридмана

Закон расширения Вселенной, т.е. зависимость масштабного фактора  $a$  от времени, определяется уравнениями Эйнштейна (см. Приложение А),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} .$$

Найдём их явный вид для однородной изотропной метрики (2.13). Начнём с вычисления тензора Риччи. Имеем по определению

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma . \quad (3.1)$$

Отличные от нуля компоненты символов Кристоффеля даются формулами (2.16), (2.17) и (2.18). Из них, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\mu}^\mu &= \frac{\dot{a}}{a} \delta_i^i = 3 \frac{\dot{a}}{a} , \\ \Gamma_{i\mu}^\mu &= {}^{(3)}\Gamma_{ij}^j . \end{aligned}$$

Вычислим сначала  $R_{00}$ . Поскольку  $\Gamma_{00}^\mu = 0$ , вклад дают только второе и четвертое слагаемые в (3.1), и мы получаем

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda - \Gamma_{0\sigma}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^\sigma = -\partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda - \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j \\ &= -\partial_0 \left( 3 \frac{\dot{a}}{a} \right) - \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \delta_j^i \delta_i^j = -3\partial_0 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 . \end{aligned}$$

Окончательно

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} . \quad (3.2)$$

Обратимся теперь к смешанным компонентам  $R_{0i}$ . Учитывая в (3.1) только ненулевые символы Кристоффеля, запишем

$$R_{0i} = \partial_j \Gamma_{0i}^j - \partial_0 \Gamma_{i\lambda}^\lambda + \Gamma_{0i}^j \Gamma_{j\lambda}^\lambda - \Gamma_{0j}^k \Gamma_{ik}^j . \quad (3.3)$$

Это выражение в действительности равно нулю, поскольку  $\Gamma_{0i}^j$  не зависят от пространственных координат,  $\Gamma_{i\lambda}^\lambda = {}^{(3)}\Gamma_{ij}^j$  вычисляются по статической метрике  $\gamma_{ij}$  и не

зависят от времени, а  $\Gamma_{0k}^j \propto \delta_k^j$ , что приводит к сокращению двух последних слагаемых в (3.3). Итак,

$$R_{0i} = 0 . \quad (3.4)$$

Этого и следовало ожидать, поскольку  $R_{0i}$  преобразуются как компоненты трёхвектора относительно трёхмерных вращений, а в изотропном пространстве выделенного вектора нет.

Вычислим, наконец, пространственные компоненты  $R_{ij}$ . Вновь сохраним только ненулевые символы Кристоффеля в (3.1) и запишем

$$\begin{aligned} R_{ij} &= (\partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \partial_k \Gamma_{ij}^k) - \partial_i \Gamma_{j\lambda}^\lambda \\ &+ (\Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\sigma}^\sigma) \\ &- (\Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k + \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l) , \end{aligned} \quad (3.5)$$

где в скобках собраны слагаемые, возникающие из каждого из четырёх членов в (3.1). Учитывая (2.18), соберём слагаемые в (3.5), содержащие только пространственные индексы, в тензор Риччи  ${}^{(3)}R_{ij}$ , вычисленный по трёхмерной метрике  $\gamma_{ij}$ . Остальные четыре слагаемых вычисляются непосредственно, и мы получаем

$$R_{ij} = \partial_0(\dot{a})\gamma_{ij} + \dot{a}a\gamma_{ij} \cdot 3\frac{\dot{a}}{a} - \dot{a}a\gamma_{ik} \cdot \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^k - \frac{\dot{a}}{a}\delta_i^k \dot{a}a\gamma_{jk} + {}^{(3)}R_{ij} .$$

Окончательно, имеем выражение

$$R_{ij} = (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2\kappa)\gamma_{ij} , \quad (3.6)$$

где мы воспользовались соотношением (2.9).

Используем теперь формулы (3.2), (3.4) и (3.6), чтобы найти скалярную кривизну

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} = R_{00} - \frac{1}{a^2} \gamma^{ij} R_{ij} .$$

Поскольку  $\gamma^{ij}\gamma_{ij} = 3$ , имеем

$$R = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right) .$$

В результате (00)-компонента левой части уравнений Эйнштейна имеет простой вид

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right) .$$

Другие компоненты уравнений Эйнштейна нам не понадобятся (см., однако, задачу в этом разделе).

Обратимся теперь к правой части уравнений Эйнштейна. На интересующих нас здесь этапах эволюции Вселенной пригодно макроскопическое описание вещества: его можно считать однородной "жидкостью" с плотностью энергии  $\rho(t)$  и давлением  $p(t)$ . В среднем вещество покоится в сопутствующей системе отсчета, поэтому единственная отличная от нуля компонента четырёхскорости — это  $u^0$ , причём в силу соотношения  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$  имеем

$$u^0 = 1 , \quad u_0 = 1 .$$

Следовательно, (00)-компонента тензора энергии-импульса равна (см. Приложение А)

$$T_{00} = (p + \rho)u_0u_0 - g_{00}p = \rho .$$

Итак, (00)-компонента уравнений Эйнштейна в однородной изотропной Вселенной имеет вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{\varkappa}{a^2} . \quad (3.7)$$

Это уравнение называют уравнением Фридмана; оно связывает темп расширения Вселенной (а именно, параметр Хаббла  $H = \dot{a}/a$ ) с плотностью энергии материи  $\rho$  и пространственной кривизной.

Уравнение Фридмана необходимо дополнить ещё одним уравнением, поскольку в уравнении (3.7) содержатся две неизвестные функции времени  $a(t)$  и  $\rho(t)$ . Для получения дополнительного уравнения удобно рассмотреть условие ковариантного сохранения тензора энергии-импульса вещества (см. Приложение А)

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 .$$

Полагая здесь  $\nu = 0$ , будем иметь

$$\nabla_\mu T^{\mu 0} \equiv \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu T^{\sigma 0} + \Gamma_{\mu\sigma}^0 T^{\mu\sigma} = 0 . \quad (3.8)$$

Ненулевые компоненты тензора энергии-импульса в сопутствующей системе отсчёта равны

$$T^{00} = g^{00}g^{00}T_{00} = \rho , \quad (3.9)$$

$$T^{ij} = g^{ik}g^{jl}T_{kl} = g^{ik}g^{jl}(-g_{kl}p) = \frac{1}{a^2}\gamma^{ij}p , \quad (3.10)$$

Здесь мы воспользовались тем, что пространственные компоненты четырёхскорости равны нулю в сопутствующей системе отсчёта, так что  $T_{ij} = (p + \rho)u_iu_j - pg_{ij} = -pg_{ij}$ . В формуле (3.10) величины  $\gamma^{ij}$  — это не зависящие от времени компоненты матрицы, обратной  $\gamma_{ij}$ . Вновь воспользуемся выражениями для ненулевых компонент символов Кристоффеля (2.16), (2.17), (2.18) и запишем уравнение (3.8) в явном виде

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 . \quad (3.11)$$

Для замыкания системы уравнений, определяющих динамику эволюции однородной изотропной Вселенной, необходимо задать ещё уравнение состояния материи

$$p = p(\rho) . \quad (3.12)$$

Последнее уравнение не является следствием уравнений общей теории относительности, а определяется тем, какое вещество присутствует во Вселенной. Например, для нерелятивистских частиц  $p = 0$ , для газа ультрарелятивистских частиц  $p = \frac{1}{3}\rho$ , а для вакуума  $p = -\rho$ , см. раздел 3.2.

▷ *Задача 1. Найти уравнение состояния в модели скалярного поля с лагранжианом*

$$\mathcal{L} = -V_0\sqrt{1 - \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi} , \quad V_0 > 0 ,$$

*считая, что поле  $\phi$  является классическим и пространственно однородным (зависит только от времени).*



Уравнения (3.7), (3.11) и (3.12) полностью определяют динамику расширения Вселенной. Сделаем два замечания по поводу уравнений (3.11) и (3.12). Во-первых, если во Вселенной присутствуют разные типы материи, не взаимодействующие между собой, то тензор энергии-импульса каждого типа материи независимо удовлетворяет уравнению ковариантного сохранения. Поэтому уравнения (3.11) и (3.12) выполняются в этом случае для каждого типа материи по-отдельности, а плотность энергии  $\rho$ , фигурирующая в уравнении Фридмана (3.7) — это сумма плотностей энергии всех типов материи. Далее, если вещество во Вселенной находится в термодинамическом равновесии, то уравнение (3.11) допускает простую интерпретацию. Его можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{p + \rho} = -3d(\ln a) . \quad (3.13)$$

Левая часть этого соотношения совпадает с  $d(\ln s)$ , где  $s$  — плотность энтропии, см. Главу 5. Поэтому уравнение (3.11) сводится к соотношению

$$sa^3 = \text{const} ,$$

которое означает сохранение энтропии в сопутствующем объёме. Иными словами, при расширении Вселенной плотность энтропии падает из-за растяжения пространства, как элемент пространственного объёма

$$s = \frac{\text{const}}{a^3} .$$

В заключение этого раздела отметим, что для получения уравнений эволюции Вселенной мы использовали только одно из уравнений Эйнштейна,  $R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 8\pi GT_{00}$ , и только одно из условий ковариантного сохранения тензора энергии-импульса,  $\nabla_\mu T^{\mu 0} = 0$ . Можно показать, однако, что остальные уравнения Эйнштейна и условия ковариантного сохранения тензора энергии-импульса выполняются тождественно на решениях уравнений (3.7) и (3.11).

▷ *Задача 2. Показать, что уравнения*

$$\begin{aligned} R_{0i} - \frac{1}{2}g_{0i}R &= 8\pi GT_{0i} , \\ R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R &= 8\pi GT_{ij} , \\ \nabla_\mu T^{\mu i} &= 0 , \end{aligned}$$

*удовлетворяются тождественно для однородной изотропной Вселенной, если выполнены уравнения*

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= 8\pi GT_{00} , \\ \nabla_\mu T^{\mu 0} &= 0 . \end{aligned}$$

При этом не обязательно предполагать, что Вселенная заполнена покоящейся "жидкостью", как мы делали в этом разделе. Существенно лишь, что материя однородна и изотропна.

## 3.2 Примеры космологических решений. Возраст Вселенной. Космологический горизонт

Прежде чем обсуждать реалистическую модель Вселенной, рассмотрим несколько примеров космологических решений. В этом разделе мы будем рассматривать пространственно-плоскую модель

$$\varkappa = 0.$$

В действительности это очень хорошее приближение: как мы увидим в дальнейшем, слагаемое  $\varkappa/a^2$  в уравнении Фридмана (3.7) мало по сравнению с первым членом в правой части как в современную эпоху, так и на ранних стадиях. Мы будем обсуждать более сложные решения, включая решения с  $\varkappa \neq 0$ , на протяжении этой книги.

В случае пространственно-плоской модели уравнение Фридмана приобретает вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho. \quad (3.14)$$

Простые решения, описанные в этом разделе, получаются, если считать, что Вселенная заполнена одним типом материи. Тогда уравнения (3.11), (3.12) (или, что то же самое, (3.13) и (3.12)) позволяют найти зависимость плотности энергии от масштабного фактора,  $\rho(a)$ , после чего зависимость масштабного фактора от времени может быть найдена из уравнения (3.14). Напомним (см. раздел 2.2), что в пространственно-плоской Вселенной физический смысл имеет лишь отношение масштабных факторов в разные моменты времени, а не сам масштабный фактор. Поэтому следует ожидать, что решение  $a(t)$  будет определяться с точностью до произвольного множителя. Кроме того, уравнения (3.14) и (3.11) инвариантны относительно сдвига времени, поэтому в решении будет фигурировать еще одна произвольная постоянная — "начало отсчёта времени".

### 3.2.1 Нерелятивистское вещество ("пыль")

Начнём с модели, в которой Вселенная заполнена нерелятивистским веществом, для которого

$$p = 0.$$

Из уравнения (3.13) получим

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^3} \quad (3.15)$$

Здесь и далее в этом разделе  $\text{const}$  обозначает произвольную постоянную (вообще говоря, разную в разных формулах). Соотношение (3.15) имеет простую интерпретацию: плотность числа частиц  $n$  убывает в соответствии с изменением сопутствующего объёма, так что  $a^3 n = \text{const}$ , и полное число частиц сохраняется. Поскольку плотность энергии равна  $\rho = mn$ , где  $m$  — масса частицы, то она ведёт себя так же, как  $n$ , т.е.  $\rho a^3 = \text{const}$ .

С учётом (3.15) уравнение (3.14) принимает вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\text{const}}{a^3}$$

и имеет решение

$$a(t) = \text{const} \cdot (t - t_s)^{2/3}, \quad (3.16)$$

где  $t_s$  — произвольная постоянная. Вселенная расширяется, причём расширение замедляется со временем,  $\ddot{a} < 0$ . Плотность энергии ведёт себя как

$$\rho(t) = \frac{\text{const}}{(t - t_s)^2}. \quad (3.17)$$

Решение (3.16), (3.17) сингулярно при  $t = t_s$ : в этот момент масштабный фактор обращается в нуль (все расстояния бесконечно малы), а плотность энергии бесконечна. Это — пример космологической сингулярности, момент "Большого взрыва". Разумеется, экстраполировать законы классической физики назад во времени вплоть до момента Большого взрыва, да ещё с пылевидным уравнением состояния  $p = 0$ , незаконно. Тем не менее, мы увидим, что и многие другие классические космологические решения начинаются с сингулярности. Вполне возможно, что эволюция нашей Вселенной началась с состояния, в котором плотность энергии была очень велика (сравнима с планковской плотностью энергии  $\rho_{Pl} \sim M_{Pl}^4 \sim 10^{76} \text{ ГэВ}^4$ ), а законы классической физики были неприменимы.

В дальнейшем для решений с космологической сингулярностью мы будем отсчитывать время с момента сингулярности. Для решения (3.16), (3.17) это соответствует

$$t_s = 0.$$

Тогда  $t$  — это возраст Вселенной. С помощью (3.16) его можно связать со значением параметра Хаббла

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}(t) = \frac{2}{3t}. \quad (3.18)$$

Используя еще раз уравнение (3.14) получим

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} H^2 = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}. \quad (3.19)$$

Соотношения (3.18) и (3.19) связывают физические величины, и в них нет произвольных постоянных.

Если бы в течение большей части эволюции нашей Вселенной её расширение определялось нерелятивистской материей, то её современный возраст определялся бы формулой (3.18),

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \quad (3.20)$$

Используя значения (2.36), (2.38), мы бы получили

$$\begin{aligned} t_0 &= h^{-1} \cdot 0.65 \cdot 10^{10} \text{ лет} \\ &= 0.93 \cdot 10^{10} \text{ лет} \quad (h = 0.7) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Это значение, даже с учётом неопределённости в измерении  $H_0$  (см. (2.35)), противоречило бы достаточно надёжным независимым ограничениям на возраст Вселенной,  $t_0 \geq 1.4 \cdot 10^{10}$  лет, о которых мы упоминали во Введении. Мы увидим, что ситуация улучшается, если расширение Вселенной определяется сегодня в значительной степени тёмной энергией.

Рассмотрим на примере решения (3.16) ещё одно важное понятие — космологический горизонт. Представим себе, что в момент Большого взрыва из каждой точки пространства испущены сигналы, которые затем распространяются со скоростью света. Нас интересует расстояние  $l_H(t)$ , на которое такой сигнал удалится от точки своего излучения к тому моменту, когда возраст Вселенной станет равным  $t$ . Физический смысл  $l_H(t)$  — это размер причинно связанной области на момент  $t$ : наблюдатель в момент  $t$  в принципе не может знать, что происходит за пределами сферы радиуса  $l_H(t)$ . Эту сферу называют космологическим горизонтом, а  $l_H(t)$  — размером космологического горизонта в момент  $t$  или размером наблюдаемой части Вселенной. Ясно, что  $l_H$  растёт со временем; горизонт расширяется.

Для вычисления  $l_H(t)$  удобно воспользоваться конформным временем  $\eta$ , см. раздел 2.3. В метрике (2.24) светоподобные геодезические, удовлетворяющие  $ds^2 = 0$ , описываются уравнением

$$|d\mathbf{x}| = d\eta .$$

Поэтому координатный размер горизонта на момент времени  $t$  равен  $\eta(t)$ , а его физический размер — это

$$l_H(t) = a(t)\eta(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \quad (3.22)$$

Для решения (3.16) имеем

$$l_H(t) = 3t = \frac{2}{H(t)} . \quad (3.23)$$

Если бы материя в нашей Вселенной описывалась нерелятивистским уравнением состояния  $p = 0$ , то размер горизонта сегодня был бы равен

$$l_{H,0} = \frac{2}{H_0} .$$

Из (2.37) и (2.39) имеем численно

$$\begin{aligned} l_{H,0} &= h^{-1} \cdot 6000 \text{ Мпк} \\ &= 0.86 \cdot 10^4 \text{ Мпк} = 2.7 \cdot 10^{28} \text{ см} \quad (h = 0.7) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Еще одно свойство горизонта сформулировано в следующей задаче.

▷ *Задача 3. Показать, что сигналы, испущенные с расстояния  $l_H(t)$ , приходят к наблюдателю в момент времени  $t$  с бесконечным красным смещением.*

Таким образом, в моделях с космологическим горизонтом область Вселенной, в принципе доступная нашему изучению, имеет конечный размер, даже если сама Вселенная бесконечна.

### 3.2.2 Ультрарелятивистское вещество (“радиация”)

Если плотность энергии во Вселенной обусловлена ультрарелятивистским веществом, то уравнение состояния имеет вид (см. Главу 5)

$$p = \frac{1}{3}\rho .$$

В этом случае уравнение (3.13) даёт

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^4} \quad (3.25)$$

Отличие этого поведения от (3.15) связано с тем, что с расширением Вселенной уменьшается не только плотность числа частиц ( $n \propto a^{-3}$ ), но и энергия каждой частицы ( $\omega \propto a^{-1}$ , ср. (2.29)).

Уравнение (3.14) превращается в

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\text{const}}{a^4}$$

и имеет решение

$$a(t) = \text{const} \cdot t^{1/2}$$

(мы вновь полагаем постоянную  $t_s$  равной нулю). Свойства этого решения аналогичны свойствам решения (3.16), (3.17): Вселенная расширяется с замедлением;  $t = 0$  соответствует космологической сингулярности; время жизни обратно пропорционально параметру Хаббла (ср. (3.18))

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} ,$$

а плотность энергии обратно пропорциональна квадрату возраста (ср. (3.19)),

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} H^2 = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2} .$$

Размер горизонта вновь конечен и равен

$$l_H = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = 2t = \frac{1}{H(t)} . \quad (3.26)$$

Полезно связать темп расширения Вселенной (параметр Хаббла) с температурой (в предположении термодинамического равновесия всех типов ультрарелятивистских частиц и в пренебрежении химическими потенциалами). При температуре  $T$  каждый тип ультрарелятивистских бозонов  $b$  вносит вклад в плотность энергии, равный (см. Главу 5)

$$\rho_b = \frac{\pi^2}{30} g_b T^4 ,$$

где  $g_b$  — число спиновых степеней свободы бозона  $b$  (например, для фотона  $g_\gamma = 2$  в соответствии с числом поляризаций, для нейтральной скалярной частицы  $g = 1$ , а для  $Z^0$ -бозона при  $T \gg m_Z$  имеем  $g_Z = 3$ , поскольку  $Z^0$ -бозон имеет две поперечных и одну продольную поляризации). Вклад каждого фермиона равен

$$\rho_f = \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_f T^4 .$$

Полная плотность энергии — это сумма вкладов всех типов частиц, которые являются ультрарелятивистскими при данной температуре:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 , \quad (3.27)$$

где

$$g_* = \sum_b g_b + \frac{7}{8} \sum_f g_f$$

— эффективное число ультрарелятивистских степеней свободы. С учётом того, что  $G = M_{Pl}^{-2}$  (см. раздел 1.1), соотношение (3.14) может быть записано в виде

$$H = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}, \quad (3.28)$$

где

$$M_{Pl}^* = \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g_*}} M_{Pl} = \frac{1}{1.66\sqrt{g_*}} M_{Pl}. \quad (3.29)$$

Мы неоднократно будем пользоваться соотношением (3.28), имея, конечно, в виду, что параметр  $M_{Pl}^*$  зависит от эффективного числа степеней свободы  $g_*$  и, следовательно, от температуры (поскольку частицы массы  $m$  дают вклад в  $g_*$  только при  $T \gg m$ ). Эта зависимость, однако, достаточно слабая, и при описании физики ранней Вселенной на определённых этапах ее эволюции, как правило, можно считать  $M_{Pl}^*$  постоянной.

Сравнивая соотношения (3.25) и (3.27), мы видим, что в термодинамическом равновесии температура обратно пропорциональна масштабному фактору (с точностью до слабо меняющегося множителя, зависящего от  $g_*$ ),

$$T(t) \approx \frac{\text{const}}{a(t)}. \quad (3.30)$$

Напомним, что такое же соотношение (которое в этом случае является точным) справедливо и для эффективной температуры газа ультрарелятивистских невзаимодействующих частиц, не находящихся в термодинамическом равновесии, см. раздел 2.5. Наконец, полезно отметить, что из (3.30) и (3.28) следует, что

$$\frac{\dot{T}}{T} \approx -\frac{\dot{T}^2}{M_{Pl}^*}. \quad (3.31)$$

Последние два соотношения, (3.30) и (3.31), являются точными в периоды эволюции Вселенной, на протяжении которых эффективное число степеней свободы  $g_*$  не меняется.

### 3.2.3 Вакуум

В плоском пространстве-времени вакуум выглядит одинаково во всех инерциальных системах отсчёта. Вообще говоря, он может иметь ненулевую плотность энергии, и из соображений симметрии его тензор энергии-импульса в плоском случае имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \rho_{vac} \eta_{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

При этом плотность энергии вакуума равна  $T_{00} = \rho_{vac}$ , а давление, определяемое согласно  $T_{ij} = -p\eta_{ij}$ , равно

$$p = -\rho_{vac}.$$

Итак, вакуум характеризуется весьма необычным уравнением состояния  $p = -\rho$ ; давление вакуума отрицательно.

Если кривизна пространства-времени невелика, то выражение (3.32) справедливо в любой локально-лоренцевой системе отсчёта, а в произвольной системе отсчёта

$$T_{\mu\nu} = \rho_{vac} g_{\mu\nu} . \quad (3.33)$$

При этом  $\rho_{vac}$  — постоянная в пространстве и времени величина, которая в принципе должна вычисляться в фундаментальной теории элементарных частиц и их взаимодействий. До сих пор сколько-нибудь надёжное вычисление плотности энергии вакуума отсутствует, и это — одна из главных проблем фундаментальной физики.

Постоянство  $\rho_{vac}$  согласуется с уравнением (3.11), которое при  $p = -\rho$  даёт  $\dot{\rho} = 0$ . Это, впрочем очевидно с самого начала: уравнение (3.11) — это следствие ковариантного сохранения тензора энергии-импульса, а тензор энергии-импульса вида (3.33) ковариантно-постоянен при  $\rho_{vac} = \text{const}$ , поскольку  $\nabla_\mu T^{\lambda\rho} = 0$  в силу ковариантного постоянства метрического тензора,  $\nabla_\mu g^{\lambda\rho} = 0$  (см. Приложение А).

На правую часть уравнений Эйнштейна вида  $T_{\mu\nu} = \text{const} \cdot g_{\mu\nu}$  можно взглянуть с несколько другой стороны. Требование общерелятивистской инвариантности не запрещает добавить к гравитационному действию общей теории относительности

$$S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x$$

ещё одно слагаемое

$$S_\Lambda = -\Lambda \int \sqrt{-g} d^4x .$$

В результате варьирования действия ( $S_G + S_\Lambda$ ) по метрике в отсутствие вещества получатся уравнения (см. Приложение А)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - 8\pi G \Lambda g_{\mu\nu} = 0 .$$

Они в точности совпадают с уравнениями Эйнштейна с тензором энергии-импульса (3.33), если положить  $\Lambda = \rho_{vac}$ . Такой путь был исторически первым, и параметр  $\Lambda$  по историческим причинам часто называют космологической постоянной. Разумеется, различие между космологической постоянной и плотностью энергии вакуума — чисто филологическое (по крайней мере при современном понимании вопроса).

Решение уравнения Фридмана (3.14) с  $\rho = \text{const} = \rho_{vac}$  имеет вид

$$a = \text{const} \cdot e^{H_{ds} t} , \quad (3.34)$$

где параметр Хаббла

$$H_{ds} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G \rho_{vac}}$$

постоянен во времени. Соответствующее пространство-время с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - e^{2H_{ds} t} d\mathbf{x}^2 \quad (3.35)$$

называют пространством де Ситтера<sup>1</sup>. Оно является пространством-временем постоянной кривизны.

---

<sup>1</sup>Координаты  $(t, \mathbf{x})$  покрывают лишь половину пространства де Ситтера, см., например, [13] и задачу в этом разделе.

▷ *Задача 4. Показать, что для пространства де Ситтера выполняется (ср. (2.7))*

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -H_{ds}^2 (g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) .$$

В отличие от предыдущих примеров космологических решений, Вселенная расширяется с ускорением:  $\ddot{a} > 0$ . Более того, пространство де Ситтера не имеет сингулярности: хотя  $a(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow -\infty$ , особенность, присутствующую в метрике при  $t \rightarrow -\infty$ , можно устранить координатным преобразованием.

▷ *Задача 5. Рассмотрим фиктивное плоское пятимерное пространство с метрикой*

$$ds^2 = (dy^0)^2 - (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 - (dy^4)^2 .$$

*Рассмотрим в нём гиперboloид, заданный уравнением*

$$(y^0)^2 - (y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = -H^{-2} = \text{const} .$$

*Очевидно, что этот гиперboloид не имеет сингулярностей. Выберем на этом гиперboloиде координаты  $(t, x^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , такие что*

$$\begin{aligned} y^0 &= -H^{-1} \text{sh } Ht - \frac{H}{2} \mathbf{x}^2 e^{Ht} , \\ y^i &= x^i e^{Ht} , \\ y^4 &= H^{-1} \text{ch } Ht - \frac{H}{2} \mathbf{x}^2 e^{Ht} . \end{aligned} \quad (3.36)$$

*Показать, что при таком выборе координат метрика, индуцированная на гиперboloиде из пятимерного пространства, совпадает с метрикой (3.35).*

*Какую часть гиперboloида покрывают координаты  $(t, \mathbf{x})$ ?*

Для пространства де Ситтера космологический горизонт (иначе его называют горизонтом частиц), аналогичный горизонту, описанному в разделе 3.2.1, отсутствует. Действительно, в пространстве де Ситтера “начало Вселенной” отодвинуто к  $t = -\infty$ , поэтому в отличие от формулы (3.22) размер горизонта теперь даётся выражением

$$l_H(t) = a(t) \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{a(t')} .$$

Из (3.34) получим

$$l_H(t) = e^{H_{ds}t} \int_{-\infty}^t dt' e^{-H_{ds}t'} = \infty ,$$

что и означает отсутствие горизонта.

Для пространства де Ситтера, впрочем, также вводят понятие горизонта, однако оно имеет другой смысл по сравнению с космологическим горизонтом, возникающим в моделях с космологической сингулярностью. А именно, пусть имеется наблюдатель, находящийся в точке  $\mathbf{x} = 0$  в момент времени  $t$ . Зададимся вопросом о том, каков в *этот* момент размер области пространства, из которой испущенные в этот момент сигналы достигнут наблюдателя (все время находящегося в точке  $\mathbf{x} = 0$ ) в сколь угодно далеком *будущем*. Поскольку светоподобные геодезические удовлетворяют  $|d\mathbf{x}| = d\eta$ , координатный размер этой области равен

$$\eta(t \rightarrow \infty) - \eta(t) = \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} ,$$



а физический её размер в момент времени  $t$  равен

$$l_{dS} = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = \frac{1}{H_{dS}} . \quad (3.37)$$

Наблюдатель никогда не узнает о событиях, происходящих в данный момент времени на расстояниях от него, превышающих  $l_{dS} = H_{dS}^{-1}$ ; в этом смысл горизонта де Ситтера. Его ещё называют горизонтом событий.

▷ *Задача 6. Показать, что горизонта событий, аналогичного горизонту де Ситтера, не существует для решений, рассмотренных в разделах 3.2.1 и 3.2.2.*

### 3.2.4 Уравнение состояния $p = w\rho$

Обзор простых космологических решений мы закончим кратким обсуждением модели, в которой материя характеризуется уравнением состояния

$$p = w\rho ,$$

где  $w$  — постоянная, превышающая  $-1$ . Случаи нерелятивистского и ультрарелятивистского вещества соответствуют  $w = 0$  и  $w = 1/3$ . В последнее время рассматриваются довольно экзотические возможности с  $-1 < w < 0$ ; материю с таким эффективным уравнением состояния называют по-разному: квинтэссенция, зависящий от времени  $\Lambda$ -член и т.д.

При

$$w > -1$$

решение уравнения (3.11) имеет вид

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^{3(1+w)}} . \quad (3.38)$$

Из уравнения (3.14) получаем

$$a = \text{const} \cdot t^\alpha ,$$

где

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{1}{1+w} .$$

Параметр  $\alpha$  положителен; Вселенная имеет космологическую сингулярность при  $t = 0$ . Плотность энергии ведёт себя как

$$\rho = \frac{\text{const}}{t^2}$$

и обращается в бесконечность при  $t \rightarrow 0$ . Поскольку

$$\ddot{a} = \text{const} \cdot \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} ,$$

расширение Вселенной замедляется ( $\ddot{a} < 0$ ) при  $\alpha < 1$  и ускоряется при  $\alpha > 1$ . В терминах параметра  $w$  имеем

$$\begin{aligned} (a) \quad w > -\frac{1}{3} & : \text{замедление} \\ (b) \quad w < -\frac{1}{3} & : \text{ускорение} \end{aligned}$$

Отметим, что если бы в правой части уравнения Фридмана (3.7) доминировало слагаемое с пространственной кривизной и  $\varkappa = -1$  (открытая Вселенная), это эффективно соответствовало  $\rho = \text{const}/a^2$  и  $w = -1/3$  (см. (3.38)). Скорость расширения Вселенной при этом не менялась бы со временем,  $\ddot{a} = 0$ .

Указанные только что случаи (а) и (б) различаются ещё и в следующем отношении. В случае (а) в модели имеется космологический горизонт (горизонт частиц), и отсутствует горизонт событий, а в случае (б) — всё наоборот. Действительно, горизонт частиц существует, если сходится интеграл (см. (3.22))

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')}.$$

Для  $\alpha < 1$  (т.е.  $w > -\frac{1}{3}$ ) этот интеграл сходится, а для  $\alpha > 1$  (т.е.  $w < -\frac{1}{3}$ ) он расходится на нижнем пределе; в последнем случае горизонт частиц отодвигается на пространственную бесконечность. Существование же горизонта событий определяется сходимостью интеграла (см. (3.37))

$$\int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')}.$$

Он расходится на верхнем пределе для  $\alpha < 1$  (горизонт событий отсутствует) и сходится для  $\alpha > 1$  (горизонт событий существует).

▷ *Задача 7. Возможно ли в расширяющейся Вселенной с уравнением состояния  $p = p(\rho)$  перейти от эволюции с  $(p + \rho) > 0$  к эволюции с  $(p + \rho) < 0$ , не нарушая условия вещественности скорости звука  $c_s$ , определённой соотношением  $c_s^2 = \partial p / \partial \rho$ ?*

### 3.3 Решения с реколлапсом

Для полноты картины в этом разделе мы кратко обсудим однородные изотропные космологические решения, в которых расширение Вселенной в какой-то момент времени прекращается и сменяется сжатием (*реколлапсом*). Такое происходит, если в правой части уравнения Фридмана (3.7) имеются как положительные, так и отрицательные слагаемые, причём положительные слагаемые быстрее убывают с ростом масштабного фактора по сравнению с отрицательными. Физически интересные примеры возможных отрицательных вкладов — это вклад пространственной кривизны в замкнутой модели ( $\varkappa = +1$ ) и вклад тёмной энергии. По поводу последнего можно сказать, что он положителен на современном этапе эволюции Вселенной, но нельзя исключить, что он зависит от времени и станет отрицательным в далёком будущем.

В качестве примера рассмотрим замкнутую модель Вселенной, заполненной пылевидной материей. С учётом (3.15) уравнение Фридмана имеет вид

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{a_m}{a^3} - \frac{1}{a^2}, \quad (3.39)$$

где постоянная  $a_m$  определяется полной массой вещества во Вселенной. При  $a \ll a_m$  Вселенная расширяется так же, как и в плоском случае (раздел 3.2.1). Расширение прекращается при

$$a = a_m,$$

когда правая часть (3.39) обращается в нуль.

▷ *Задача 8. Найти связь  $a_m$  с полной массой вещества в замкнутой Вселенной.*

*До какого размера расширилась бы Вселенная с 1 кг вещества?*

Явное решение имеет простой вид в терминах конформного времени  $\eta$ , определённого так, что  $dt = a d\eta$  (см. (2.23)). Уравнение Фридмана (3.39) тогда принимает вид

$$\frac{1}{a^4} \left( \frac{da}{d\eta} \right)^2 = \frac{a_m}{a^3} - \frac{1}{a^2}$$

и имеет решение

$$a = a_m \sin^2 \frac{\eta}{2}. \quad (3.40)$$

Видно, что расширение начинается с сингулярности при  $\eta = 0$ , максимальный размер достигается при  $\eta = \pi$ , и при  $\eta = 2\pi$  Вселенная коллапсирует обратно в сингулярность. Связь физического времени с конформным имеет вид

$$t = \int a(\eta) d\eta \quad (3.41)$$

$$= \frac{a_m}{2} (\eta - \sin \eta). \quad (3.42)$$

Таким образом, полное время жизни и максимальный размер связаны между собой соотношением  $t_{tot} = \pi \cdot a_m$ .

▷ *Задача 9. Показать, что при  $a \ll a_m$  решение (3.40), (3.41) переходит в “плоское” решение (3.16).*

Похожая ситуация возникает и тогда, когда расширение Вселенной останавливается за счёт отрицательного  $\Lambda$ -члена. Вселенная живёт конечное время между возникновением из сингулярности и реколлапсом в сингулярность.

▷ *Задача 10. Найти закон эволюции  $a = a(t)$  пространственно-плоской Вселенной ( $\varkappa = 0$ ) с отрицательной, не зависящей от времени космологической постоянной. Считать, что вещество во Вселенной имеет пылевидное уравнение состояния  $p = 0$ . Найти полное время жизни. Указание: использовать уравнение Фридмана в физическом времени.*

▷ *Задача 11. Рассмотреть Вселенную, заполненную веществом с уравнением состояния*

$$p = -\frac{A}{\rho} \quad (3.43)$$

(газ Чаплыгина).

1) Найти зависимость параметра Хаббла от масштабного фактора.

2) Найти закон эволюции Вселенной  $a = a(t)$  в пределах малого и большого масштабного фактора во всех трёх случаях:  $\varkappa = 0, \pm 1$ .

3) Найти закон эволюции  $a = a(t)$  в случае пространственно-плоской Вселенной.

4) Для каких  $\varkappa$  существуют статические решения уравнений Эйнштейна?

5) Что можно сказать про будущее Вселенной, если известно, что в некоторый момент времени она расширяется с ускорением? Рассмотреть все три случая,  $\varkappa = 0, \pm 1$ .

6) Рассмотреть теорию скалярного поля с действием

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] .$$

Для пространственно плоской Вселенной найти потенциал  $V(\phi)$ , для которого пространственно однородное решение приводит к космологической эволюции, найденной в п. (3), причём соотношение между давлением и плотностью энергии имеет вид (3.43).

## Глава 4

# ΛCDM: космологическая модель с тёмной материей и тёмной энергией

### 4.1 Современный состав Вселенной

Космологические решения, рассмотренные в разделе 3.2, нельзя воспринимать как реалистические. В действительности плотность энергии в современной Вселенной обеспечивается *нерелятивистским веществом* (барионы и тёмная материя, а также те типы нейтрино, чья масса заметно выше  $1 \text{ К} \sim 10^{-4} \text{ эВ}$ ), *ультрарелятивистским веществом* (фотоны, а также тот тип нейтрино, масса которого меньше  $10^{-4} \text{ эВ}$ , если такое нейтрино существует, см. Приложение С) и *тёмной энергией*. Вообще говоря, Вселенная могла бы иметь и ненулевую *пространственную кривизну*. Поэтому все соответствующие слагаемые необходимо учитывать в правой части уравнения Фридмана (3.7), и оно принимает вид

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho_M + \rho_{rad} + \rho_\Lambda + \rho_{curv}) , \quad (4.1)$$

где  $\rho_M$ ,  $\rho_{rad}$ ,  $\rho_\Lambda$  — плотности энергии нерелятивистского вещества, ультрарелятивистского вещества (“радиации”) и тёмной энергии, и по определению

$$\frac{8\pi}{3}G\rho_{curv} = -\frac{\varkappa}{a^2} \quad (4.2)$$

— вклад пространственной кривизны. Введём критическую плотность  $\rho_c$  соотношением

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G}H_0^2 , \quad (4.3)$$

где  $H_0$  — современное значение параметра Хаббла. Подчеркнем, что мы всегда будем использовать понятие о критической плотности применительно к современному состоянию Вселенной; иными словами  $\rho_c$  — не зависящая от времени величина. Её смысл состоит в том, что если современное значение плотности энергии во Вселенной

$$\rho_{M,0} + \rho_{rad,0} + \rho_{\Lambda,0}$$

в точности равно  $\rho_c$ , то Вселенная — пространственно-плоская (поскольку в этом случае  $\rho_{curv} = 0$  и  $\varkappa = 0$ ). Для современного значения параметра Хаббла (2.33) имеем величину критической плотности

$$\rho_c = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 0.53 \cdot 10^{-5} \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3} , \quad \text{при } h = 0.7 . \quad (4.4)$$

Средняя плотность энергии в современной Вселенной довольно мала: она эквивалентна всего около 5 массам протона на кубический метр.

Введём величины

$$\Omega_M = \frac{\rho_{M,0}}{\rho_c}, \quad \Omega_{rad} = \frac{\rho_{rad,0}}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_c},$$

$$\Omega_{curv} = \frac{\rho_{curv,0}}{\rho_c}. \quad (4.5)$$

Отметим, что эти величины также относятся только к современному состоянию Вселенной и по определению не меняются со временем. Из соотношений (4.1) и (4.3) следует, что

$$\sum_i \Omega_i \equiv \Omega_M + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} = 1. \quad (4.6)$$

Величины  $\Omega_i$  равны относительным вкладам различных видов материи, а также пространственной кривизны в правую часть уравнения Фридмана (4.1) в современную эпоху. Они являются одними из главных космологических параметров.

Проще всего найти относительный вклад ультрарелятивистских частиц,  $\Omega_{rad}$ . Он в основном определяется вкладом реликтовых фотонов с температурой  $T_0 = 2.725$  К. В соответствии с законом Стефана–Больцмана, их плотность энергии равна (см. также Главу 5)

$$\rho_{\gamma,0} = 2 \frac{\pi^2}{30} T_0^4,$$

где фактор 2 связан с наличием двух поляризаций фотона. Численно

$$\rho_{\gamma,0} = 2.55 \cdot 10^{-10} \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3},$$

поэтому

$$\Omega_\gamma = 2.5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{h^2}$$

$$= 5.1 \cdot 10^{-5}, \quad h = 0.7. \quad (4.7)$$

Если существуют безмассовые или лёгкие нейтрино (с  $m_\nu \lesssim 1 \text{ К} \sim 10^{-4} \text{ эВ}$ ), их вклад в  $\Omega_{rad}$  по порядку величины сравним с  $\Omega_\gamma$ . Итак,

$$\Omega_{rad} \lesssim 10^{-4}. \quad (4.8)$$

В связи с этим влиянием ультрарелятивистских частиц на темп расширения Вселенной в современную эпоху и в течение большей части предшествующей эволюции можно пренебречь.

Мы уже упоминали во Введении, что из наблюдений анизотропии реликтового излучения следует, что пространственная кривизна Вселенной или вообще равна нулю, или весьма мала; Вселенная с хорошей точностью является пространственно плоской. Количественно это сводится к ограничению на  $\Omega_{curv}$ :

$$|\Omega_{curv}| < 0.02. \quad (4.9)$$

Мы обсудим в дальнейшем, как получается это ограничение, а пока будем просто им пользоваться.

Существует несколько независимых способов определения  $\Omega_M$  и  $\Omega_\Lambda$  из наблюдательных данных. Некоторые из них мы обсудим в этой книге, о некоторых — только упомянем (см. также Введение). Здесь нам достаточно привести принятые сегодня значения:

$$\Omega_M \approx 0.25 \quad \Omega_\Lambda \approx 0.75 \quad (4.10)$$

с точностью около 5%. Таким образом, в современную эпоху темп расширения Вселенной определяется в значительной степени тёмной энергией, и в меньшей степени — нерелятивистским веществом.

Отметим (см. также Введение), что современная плотность энергии нерелятивистского вещества складывается из плотности массы барионов (протонов, ядер) и плотности массы тёмной материи,

$$\Omega_M = \Omega_B + \Omega_{CDM} ,$$

причём

$$\Omega_B = 0.042$$

и

$$\Omega_{CDM} = 0.20 .$$

Вклад нейтрино сегодня мал (см. Главу 7), а количество электронов равно полному количеству протонов, так что<sup>1</sup>

$$\Omega_e \approx \frac{m_e}{m_p} \cdot \Omega_B \simeq 2 \cdot 10^{-5} .$$

Таким образом, наибольший вклад в  $\Omega_M$  вносит тёмная материя. По причинам, о которых мы будем говорить в Главе 9, для неё часто используют термин “холодная тёмная материя” (cold dark matter), отсюда и обозначение  $\Omega_{CDM}$ .

Пространственно-плоскую модель Вселенной с нерелятивистской холодной тёмной материей и тёмной энергией, параметры которой близки к (4.10), мы будем называть<sup>2</sup> моделью  $\Lambda$ CDM. В дальнейшем мы будем уточнять эту модель, рассматривая другие космологические параметры. Одно уточнение сделаем прямо сейчас: в рамках модели  $\Lambda$ CDM мы будем предполагать, если не оговорено противное, что  $\rho_\Lambda$  не зависит от времени; такая ситуация имеет место, если  $\rho_\Lambda \equiv \rho_{vac}$  — это плотность энергии вакуума.

Сразу скажем, что модель  $\Lambda$ CDM согласуется со всем набором существующих наблюдательных данных. Это, конечно, не означает, что эта модель — точная, или что невозможны альтернативные модели (особенно в части, касающейся тёмной энергии); в любом случае модель  $\Lambda$ CDM служит важной реперной точкой среди множества космологических моделей.

Обсуждавшееся только что соотношение между различными вкладами в правую часть уравнения Фридмана (4.1) характерно только для современной эпохи, поскольку  $\rho_{rad}$ ,  $\rho_M$ ,  $\rho_\Lambda$  и  $\rho_{curv}$  ведут себя по-разному со временем, а именно,  $\rho_{rad} \propto a^{-4}$  (см. (3.25)),  $\rho_M \propto a^{-3}$  (см. (3.15)),  $\rho_{curv} \propto a^{-2}$  (см. (4.2)), и, как мы предположили,  $\rho_\Lambda$  не

<sup>1</sup>Первое равенство здесь является приближённым, поскольку в  $\Omega_B$  кроме протонов вносят вклад и нейтроны, находящиеся в ядрах. Это здесь для нас несущественно.

<sup>2</sup>Вообще говоря, под  $\Lambda$ CDM часто понимают более широкий класс моделей. Мы будем использовать этот термин в узком смысле, указанном в тексте. В литературе описываемую модель называют ещё “concordance model”.

зависит от времени. Таким образом, уравнение Фридмана в модели  $\Lambda$ CDM можно записать в виде

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left[ \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right]. \quad (4.11)$$

Здесь есть одна тонкость. Число различных типов ультрарелятивистских частиц, как и число типов нерелятивистских частиц, различно в разные эпохи эволюции Вселенной. В частности, нейтрино с массой  $m_\nu \gtrsim 1$  К сегодня являются нерелятивистскими, а на ранних стадиях эволюции были релятивистскими. В этой Главе данная тонкость будет для нас несущественной, но нужно иметь в виду, что уравнение Фридмана в виде (4.11) нужно использовать с осторожностью.

Ещё одно замечание касается тёмной энергии. Нельзя исключить возможность того, что  $\rho_\Lambda$  в действительности зависит от времени. Например, можно было бы рассмотреть тёмную энергию с уравнением состояния  $p_\Lambda = w_\Lambda \rho_\Lambda$  с  $w_\Lambda \neq -1$ ; в этом случае её плотность энергии изменялась бы с масштабным фактором по степенному закону (3.38). Наблюдательные данные свидетельствуют о том, что  $w_\Lambda$  лежит в пределах  $-0.8 \gtrsim w_\Lambda \gtrsim -1.2$ . С учётом этого основные выводы данной Главы остаются справедливыми, хотя при  $w_\Lambda \neq -1$  формулы приобретают более громоздкий вид. Следует подчеркнуть, что вопрос о зависимости  $\rho_\Lambda$  от времени — это один из важнейших вопросов как с точки зрения космологии, так и с точки зрения физики частиц, поскольку он прямо связан с происхождением тёмной энергии: если  $\rho_\Lambda = const$ , то тёмная энергия — это энергия вакуума, в то время как зависимость  $\rho_\Lambda$  от времени свидетельствовала бы о существовании в природе нового вида материи (например, скалярных полей с экзотическими свойствами), для которого часто употребляют термин “квинтэссенция”.

## 4.2 Общие свойства эволюции Вселенной

Обсудим, пока на качественном уровне, какие вклады в правую часть уравнения Фридмана наиболее существенны в различные космологические эпохи. Прежде всего, вклад кривизны никогда не был доминирующим. Действительно, из (4.9) и (4.10) видно, что вклад кривизны мал как по сравнению со вкладом нерелятивистского вещества, так и по сравнению со вкладом тёмной энергии. В прошлом вклад нерелятивистской материи был усилен по сравнению со вкладом кривизны фактором  $a_0/a = 1+z$ , поэтому последний был тем более несущественным. Если вклад тёмной энергии действительно не зависит от времени, то вклад кривизны мал и в будущем: кривизна убывает как  $1/a^2$ , а  $\rho_\Lambda$  остаётся постоянной.

Говоря о будущем, заметим, что все вклады в правую часть уравнения (4.11), за исключением  $\Omega_\Lambda$ , убывают с ростом  $a$ . Поэтому в будущем темп расширения Вселенной будет определяться тёмной энергией, и поведение масштабного фактора будет стремиться к экспоненциальному, вида (3.34) с  $\rho_{vac} \equiv \rho_\Lambda = \rho_c \Omega_\Lambda$ . Разумеется, этот вывод основан на предположении о постоянстве  $\rho_\Lambda$  во времени. Будет ли это предположение справедливо всегда — неизвестно, поэтому сколько-нибудь надёжных предсказаний о совсем далеком будущем Вселенной сделать в действительности невозможно.

Заканчивая разговор о будущем, отметим, что если бы  $\rho_\Lambda$  мгновенно выключилась, то медленнее всего с ростом  $a$  убывал бы вклад кривизны (если  $\Omega_{curv} \neq 0$ ,



т.е. Вселенная не является в точности пространственно-плоской). При этом в случае открытой Вселенной ( $\varkappa = -1$ ,  $\Omega_{curv} > 0$ , см. (4.2)) расширение длилось бы вечно, а в случае замкнутой Вселенной ( $\varkappa = +1$ ,  $\Omega_{curv} < 0$ ) расширение сменилось бы сжатием и последующим коллапсом Вселенной обратно в сингулярность. Смена расширения сжатием в последнем случае произошла бы тогда, когда правая часть уравнения (4.11) обратилась бы в нуль, т.е. при

$$\frac{a_0}{a} = \frac{|\Omega_{curv}|}{\Omega_M}$$

(пренебрегая вкладом релятивистского вещества). Из ограничения (4.9) и оценки (4.10) следует, что в момент остановки расширения

$$\frac{a}{a_0} > 10 ,$$

т.е. Вселенная в любом случае расширится ещё на порядок.

▷ *Задача 1. Используя ограничение (4.9) и консервативное ограничение  $\Omega_M > 0.2$ , получить ограничение снизу на полное время существования Вселенной в будущем до коллапса в классическую сингулярность.*

Нас в этой книге будет больше интересовать прошлое Вселенной. Из уравнения (4.11) видно, что в современную эпоху основной вклад в правую часть вносит тёмная энергия. Этот вклад  $\rho_\Lambda$  стал существенным относительно недавно, а до этого был длительный период доминирования нерелятивистского вещества (“пылевидная стадия”). Ещё раньше, при достаточно малых  $a$ , доминировало ультрарелятивистское вещество (“радиационно-доминированная стадия”). Если оставаться в рамках изложенных до сих пор представлений, то горячая, радиационно-доминированная стадия началась непосредственно с космологической сингулярности. Такую картину мы будем условно называть картиной горячего Большого взрыва. Во второй части этой книги мы подробно обсудим недостатки такой теории и рассмотрим, как их удаётся обойти в инфляционной теории. Пока же сосредоточимся на теории горячего Большого взрыва, то есть будем рассматривать пост-инфляционную эволюцию Вселенной.

Заметный интерес для космологии представляют “моменты” смены режимов расширения, к количественному описанию которых мы сейчас и переходим.

## 4.3 Переход от замедления к ускорению

Пренебрегая вкладами ультрарелятивистского вещества и кривизны, запишем уравнение (4.11) в виде

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_c \left( \frac{\Omega_M a_0^3}{a} + \Omega_\Lambda a^2 \right) .$$

Отсюда получим ускорение

$$\ddot{a} = a \frac{4\pi}{3} G \rho_c \left( 2\Omega_\Lambda - \Omega_M \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \right) .$$

В современную эпоху Вселенная расширяется с ускорением, поскольку  $2\Omega_\Lambda > \Omega_M$  и, следовательно,  $\ddot{a} > 0$ . В прошлом, при достаточно больших  $z \equiv a_0/a - 1$ , Вселенная

расширялась с замедлением,  $\ddot{a} < 0$ . Переход от замедления к ускорению произошёл при

$$\left(\frac{a_0}{a_{acc}}\right)^3 = \frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M},$$

т.е. при

$$z_{acc} = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M}\right)^{1/3} - 1.$$

Здесь индекс *acc* обозначает момент перехода от замедленного к ускоренному (accelerated) расширению. Для  $\Omega_M = 0.24$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.76$  получаем численно

$$z_{acc} \approx 0.85.$$

Таким образом, переход от замедления к ускорению произошёл во Вселенной сравнительно недавно.

▷ *Задача 2. При каком  $z$  в нашей Вселенной сравнивались вклады в плотность энергии от нерелятивистского вещества и космологической постоянной?*

Поскольку зависимость  $\rho_M \propto a^{-3}$  — довольно сильная, а  $\rho_\Lambda$  не зависит от  $a$  вовсе, при  $z$  заметно бóльших  $z_{acc}$  вкладом тёмной энергии в уравнение Фридмана можно пренебречь, и до перехода от замедления к ускорению Вселенная расширялась по закону  $a \propto t^{2/3}$  (пылевидная стадия, см. раздел 3.2.1).

▷ *Задача 3. Найти, при каком  $z$  происходит переход от замедления к ускорению для тёмной энергии с уравнением состояния  $p = w\rho$ . При каком значении параметра  $w$  этот переход происходил бы сейчас? Для численной оценки воспользоваться значениями (4.10) для относительных плотностей энергии нерелятивистского вещества и тёмной энергии.*

## 4.4 Переход от радиационно-доминированной к пылевидной стадии

Мы уже говорили, что в рамках модели Большого взрыва на самых ранних стадиях эволюции Вселенной её расширение определяется вкладом ультрарелятивистского вещества в уравнение Фридмана (радиационно-доминированная стадия). Момент перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии играет важную роль в теории эволюции неоднородностей: до этого момента расширение шло по закону  $a(t) \propto t^{1/2}$ , а после него — по закону  $a(t) \propto t^{2/3}$ ; мы увидим во второй части книги, что при таких режимах расширения неоднородности плотности во Вселенной ведут себя существенно по-разному.

Грубую оценку для момента перехода от радиационно-доминированной стадии к стадии доминирования нерелятивистского вещества (пылевидной стадии) получим из (4.11) и оценок (4.7) и (4.10). Обозначая момент этого перехода индексом *eq* (equality, равенство плотностей энергии релятивистской и нерелятивистской материи), и пренебрегая в уравнении (4.11) вкладами  $\Lambda$ -члена и кривизны, получим, что вклады ультрарелятивистского и нерелятивистского вещества сравниваются при

$$z_{eq} + 1 = \frac{a_0}{a_{eq}} \sim \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} \sim 10^4. \quad (4.12)$$

При этом температура во Вселенной по порядку величины равна

$$T_{eq} = T_0(1 + z_{eq}) \sim 10^4 \text{ К} \sim 1 \text{ эВ} . \quad (4.13)$$

Таким образом, переход от радиационно-доминированной к пылевидной стадии происходил довольно далеко в прошлом.

Оценки (4.12) и (4.13) нуждаются в уточнении. При температуре порядка 1 эВ ультрарелятивистскими являются не только фотоны, но, скорее всего, и все три типа нейтрино (см. Приложение С). Мы увидим в Главе 7, что нейтрино при такой температуре не взаимодействуют ни между собой, ни с окружающим веществом. В соответствии с разделом 2.5, функции распределения нейтрино являются в это время тепловыми. В Главе 7 мы покажем, что эффективная температура нейтрино равна

$$T_\nu = \left( \frac{4}{11} \right)^{1/3} T_\gamma , \quad (4.14)$$

где  $T_\gamma$  — температура фотонов. Отметим, что всюду в этой книге мы отождествляем температуру во Вселенной с температурой фотонов, так что

$$T_\gamma \equiv T .$$

Вклад ультрарелятивистских нейтрино в плотность энергии во Вселенной даётся законом Стефана–Больцмана, модифицированным соответствующим образом (см. Главу 5),

$$\rho_\nu = 3 \cdot 2 \cdot \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T_\nu^4 \quad (4.15)$$

где фактор 3 отвечает трём типам нейтрино, фактор 2 возник из-за того, что для каждого типа нейтрино существует как нейтрино (одна поляризация), так и анти-нейтрино (вторая поляризация), а фактор  $7/8$  связан с тем, что нейтрино являются фермионами. Таким образом, плотность энергии ультрарелятивистского вещества при интересующих нас температурах равна

$$\rho_{rad} = \rho_\gamma + \rho_\nu = \left[ 2 + \frac{21}{4} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \right] \frac{\pi^2}{30} T^4 , \quad (4.16)$$

где первый член в квадратных скобках соответствует фотонам, а второй — трём типам нейтрино. Иными словами

$$\rho_{rad} = 1.68 \rho_\gamma = 1.68 \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \Omega_\gamma \rho_c . \quad (4.17)$$

Выражение для плотности энергии нерелятивистского вещества, как и раньше, имеет вид

$$\rho_M = \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \Omega_M \rho_c . \quad (4.18)$$

Отсюда находим, что переход от радиационно-доминированной к пылевидной стадии происходит при

$$1 + z_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}} = 0.6 \frac{\Omega_M}{\Omega_\gamma} ,$$

и с учётом (4.7) имеем

$$1 + z_{eq} = 2.4 \cdot 10^4 \Omega_M h^2 . \quad (4.19)$$

Для  $\Omega_M = 0.24$  и  $h = 0.73$  имеем

$$1 + z_{eq} = 3.0 \cdot 10^3. \quad (4.20)$$

Температура в этот момент равна

$$T_{eq} = (1 + z_{eq})T_0 = 5.6 \Omega_M h^2 \text{ эВ} \quad (4.21)$$

$$T_{eq} = 0.7 \text{ эВ} \quad \text{при} \quad h = 0.73, \quad \Omega_M = 0.24 \quad (4.22)$$

Выражения (4.19)–(4.22) уточняют оценки (4.12), (4.13) с учётом трёх типов лёгких нейтрино.

Найдём время жизни Вселенной к моменту перехода от радиационно-доминированной стадии к пылевидной стадии. До этого момента темп расширения определялся ультрарелятивистским веществом, причём во время большей части эволюции ультрарелятивистскими являлись только фотоны и нейтрино (наиболее лёгкие из других частиц — электроны и позитроны — перестали быть релятивистскими при  $T \sim m_e = 0.5 \text{ МэВ}$ ). Поэтому для вычисления времени жизни можно воспользоваться формулами раздела 3.2.2, причём число эффективных степеней свободы  $g_*$  получается сравнением формул (3.27) и (4.16):

$$g_* = 2 + \frac{21}{4} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} = 3.36. \quad (4.23)$$

Используя формулы (3.26) и (3.28), получим для времени жизни оценку

$$t_{eq} = \frac{1}{2H_{eq}} = \frac{M_{Pl}^*}{2T_{eq}^2}, \quad (4.24)$$

где, как и прежде,  $M_{Pl}^* = M_{Pl}/1.66\sqrt{g_*}$ . С учетом (4.21) и (4.23) получаем при  $h = 0.73$ ,  $\Omega_M = 0.24$

$$t_{eq} = 4 \cdot 10^{36} \text{ ГэВ}^{-1} = 2.5 \cdot 10^{12} \text{ с} = 80 \text{ тыс. лет}. \quad (4.25)$$

Это время, разумеется, весьма мало по сравнению с современным возрастом Вселенной  $t_0 \approx 14$  млрд. лет.

В заключение этого раздела отметим, что переход от радиационно-доминированной к пылевидной стадии — это не какой-то определённый момент в истории Вселенной, а процесс, длительность которого сравнима с хаббловским временем на тот момент,  $H_{eq}^{-1}$  (иными словами, с временем жизни Вселенной  $t_{eq}$ ). Для определённости моментом перехода мы называем тот момент, когда  $\rho_{rad} = \rho_M$ ; в этом смысле формула (4.19) является точной. Однако отношение плотностей энергии ультрарелятивистского и нерелятивистского вещества зависит от масштабного фактора не очень сильно,  $\rho_{rad}/\rho_M \propto a$ , так что за время порядка хаббловского это отношение не успевает сильно измениться. Поэтому представление о том, что закон расширения изменяется скачком от  $a \propto t^{1/2}$  к  $a \propto t^{2/3}$  при  $t = t_{eq}$ , носит приближенный характер; соотношение (4.24) между температурой  $T_{eq}$  и временем жизни  $t_{eq}$  — также приближённое, поскольку при выводе (4.24) не учитывался вклад нерелятивистского вещества в плотность энергии при  $t < t_{eq}$ .

▷ *Задача 4. Пренебрегая вкладом тёмной энергии и кривизны в уравнение Фридмана на интересующей здесь стадии эволюции и считая, что число эффективных ультрарелятивистских степеней свободы  $g_*$  постоянно и даётся*

(4.23), найти точный закон расширения Вселенной  $a = a(t)$  при температурах, сравнимых с  $T_{eq}$ . Найти время жизни Вселенной к моменту, когда её температура равна  $T_{eq}$ , заданной (4.21). Найти это время жизни численно при  $h = 0.73$  и  $\Omega_M = 0.24$ , уточнив тем самым оценку (4.25).

## 4.5 Возраст современной Вселенной и размер горизонта

Учёт того, что в течение заметного периода в динамике расширения Вселенной существенную роль играл космологический  $\Lambda$ -член, приводит к уточнению современного возраста Вселенной и размера космологического горизонта по сравнению с оценками (3.21) и (3.24). Для их вычисления можно пренебречь вкладами кривизны и ультрарелятивистского вещества в уравнение Фридмана: как мы обсуждали в разделе 4.1, вклад кривизны мал на всех этапах эволюции; вклад же ультрарелятивистского вещества существен лишь в течение короткого этапа,  $t < t_{eq}$ . Положим поэтому  $\Omega_{rad} = \Omega_{curv} = 0$  в уравнении (4.11) и запишем

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[ \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \right], \quad (4.26)$$

где мы воспользовались соотношением (4.3). Кроме того, в нашем приближении

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1. \quad (4.27)$$

Нас будет интересовать случай  $\Omega_\Lambda > 0$ . Решение уравнения (4.26) имеет вид

$$a(t) = a_0 \left( \frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \left[ \text{sh} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3}. \quad (4.28)$$

Видно, что при малых временах восстанавливается закон расширения пылевидной стадии,  $a \propto t^{2/3}$ , а при больших временах масштабный фактор экспоненциально растёт, как и следовало ожидать.

Момент Большого взрыва по-прежнему соответствует  $t = 0$ , когда решение (4.28) имеет сингулярность. Поэтому возраст современной Вселенной определяется из уравнения

$$\left( \frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \left[ \text{sh} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t_0 \right) \right]^{2/3} = 1$$

и равен

$$t_0 = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \frac{1}{H_0} \text{Arsh} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}}. \quad (4.29)$$

При  $\Omega_\Lambda \rightarrow 0$  и  $\Omega_M \rightarrow 1$  мы вновь приходим к формуле (3.21). При положительном  $\Omega_\Lambda$  время жизни больше  $2/(3H_0)$ . В этом легко убедиться, построив графики зависимости масштабного фактора от времени для пылевидной космологии ( $\Omega_\Lambda = 0$ ) и модели  $\Lambda$ CDM ( $\Omega_\Lambda > 0$ ) так, чтобы они касались друг друга (производные их совпадали) в современный момент, когда  $a = a_0$  (совпадение производных соответствует фиксированию современного значения параметра Хаббла  $H_0 = (\dot{a}/a)_0$ ). Поскольку для реальной Вселенной уравнение Фридмана имеет вид (4.26), а для пылевидной модели правая часть равна  $H_0^2 (a_0/a)^3$ , при каждом значении  $a < a_0$  производная масштабного фактора по времени больше для пылевидной модели, и мы приходим к графикам, изображённым на рис. 4.1.

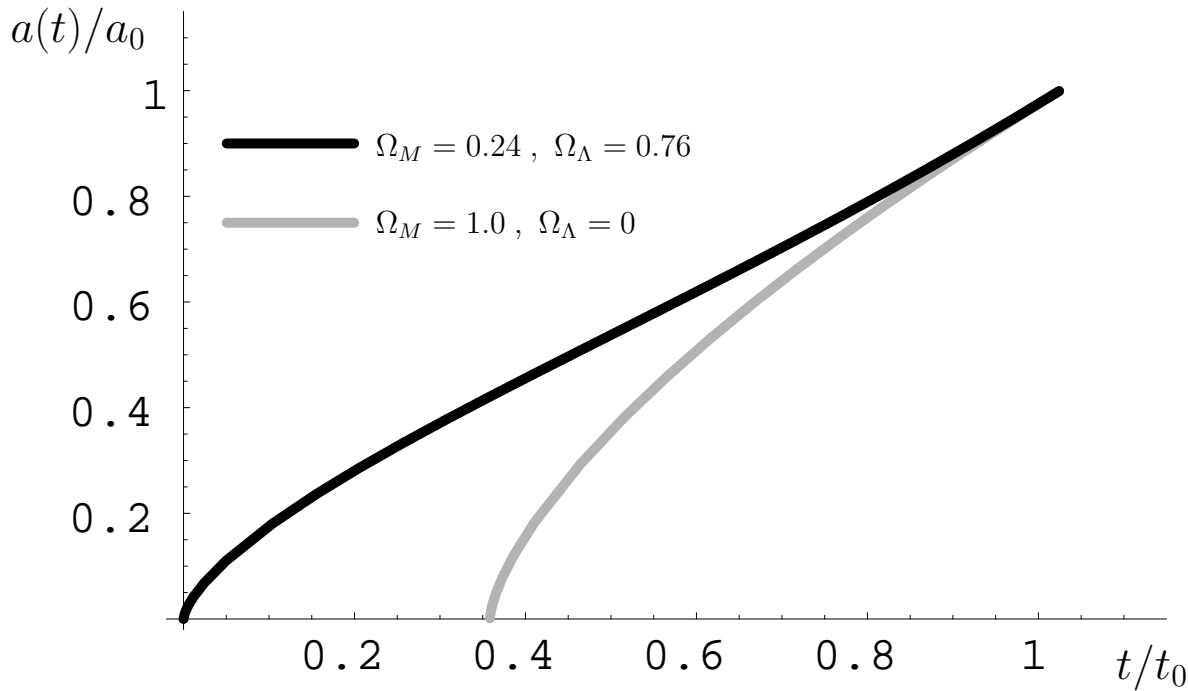


Рис. 4.1: Законы эволюции  $a = a(t)$  пространственно-плоских Вселенных.

Расстояние по временной оси на этих графиках от точки сингулярности  $a = 0$  до точки  $a = a_0$ , соответствующей современной Вселенной, — это и есть возраст Вселенной; видно, что он больше для реальной Вселенной с  $\Omega_\Lambda > 0$ . Из формулы (4.29) получаем при  $\Omega_M = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$  и  $h = 0.7$

$$t_0 = 1.38 \cdot 10^{10} \text{ лет} \quad \text{при} \quad \Omega_M = 0.24, \quad \Omega_\Lambda = 0.76, \quad h = 0.73.$$

Такой возраст Вселенной практически не противоречит независимым ограничениям, о которых мы упоминали во Введении. Таким образом, наличие в реальной Вселенной космологического  $\Lambda$ -члена снимает противоречие между возрастом Вселенной, вычисленным исходя из современного значения параметра Хаббла, и ограничениями на этот возраст, полученными другими способами.

- ▷ *Задача 5.* Рассмотрим открытую модель Вселенной без  $\Lambda$ -члена (эта модель в действительности исключена измерениями анизотропии реликтового излучения), в которой  $\Omega_M \neq 0$ ,  $\Omega_{curv} \neq 0$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$  и  $\Omega_M + \Omega_{curv} = 1$ . Найти возраст современной Вселенной при заданном значении  $H_0$ . Сделать численную оценку, используя значение  $\Omega_M \approx 0.3$  (полученное из изучения скоплений галактик) и  $h = 0.7$ .
- ▷ *Задача 6.* Найти современный возраст Вселенной для тёмной энергии с уравнением состояния  $p = w\rho$ . Сделать численную оценку для  $w = -1.2$  и  $w = -0.8$ , полагая  $\Omega_M = 0.25$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.75$ .

Обсуждение размера космологического горизонта в модели  $\Lambda$ CDM не столь поучительно; тем не менее, приведём соответствующую оценку. В соответствии с общей формулой (3.22) современный размер горизонта равен

$$l_{H,0} = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Поскольку при достаточно малых  $t$  справедливо  $a(t) \propto t^{2/3}$  (см. (4.28)), этот интеграл сходится на нижнем пределе, т.е. размер космологического горизонта конечен. Можно показать, что при заданном значении параметра Хаббла  $H_0$  размер горизонта больше значения  $2/H_0$ , возникающего в плоской модели с “пылью”, но без  $\Lambda$ -члена. Численно, при  $\Omega_M = 0.24$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.76$ , оценка имеет вид

$$l_{H,0} = \frac{2}{H_0} \cdot 1.8 \quad (4.30)$$

$$l_{H,0} = 14.8 \text{ Гпк} , \quad h = 0.73 . \quad (4.31)$$

▷ *Задача 7. Показать, что в плоской модели с “пылью” и положительным  $\Lambda$ -членом размер космологического горизонта больше  $2/H_0$ . Убедиться в справедливости численной оценки (4.31).*

В заключение этого раздела сделаем следующее замечание. Ограничение (4.9) на  $\Omega_{curv}$  вместе с оценкой (4.30) можно использовать для того, чтобы убедиться, что вне нашего космологического горизонта имеется много областей размера  $l_{H,0}$ . Напомним, что в классической теории горячего Большого взрыва с космологической сингулярностью такие области причинно не связаны между собой. В любом случае, никакой информации о событиях, происходящих или происходивших в этих областях, мы получить не можем: например, реликтовые фотоны с момента последнего рассеяния (момента рекомбинации) пролетели расстояние, меньшее  $l_{H,0}$ .

Разумеется, в открытой и плоской моделях Вселенной таких областей бесконечно много, так что речь идёт о не исключенной пока наблюдательными данными возможности того, что Вселенная — это 3-сфера<sup>3</sup>. Из определений (4.2), (4.3) и (4.5) следует, что радиус этой сферы  $a_0$  связан с  $\Omega_{curv}$  следующим образом

$$\frac{1}{a_0^2} = H_0^2 |\Omega_{curv}| . \quad (4.32)$$

Сравнивая это выражение с (4.30) и используя ограничение (4.9), получим

$$\frac{a_0}{l_{H,0}} = \frac{1}{3.3 \sqrt{|\Omega_{curv}|}} > 2.1 .$$

Таким образом, радиус Вселенной заметно больше размера горизонта. Это обстоятельство станет ещё более выпуклым, если найти полное количество областей, подобных области внутри нашего горизонта. Оно равно отношению объёма 3-сферы  $2\pi^2 a_0^3$  и объёма области радиуса  $l_{H,0}$ :

$$N \approx \frac{2\pi^2 a_0^3}{(4\pi/3) l_{H,0}^3} = 4.7 \left( \frac{a_0}{l_{H,0}} \right)^3 > 46 . \quad (4.33)$$

Таким образом, наблюдательные данные прямо свидетельствуют о том, что мы видим не больше 2% всего объёма Вселенной. Во второй части книги мы приведём теоретические соображения в пользу того, что  $\Omega_{curv}$  на много порядков меньше, чем даёт наблюдательное ограничение (4.9), т.е. областей вне нашего горизонта на много порядков больше, чем следует из ограничения (4.33).

---

<sup>3</sup>Предполагается, что Вселенная однородна и изотропна и вне нашего горизонта.

## 4.6 Соотношение видимая яркость — красное смещение для удалённых “стандартных свеч”

Обсудим в общих чертах один из важных способов определения таких космологических параметров, как современное значение параметра Хаббла  $H_0$ , относительные плотности энергии нерелятивистского вещества  $\Omega_M$  и тёмной энергии  $\Omega_\Lambda$  и параметр  $\Omega_{curv}$ , характеризующий пространственную кривизну. В перспективе этот способ представит также одну из возможностей выяснить, действительно ли тёмная энергия имеет вакуумное уравнение состояния  $p = -\rho$ , или она представляет из себя не вакуум, а нечто иное (например, характеризуется уравнением состояния  $p = w\rho$  с  $w \neq -1$ ). Речь идет об одновременном измерении красного смещения  $z$  и видимой яркости “стандартных свеч”, находящихся от нас на расстояниях, сравнимых с размером космологического горизонта, и имеющих поэтому не слишком малые  $z$ . В качестве таких “стандартных свеч” — достаточно ярких объектов, абсолютная светимость которых известна с хорошей точностью — сегодня используются<sup>4</sup> сверхновые типа Ia.

Найдём соотношение между красным смещением и видимой яркостью источника с абсолютной светимостью  $L$ . Хотя последующие рассуждения (но не конкретные результаты!) непосредственно обобщаются на случай, когда тёмная энергия не обладает вакуумным уравнением состояния, ограничимся пока вакуумным случаем с  $\rho_\Lambda$ , не зависящей от времени. В то же время, полезно включить в рассмотрение возможность ненулевой пространственной кривизны и отвлечься от ограничения (4.9). Для определённости выберем модель открытой Вселенной с  $\kappa = -1$  и  $\Omega_{curv} > 0$ . Плоская модель восстанавливается в пределе  $\Omega_{curv} \rightarrow 0$ , или, что тоже самое,  $a_0 \rightarrow \infty$ , см. соотношение (4.32).

Используем форму метрики (2.10)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \quad (4.34)$$

Как обычно, координатное расстояние между источником, излучившим свет в момент  $t_i$ , и приёмником, находящимся на Земле в момент  $t_0$ , равно

$$\chi = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} . \quad (4.35)$$

Найдём соотношение между координатным расстоянием и красным смещением  $z$  источника. Для этого воспользуемся уравнением Фридмана в форме (4.11), в котором пренебрежём вкладом радиации. Перейдя в интеграле (4.35) к переменной интегрирования

$$z(t) = \frac{a_0}{a(t)} - 1 ,$$

получим

$$\chi = \int_0^z \frac{dz'}{a_0(\dot{a}/a)(z')} .$$

или с учётом уравнения (4.11)

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M(z'+1)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(z'+1)^2}} \quad (4.36)$$

---

<sup>4</sup>Как и всюду в этой книге, мы здесь не останавливаемся на наблюдательных и астрофизических аспектах проблемы. В частности, мы оставляем в стороне вопросы о природе сверхновых типа Ia, о том, почему они служат хорошими кандидатами на роль “стандартных свеч”, и т.п.



Этот интеграл аналитически взять не удаётся, но его нетрудно найти численно при заданных значениях параметров.

В силу (4.34), физическая площадь сферы, через которую сегодня пролетают фотоны, испущенные источником, равна

$$S(z) = 4\pi r^2(z) , \quad (4.37)$$

где

$$r(z) = a_0 \operatorname{sh} \chi(z) . \quad (4.38)$$

Число фотонов, пересекающих единицу поверхности приёмника, обратно пропорционально  $S$ , а энергия каждого фотона отличается от его энергии в момент испускания фактором покраснения  $(1+z)^{-1}$ . Такой же фактор возникает дополнительно, если мы интересуемся числом фотонов, проходящих через заданную площадку в единицу времени, поскольку временные интервалы для источника и приёмника отличаются в  $(1+z)^{-1}$  раз. Последнее обстоятельство можно пояснить следующим образом. В конформных координатах  $(\eta, \mathbf{x})$  фотоны ведут себя так же, как в статической Вселенной, см. раздел 2.3. Поэтому в этих координатах промежутки времени между испусканием двух фотонов и между их поглощением одинаковы,  $d\eta_i = d\eta_0$ . Отсюда и следует соотношение между соответствующими промежутками физического времени,  $dt_0 = (1+z)dt_i$ .

Таким образом, видимая яркость — поток энергии на приёмник — равна

$$J = \frac{L}{(1+z)^2 S(z)} , \quad (4.39)$$

где  $L$  — абсолютная светимость источника (энергия, излучаемая в единицу времени). Это и есть искомое соотношение между видимой яркостью и красным смещением источника, чья абсолютная светимость  $L$  предполагается известной. Если ввести *фотометрическое расстояние*  $r_{ph}$  так, чтобы связь между  $L$  и  $J$  имела формально такой же вид, как в пространстве Минковского,

$$J = \frac{L}{4\pi r_{ph}^2} ,$$

то из (4.39) будем иметь

$$r_{ph} = (1+z) \cdot r(z) , \quad (4.40)$$

где  $r(z)$  задано (4.38).

На первый взгляд может показаться, что соотношение (4.39) содержит в себе пять космологических параметров:  $H_0$ ,  $a_0$ ,  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  и  $\Omega_{curv}$ . На самом деле независимых параметров всего три, поскольку выполняются соотношения (см. (4.6) и (4.2), (4.5))

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} = 1 \quad (4.41)$$

и

$$\Omega_{curv} = \frac{1}{a_0^2 H_0^2} . \quad (4.42)$$

Отметим, что при  $z \ll 1$  в подынтегральном выражении в (4.36) можно пренебречь  $z'$ , тогда  $\chi(z) = z/(a_0 H_0)$  и  $r(z) = a_0 \chi(z)$ , так что мы возвращаемся к закону Хаббла  $r(z) = H_0^{-1} z$ . При этом в главном порядке по  $z$  яркость даётся обычной формулой

$$J = \frac{L}{4\pi r^2(z)} , \quad z \ll 1 .$$

Возвратимся к общему случаю. Как видно из формул (4.36)–(4.42), все три независимых космологических параметра входят в соотношение между видимой яркостью и красным смещением нетривиальным образом, и измерения в широком диапазоне  $z$  могут в принципе их все определить. Это проиллюстрировано на рис. 4.2 и 4.3.

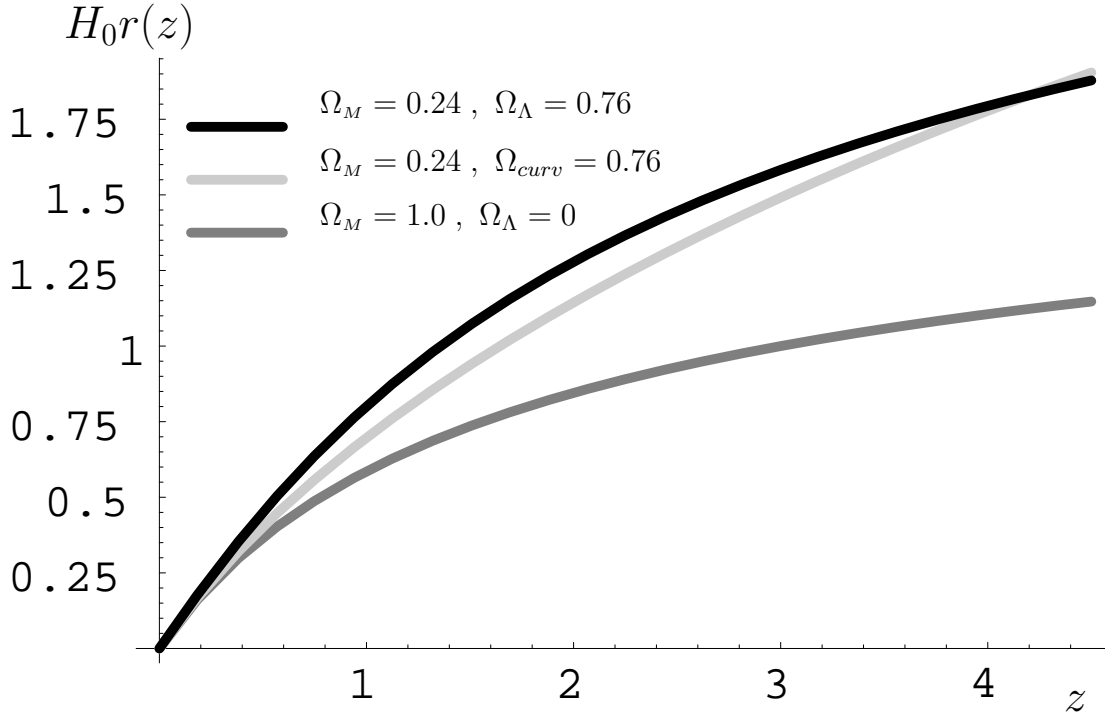


Рис. 4.2: Зависимость  $H_0 r(z)$  от красного смещения  $z$  для различных космологических моделей.

Чтобы понять, что изображено на рис. 4.2 и 4.3, заметим, что зависимость от космологических параметров входит в формулу (4.39) через функцию  $r(z)$ . Если измерять  $r(z)$  в хаббловских единицах длины  $H_0^{-1}$ , то

$$H_0 r(z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{curv}}} \operatorname{sh} \chi(z), \quad (4.43)$$

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{\sqrt{\Omega_{curv}} dz'}{\sqrt{\Omega_M (1+z')^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z')^2}}.$$

Таким образом, правая часть (4.43) не зависит явно от  $H_0$ ; именно она изображена на рис. 4.2 и 4.3.

Обсудим сначала чёрную и тёмно-серую кривые на рис. 4.2, которые соответствуют пространственно-плоской Вселенной с  $\Omega_M = 0.24$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.76$  (чёрная кривая) и  $\Omega_M = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$  (тёмно-серая кривая, плоская Вселенная без  $\Lambda$ -члена). Для получения из выражений (4.36), (4.38) формул плоской модели возьмем предел  $a_0 \rightarrow \infty$ ,  $\Omega_{curv} \rightarrow 0$  и получим

$$r(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_M (z' + 1)^3 + \Omega_\Lambda}}, \quad \Omega_{curv} = 0,$$

причём  $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ . Видно, что при больших  $\Omega_\Lambda$  (и, соответственно, меньших  $\Omega_M$ ) функция  $r(z)$  быстрее растёт с  $z$ ; удалённые сверхновые тусклее в модели  $\Lambda$ CDM по

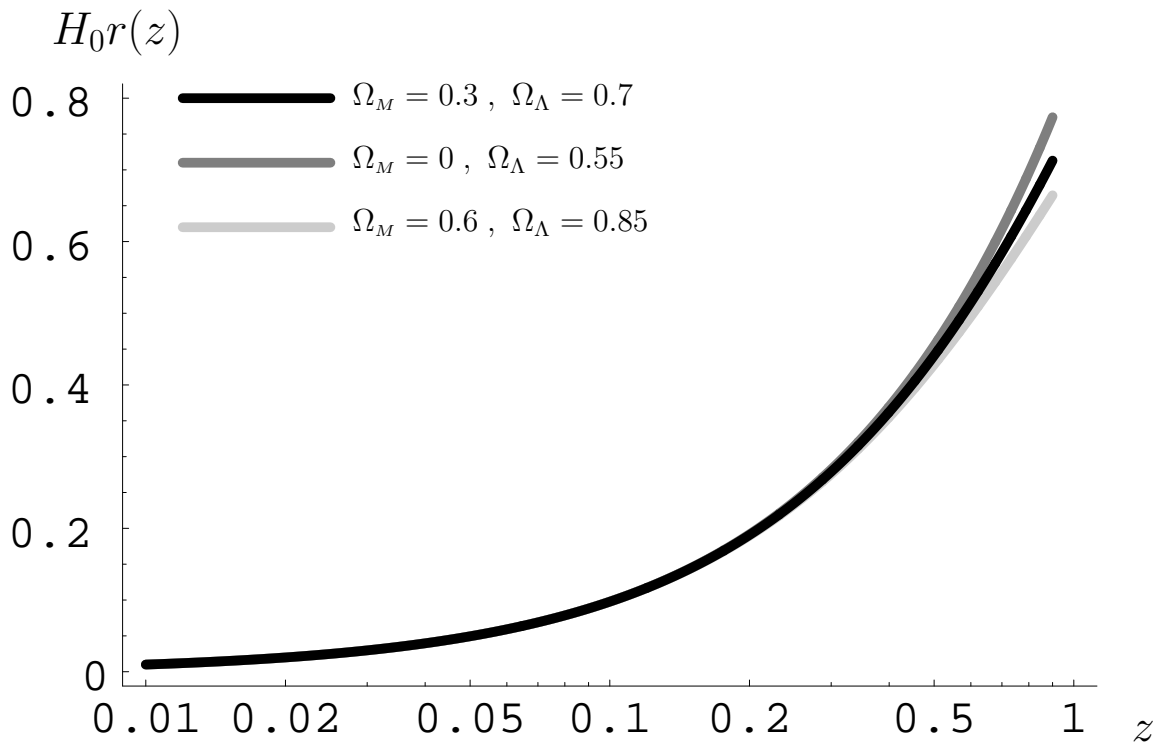


Рис. 4.3: Иллюстрация вырождения в пространстве параметров  $(\Omega_M, \Omega_\Lambda)$ . Случаи  $(\Omega_M = 0, \Omega_\Lambda = 0.55)$  и  $(\Omega_M = 0.6, \Omega_\Lambda = 0.85)$  соответствуют открытой и замкнутой моделям, причём  $\Omega_{curv} = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$ .

сравнению с плоской моделью без  $\Lambda$ -члена. Именно это и обнаружено в реальных наблюдениях, см. рис. 4.4, 4.5.

Далее, чёрная и светло-серая кривые на рис. 4.2, соответствующие модели  $\Lambda$ CDM и модели без космологической постоянной, но с пространственной кривизной, также довольно сильно различаются уже при умеренных  $z$ . Поэтому модель с  $\Omega_\Lambda = 0$ ,  $\Omega_{curv} = 0.76$  также противоречит наблюдениям. Вообще, данные по сверхновым типа Ia несовместны с моделями без космологического  $\Lambda$ -члена<sup>5</sup>, см. рис. 4.4, 4.5, 4.6.

Это — один из самых сильных аргументов в пользу существования тёмной энергии, полученных в рамках измерений одного класса (а не из сравнения результатов разных наблюдений).

Обратимся теперь к рис. 4.3. Он приведён для того, чтобы показать, что модели с заметно различающимися параметрами приводят к очень похожим результатам при умеренных  $z$ . Ясно, что объекты с очень большими красными смещениями, находящиеся на сверхдальних расстояниях, наблюдать крайне трудно, поэтому именно случай умеренных  $z$  представляет особый интерес. Здесь мы сталкиваемся с примером приближённого вырождения по параметрам. Чтобы понять, в чём дело, найдём первую поправку по  $z$  к закону Хаббла. Учтём, что  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M - \Omega_{curv}$ , и запишем в квадратичном порядке по  $z$

$$\chi(z) = \frac{1}{a_0 H_0} \left[ z - \frac{z^2}{4} (3\Omega_M + 2\Omega_{curv}) \right].$$

<sup>5</sup>Если не рассматривать маловероятную возможность того, что в самих этих данных имеются сильные систематические погрешности.

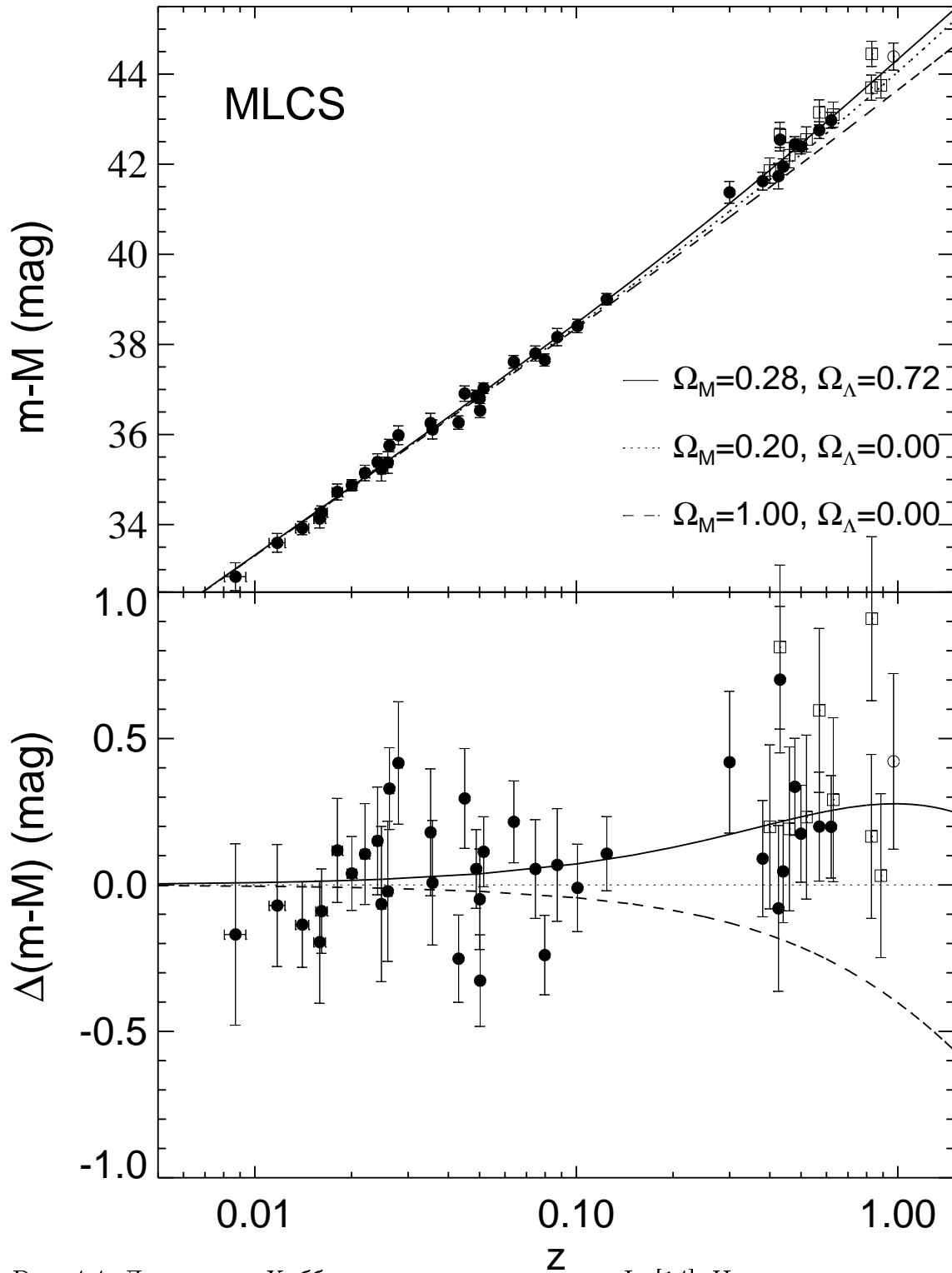


Рис. 4.4: Диаграмма Хаббла для сверхновых типа Ia [14]. На верхнем рисунке приведено распределение наблюдавшихся сверхновых по яркости (с поправкой на собственную светимость). На нижнем рисунке проиллюстрировано отличие наблюдений и предсказаний различных космологических моделей от предсказания модели CDM с пространственной кривизной ( $\Omega_M = 0.2, \Omega_\Lambda = 0, \Omega_{curv} = 0.8$ ). Обозначение на оси ординат связано с используемой в астрономии характеристикой видимой яркости — звёздной величиной. Фигурирующая здесь разность  $(m - M)$  связана с фотометрическим расстоянием  $r_{ph}$  соотношением  $m - M = 5 \ln r_{ph} + 25$ . Большие  $(m - M)$  соответствуют более тусклым объектам.

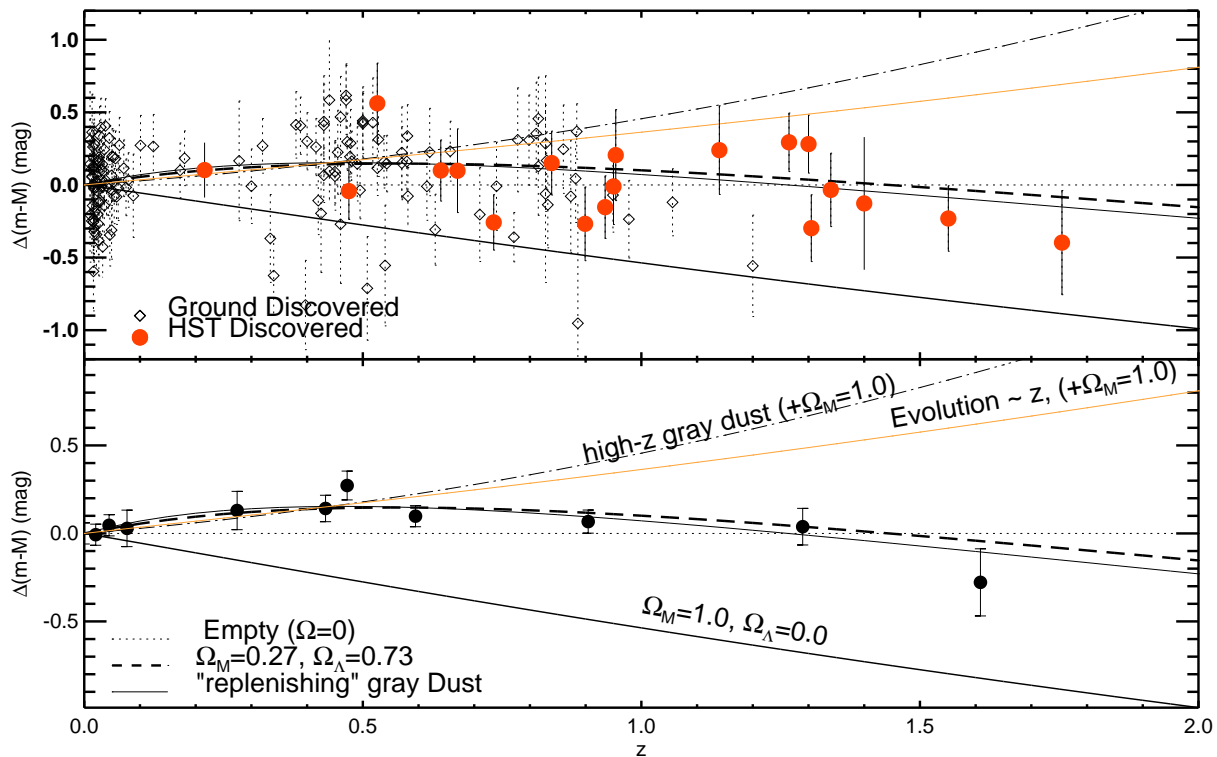


Рис. 4.5: Диаграммы [15], иллюстрирующие различные варианты объяснения результатов наблюдений удалённых сверхновых типа Ia. На диаграммах приведены отклонения кривых потускнения от соответствующей кривой в пустой Вселенной с пространственной кривизной ( $\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$ ,  $\Omega_{curv} = 1$ ; напомним, что такая Вселенная расширяется с постоянной скоростью,  $\dot{a} = 0$ ). Среди космологических моделей рассмотрены модель  $\Lambda$ CDM ( $\Omega_M = 0.27$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.73$ ) и модель CDM без космологической постоянной ( $\Omega_M = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ). Среди эволюционных моделей рассмотрена модель со сверхновыми, чья собственная светимость падает пропорционально  $z$  (в модели CDM). Среди моделей с нестандартной межгалактической средой представлены модели с “пылью”, поглощающей излучение, которая приводит к эффективному потускнению далёких сверхновых; рассмотрены модели с плотностью “пыли”  $\rho(z) = \rho_0(1+z)^\alpha$ , где  $\alpha = 3$  (штрих-пунктирная линия) и  $\alpha = 3$  при  $z < 0.5$  с  $\alpha = 0$  при остальных  $z$  (тонкая сплошная линия). На верхнем рисунке приведены результаты наблюдений далёких сверхновых, осуществлённых на космическом телескопе Хаббла (кружки) и наземных телескопах (ромбики); для иллюстрации на нижнем рисунке эти результаты усреднены по определённым интервалам красного смещения  $z$ . Отметим, что в независимых наблюдениях сверхновых типа Ia [16] получены результаты, согласующиеся с приведёнными на этом рисунке.

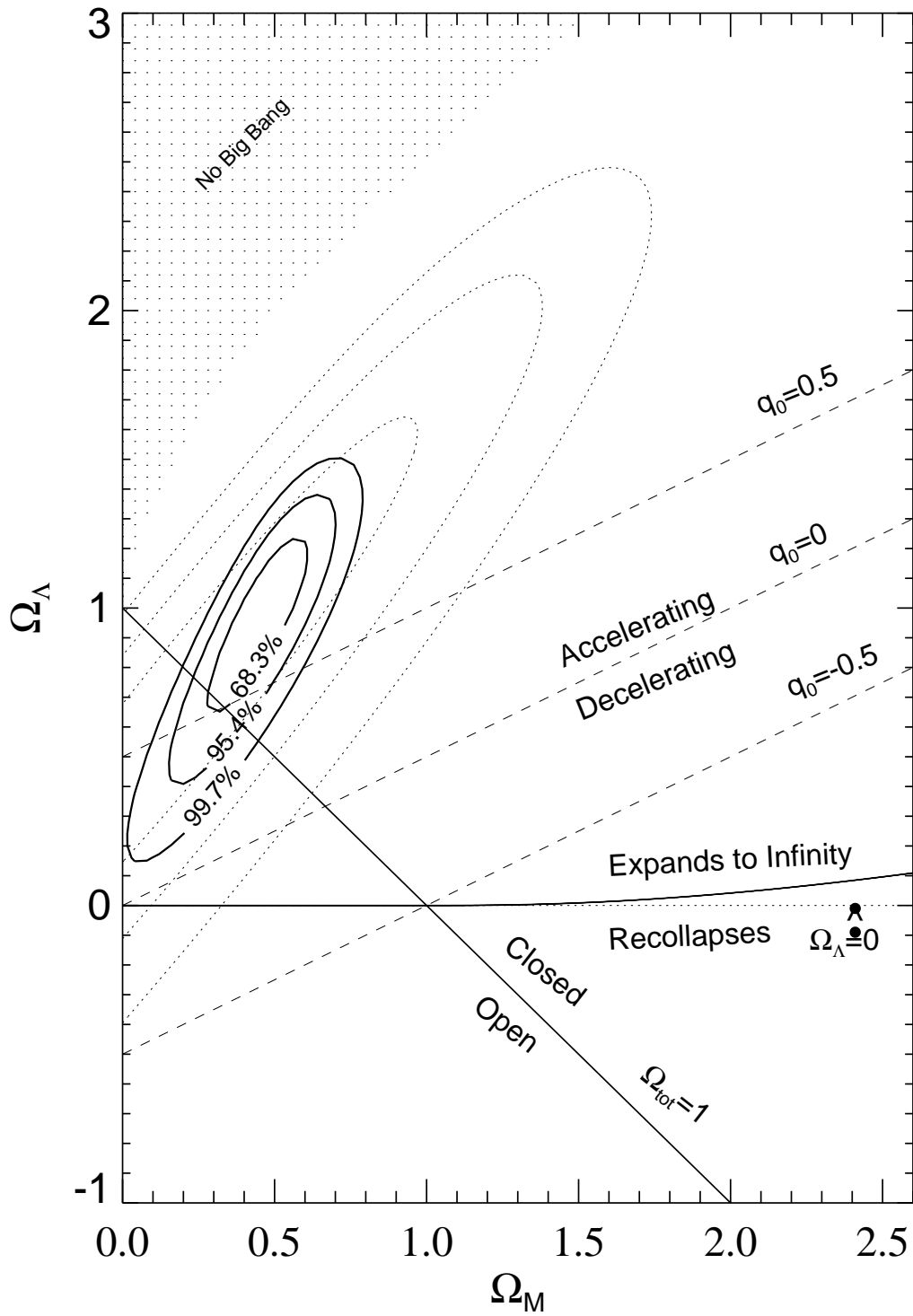


Рис. 4.6: Области в пространстве космологических параметров  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ , согласующиеся с наблюдениями сверхновых типа Ia [15]: пунктиром обозначены контуры, относящиеся к более ранним наблюдениям, а сплошной линией отмечены доверительные области, относящиеся к более поздним наблюдениям далёких сверхновых (приведённым на рис. 4.5). Видно, что результаты различных наблюдений (и, вообще говоря, несколько различного анализа этих наблюдений) хорошо согласуются друг с другом. Отметим, что на этом рисунке  $q_0$  обозначает параметр замедления, отличающийся знаком от параметра ускорения, определенного в (4.45).

В этом порядке  $r(z) = a_0\chi(z) + \mathcal{O}(z^3)$ , поэтому в квадратичном порядке по  $z$

$$r(z) = \frac{1}{H_0} \left[ z - \frac{z^2}{4}(3\Omega_M + 2\Omega_{curv}) \right]. \quad (4.44)$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой искомую поправку. Из выражения (4.44) видно, что она зависит только от комбинации  $(3\Omega_M + 2\Omega_{curv})$  или, в терминах  $\Omega_M$  и  $\Omega_\Lambda$ , от комбинации  $(\Omega_M - 2\Omega_\Lambda)$ , а не от  $\Omega_M$  и  $\Omega_\Lambda$  по отдельности. Отсюда и вырождение по параметрам при малых  $z$ . Для исследования вырождения при умеренных  $z$  требуется в формуле (4.44) учесть следующие члены в разложении по  $z$ . При этом зависящие от  $(\Omega_M - 2\Omega_\Lambda)$  вклады порядка  $z^2$  и  $z^3$  эффективно компенсируются в интересной области космологических параметров. Оставшийся некомпенсированным вклад порядка  $z^3$  определяется другой линейной комбинацией,  $(2\Omega_M - \Omega_\Lambda)$ , и именно к ней чувствительны эксперименты, в которых изучается закон Хаббла при умеренных  $z$ . Экспериментально эта линейная комбинация близка к нулю, а вдоль ортогональной к ней линейной комбинации имеется вырождение. При больших  $z$  вырождение снимается, но растут экспериментальные ошибки, так что разрешённая область параметров вытягивается вдоль линии  $2\Omega_M - \Omega_\Lambda = 0$ . Это хорошо видно на рис. 4.6.

▷ *Задача 8. Показать, что в третьем порядке по  $z$  вырождение по параметрам снимается, т.е.  $r(z)$ , определённое соотношением (4.38), содержит нетривиальную зависимость от всех трёх параметров  $H_0$ ,  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$ . Убедиться, что в интересной области космологических параметров при умеренных  $z$  остаётся приближённое вырождение вдоль линии  $2\Omega_M - \Omega_\Lambda = 0$ .*

В вырождении по параметрам нет ничего удивительного. Ясно, что в первую поправку по  $z$  к закону Хаббла, помимо современного значения параметра Хаббла, может входить лишь современное значение параметра ускорения. Последний определим как<sup>6</sup>

$$q_0 = \frac{1}{H_0^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right)_0 \quad (4.45)$$

Измеряя один параметр  $q_0$ , можно определить лишь одну из комбинаций  $\Omega_M$  и  $\Omega_\Lambda$ , а не оба этих независимых параметра сразу.

В связи с рис. 4.6 сделаем один общий комментарий. Мы довольно часто будем изображать области на плоскости параметров, разрешённые теми или иными наблюдениями. Если не оговорено противное, три вложенных друг в друга области будут соответствовать значениям параметров, разрешённым на уровне достоверности  $1\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $3\sigma$  в предположении нормального (гауссова) распределения для соответствующей величины, т.е. 68.3%, 95.4%, 99.7%.

▷ *Задача 9. Найти первую поправку по  $z$  к закону Хаббла, т.е. функцию  $r(z)$  с квадратичной точностью по  $z$ , в терминах  $H_0$  и  $q_0$ ; уравнение Фридмана при этом не использовать. Показать, что с учётом уравнения Фридмана соответствующее выражение сводится к (4.44).*

---

<sup>6</sup>В литературе традиционно используют параметр замедления, отличающийся знаком от параметра ускорения (4.45). Использовать параметр замедления для Вселенной, которая расширяется с ускорением, представляется неоправданным. Мы будем пользоваться определением (4.45).

Указанное приближённое вырождение по параметрам делает трудной задачей определение  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  и  $\Omega_{curv}$  только с помощью изучения стандартных свеч. В то же время, измерения анизотропии реликтового излучения дают сильное ограничение на  $\Omega_{curv}$ :  $|\Omega_{curv}| < 0.02$ . Используя это ограничение, можно с хорошей точностью восстановить  $\Omega_M$  и  $\Omega_\Lambda$  из измерений сверхновых типа Ia: на рис. 4.6, где прямая  $\Omega_{curv} = 0$  обозначена  $\Omega_{tot} = 1$ , видно, что наблюдения сверхновых дают

$$\begin{aligned} 0.23 < \Omega_M < 0.39 , \\ 0.77 > \Omega_\Lambda > 0.61 \end{aligned}$$

на 95% уровне достоверности.

В заключение этого раздела подчеркнём, что наблюдения удалённых сверхновых типа Ia, наряду с измерениями анизотропии реликтового излучения и исследованиями крупномасштабной структуры Вселенной, явились одним из главных свидетельств существования в природе тёмной энергии. Комбинация имеющихся результатов космологических наблюдений приводит к значениям

$$\begin{aligned} \Omega_M &= 0.24 \pm 0.04 , \\ \Omega_\Lambda &= 0.76 \pm 0.05 \end{aligned}$$

на уровне достоверности 68%.

Аналогичные наблюдения с большей точностью, а также при больших  $z$  позволяют, по-видимому, установить, зависит ли космологический  $\Lambda$ -член от времени (или поставить сильные ограничения на эту зависимость). Упомянем в этой связи, что все существующие данные не противоречат отсутствию такой зависимости (т.е. уравнению состояния тёмной энергии  $p = -\rho$ ), а для параметра  $w$  уравнения состояния тёмной энергии  $p = w\rho$  из этих данных следует ограничение (см. рис. 4.7)

$$-1.2 < w < -0.8 \quad (4.46)$$

Уточнение этого ограничения — одна из важных задач будущих наблюдений.

▷ *Задача 10.* Обобщить формулы этого раздела на случай тёмной энергии с уравнением состояния  $p = w\rho$ . Считая  $\Omega_{curv} = 0$  и  $\Omega_M = 0.25$ , нарисовать графики  $r(z)$  для  $w = -2$ ,  $w = -1.5$ ,  $w = -1$ ,  $w = -0.75$  и  $w = -0.5$ . Используя рис. 4.6, убедиться, что современные данные действительно позволяют получить ограничение на  $w$  на уровне, указанном в (4.46).

## 4.7 Угловые размеры удалённых объектов

Важной наблюдаемой характеристикой протяженного объекта (например, галактики) является его угловой размер. В связи с этим вводят понятие расстояния углового размера  $r_a$  (angular diameter distance), связывающего абсолютный диаметр объекта  $d$  с углом  $\Delta\theta$ , под которым объект наблюдается сегодня,

$$d = r_a(z) \cdot \Delta\theta ,$$

где  $z$  — красное смещение объекта. Чтобы найти выражение для  $r_a(z)$ , вновь вспомним, что в конформных координатах фотоны ведут себя так же, как в статической



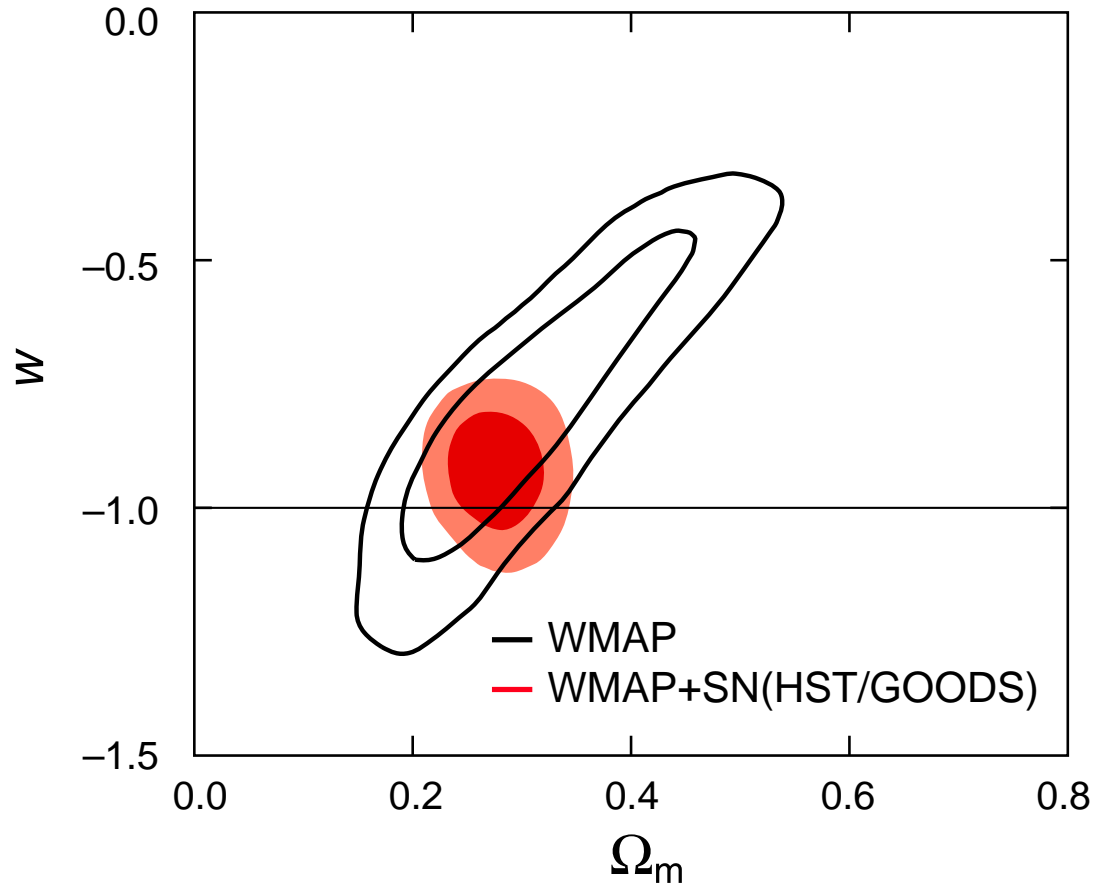


Рис. 4.7: Области в пространстве космологических параметров  $\Omega_m$ ,  $w$ , разрешённые результатами наблюдений анизотропии реликтового излучения (сплошные линии) и совместным анализом этих наблюдений с наблюдениями сверхновых типа Ia (тёмные области) [5]. Области меньшего и большего размеров соответствуют 68% и 95% уровням достоверности.

Вселенной, поэтому координатный размер объекта связан с его координатой  $\chi$  и угловым размером  $\Delta\theta$  соотношением

$$d_{conf} = \text{sh } \chi \cdot \Delta\theta .$$

Физический размер объекта, испускающего фотоны в момент времени  $t_i$ , равен

$$\begin{aligned} d &= a(t_i) d_{conf} \\ &= \frac{a(t_i)}{a_0} \cdot a_0 \text{sh } \chi \cdot \Delta\theta . \end{aligned}$$

Учитывая (4.38), получаем отсюда

$$r_a(z) = \frac{1}{1+z} r(z) ,$$

причём для  $r(z)$  справедливы формулы предыдущего раздела.

Расстояние углового размера растёт с  $z$  довольно медленно при умеренных  $z$  и даже падает при больших  $z$ , см. рис. 4.8. В то же время, фотометрическое расстояние

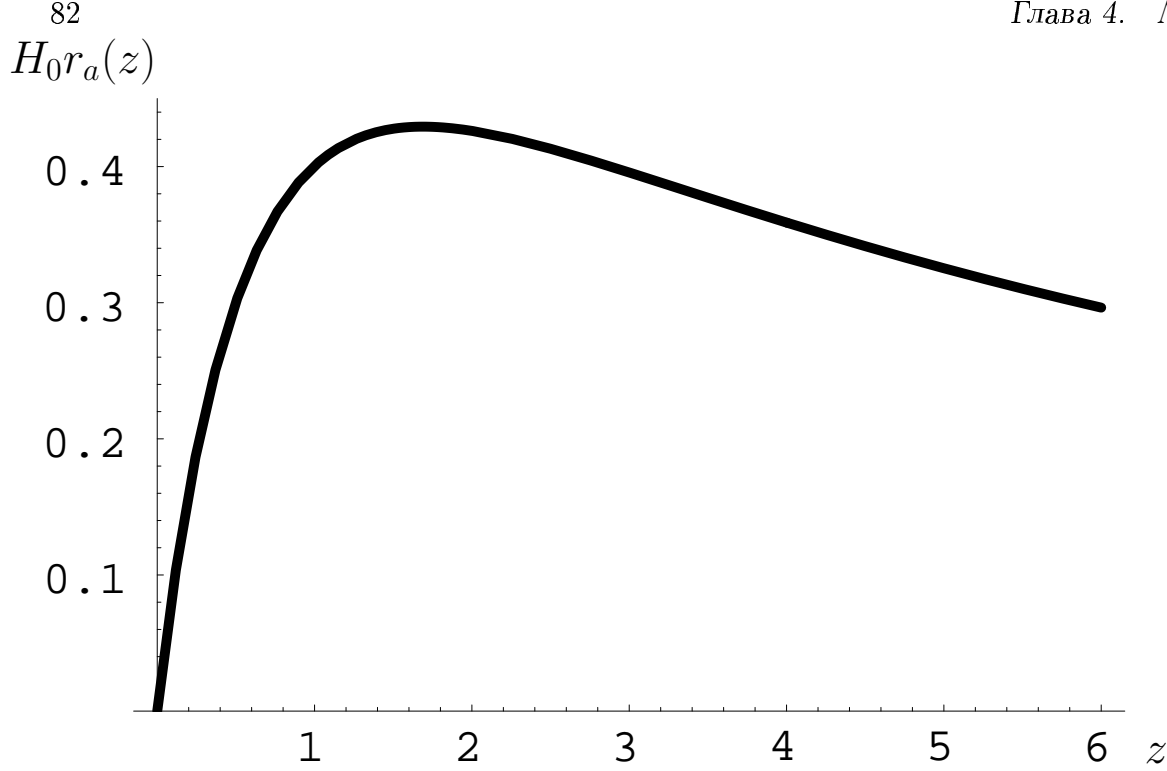


Рис. 4.8: Зависимость расстояния углового размера от  $z$  для модели  $\Lambda$ CDM ( $\Omega_M = 0.24$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.76$ ,  $\Omega_{curv} = 0$ ).

(4.40) растёт при всех  $z$ , и галактики становятся все более тусклыми. Для достаточно больших  $z$  большое удаление галактик от Земли проявляется не в малости их видимого размера, а в малости их поверхностной яркости (видимой яркости участка галактики единичного углового размера).

## 4.8 \*Квинтэссенция

Отличная от нуля космологическая постоянная — далеко не единственная возможная причина ускоренного расширения Вселенной в современную эпоху. В связи с этим и говорят в общем случае о “тёмной энергии”, ответственной за это явление. Природа тёмной энергии — одна из главных загадок современного естествознания. Неудивительно, что на эту тему было высказано множество гипотез. Одна из таких гипотез — существование “квинтэссенции” — однородного в пространстве поля, энергия которого выступает в роли тёмной энергии. В отличие от космологической постоянной, квинтэссенция является динамическим полем, и её плотность энергии зависит от времени. На языке эффективного уравнения состояния  $p = w\rho$  это означает, что  $w \neq -1$  и, вообще говоря,  $w$  зависит от времени.

В качестве квинтэссенции как правило (хотя и не всегда) рассматривают скалярное поле. В этом разделе мы обсудим один из классов таких моделей, но перед этим рассмотрим в общих чертах динамику однородного скалярного поля в расширяющейся Вселенной. Изложенные здесь результаты будут полезны, помимо рассмотрения моделей квинтэссенции, для обсуждения целого ряда других вопросов. В особенности важно понимание динамики скалярного поля для построения и изучения моделей инфляции.

### 4.8.1 Особенности эволюции однородного скалярного поля в расширяющейся Вселенной

Рассмотрим теорию вещественного скалярного поля с действием

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

где  $V(\varphi)$  — скалярный потенциал. Будем считать, что Вселенная — пространственно-плоская и описывается метрикой стандартного вида

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (4.48)$$

где  $a(t)$  — заданная функция времени.

Уравнение движения для скалярного поля получается, как обычно, варьированием действия (4.47) по  $\varphi$ , и имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}. \quad (4.49)$$

Рассмотрим однородное (не зависящее от пространственных координат) поле  $\varphi(t)$  в метрике (4.48). Для него уравнение (4.49) сводится к

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (4.50)$$

где, как обычно,  $H = \dot{a}/a$  — параметр Хаббла. Уравнение (4.50) совпадает с уравнением классической механики “частицы” с координатой  $\varphi$  в потенциале  $V(\varphi)$ , испытывающей трение с зависящим от времени коэффициентом трения  $H$ . В зависимости от соотношения между скатывающей силой и трением возможны два режима: (1) режим быстрого скатывания, когда  $H\dot{\varphi} \ll V'$  (штрих обозначает производную по  $\varphi$ ), трение мало, и “частица” быстро скатывается к точке минимума потенциала  $V(\varphi)$ ; (2) режим медленного скатывания, когда трение сильное, и частица практически покоится. Во втором режиме выполняется

$$H\dot{\varphi} \sim V'. \quad (4.51)$$

За хаббловское время  $H^{-1}$  значение поля меняется на

$$\delta\varphi \sim \dot{\varphi} H^{-1} \sim \frac{V'}{H^2}.$$

Это изменение мало по сравнению с самим значением поля, т.е.  $\delta\varphi \ll \varphi$ , при

$$\frac{V'}{\varphi} \ll H^2. \quad (4.52)$$

Для степенных потенциалов типа  $m^2\varphi^2$  или  $\lambda\varphi^4$  справедливо  $V' \sim V\varphi^{-1}$ , поэтому условие режима медленного скатывания имеет вид

$$\frac{V}{\varphi^2} \ll H^2. \quad (4.53)$$

Итак, для степенных потенциалов при выполнении условия (4.53) значение поля остаётся практически неизменным при эволюции Вселенной, а при выполнении обратного неравенства поле быстро меняется с течением времени и скатывается к минимуму потенциала  $V(\varphi)$ .

▷ *Задача 11.* Показать, что для степенной зависимости масштабного фактора от времени  $a(t) = t^\alpha$ ,  $\alpha > 1/3$ , решение уравнения (4.50) в режиме медленного скатывания имеет вид

$$\varphi = \varphi_i + C \cdot (t^2 - t_i^2) + d \cdot \left[ 1 - \left( \frac{t}{t_i} \right)^{3\alpha-1} \right], \quad (4.54)$$

где  $\varphi_i$  — начальное значение,  $\varphi_i = \varphi(t_i)$ . Считая, что  $\dot{\varphi}(t_i) \ll H(t_i)\varphi(t_i)$ , найти значения констант  $C$  и  $d$ , выразив их через  $\varphi_i$  и  $\dot{\varphi}(t_i)$ . Убедиться, что при указанном предположении третий член в (4.54) всегда мал. Найти, при каких временах  $t$  второй член в (4.54) мал по сравнению с начальным значением  $\varphi_i$  и убедиться, что для степенных потенциалов это условие совпадает с (4.53), а в общем случае с (4.52). Убедиться, что при этих временах выполняется соотношение (4.51), а также  $\ddot{\varphi} \sim H\dot{\varphi}$ . Из последнего соотношения видно, что за хаббловское время относительное изменение скорости  $\dot{\varphi}$  не мало, но сама скорость остаётся малой (последнее свойство характерно лишь для степенных  $a(t)$ ).

Хотя нам в этой Главе поведение скалярного поля вблизи минимума скалярного потенциала не понадобится, обсудим для полноты, как в расширяющейся Вселенной происходит приближение  $\varphi(t)$  к этому минимуму. Будем считать, что потенциал  $V(\varphi)$  имеет минимум при  $\varphi = 0$ , а вблизи минимума равен

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2} \varphi^2. \quad (4.55)$$

Тогда уравнение (4.50) вблизи минимума потенциала имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} + m^2\varphi = 0. \quad (4.56)$$

Для анализа подобных уравнений полезно избавиться от члена с трением и перейти к уравнению осциллятора с переменной частотой (ср. с концом раздела 2.3). В данном случае замена имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^{3/2}(t)} \cdot \chi(t),$$

где  $\chi$  — новая неизвестная функция, удовлетворяющая, как следует из (4.56), уравнению

$$\ddot{\chi} + \left( m^2 - \frac{3\ddot{a}}{2a} - \frac{3\dot{a}^2}{4a^2} \right) \chi = 0. \quad (4.57)$$

Отметим, что

$$\frac{\ddot{a}}{a} \sim \frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2.$$

Из (4.57) видно, что массой  $m$  можно пренебречь при  $m^2 \ll H^2$ . В этом случае для потенциала (4.55) выполняется условие (4.53), и мы возвращаемся к режиму медленного скатывания.

▷ *Задача 12.* Получить результаты предыдущей задачи, исходя из уравнения (4.57).

Нас сейчас интересует обратный режим,  $m^2 \gg H^2$ . В этом случае членами порядка  $H^2$  в скобке в (4.57) можно пренебречь, и решение имеет вид  $\chi = \text{const} \cdot \cos(mt + \beta)$ , где  $\beta$  — произвольная фаза. Итак, при  $m^2 \gg H^2$  приближение к минимуму происходит по закону

$$\varphi(t) = \varphi_* \cdot \frac{\cos(mt + \beta)}{a^{3/2}(t)}, \quad (4.58)$$

где  $\varphi_*$  — некоторая постоянная. Поле осциллирует вблизи минимума с уменьшающейся амплитудой. Отметим, что относительное изменение амплитуды за период осцилляций по порядку величины равно

$$\frac{\dot{a}}{a} \cdot m^{-1} \sim \frac{H}{m}$$

и мало в интересующем нас случае  $m \gg H$ .

Решение (4.58) можно получить и из энергетических соображений. В однородной изотропной Вселенной с метрикой (4.48) действие (4.47) в случае свободного массивного скалярного поля имеет вид

$$S = \int d^4x \cdot a^3 \cdot \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2a^2} (\partial_i \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right).$$

При масштабном факторе, не зависящем от времени, сохраняется энергия

$$E = \int d^3\mathbf{x} \cdot a^3 \cdot \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right),$$

где мы считаем поле однородным, как и всюду в этом разделе. При этом решения уравнения поля осциллируют с частотой  $m$ , то есть  $\varphi \propto \cos(mt + \beta)$ . При медленном (адиабатическом) изменении  $a$  со временем, осцилляционный характер решений сохраняется; сохраняется (конечно, приближённо) и энергия, как это известно из классической механики. Отсюда следует, что

$$a^3(t) \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right) = \text{const}. \quad (4.59)$$

Это и означает, что амплитуда поля падает как  $a^{-3/2}$ , т.е. мы приходим к решению (4.58). Отметим, что приближённый закон сохранения (4.59) соответствует сохранению энергии в сопутствующем объёме, также приближённо. Отметим ещё, что в общем случае произвольно быстрого изменения  $a(t)$  не существует даже приближённого интеграла движения типа энергии: в зависящих от времени внешних полях (в данном случае  $a(t)$ ) энергия не сохраняется. Говорить об энергии во всей Вселенной (с учётом энергии гравитационного поля) смысла не имеет: такого интеграла движения в общей теории относительности нет.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>В общей теории относительности можно, тем не менее, ввести понятие полной энергии (с учётом гравитационного поля) в специальных случаях, одним из которых является асимптотически плоское пространство-время. Поэтому понятие энергии (массы) тяготеющего тела, вдали от которого пространство-время имеет геометрию Минковского, хорошо определено.

В заключение этого раздела найдём тензор энергии-импульса скалярного поля в различных режимах. Общее выражение для тензора энергии-импульса теории с действием (4.47) имеет вид

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} . \end{aligned} \quad (4.60)$$

В случае однородного поля с потенциалом  $V(\varphi)$  имеем в локально-лоренцевой системе (т.е. полагая мгновенное значение  $g_{\mu\nu}$  в (4.60) равным  $\eta_{\mu\nu}$ ) следующие выражения для ненулевых компонент

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \equiv \rho_\varphi , \\ T_{ij} &= \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right) \delta_{ij} \equiv p_\varphi \delta_{ij} . \end{aligned} \quad (4.61)$$

В режиме медленного скатывания имеем с учётом (4.51)

$$\dot{\varphi}^2 \sim \frac{V'^2}{H^2} \ll V' \cdot \varphi , \quad (4.62)$$

где при получении неравенства мы учли (4.52). Для степенных потенциалов справедливо  $V' \varphi \sim V$ , поэтому из (4.62) имеем

$$\dot{\varphi}^2 \ll V .$$

Следовательно, в режиме медленного скатывания

$$\rho_\varphi \approx -p_\varphi \approx V(\varphi) , \quad (4.63)$$

т.е. уравнение состояния приближённо совпадает с вакуумным,  $p \approx -\rho$  (хотя, как видно из (4.61), всегда имеет место неравенство  $p > -\rho$ ).

В режиме быстрых осцилляций вокруг минимума скалярного потенциала используем (4.55), и с учётом (4.58) получим

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{m^2 \varphi_*^2}{2} \cdot \frac{1}{a^3(t)} , \\ T_{ij} &= -\frac{m^2 \varphi_*^2}{2} \frac{1}{a^3} \cos(2mt + 2\beta) \cdot \delta_{ij} , \end{aligned}$$

где мы вновь использовали соотношение  $H \ll m$ . Усреднённые за период осцилляций значения плотности энергии и давления равны, таким образом,

$$\begin{aligned} T_{00} &\equiv \rho_\varphi = \frac{m^2 \varphi_*^2}{2} \cdot \frac{1}{a^3(t)} , \\ T_{ij} &\equiv p_\varphi \cdot \delta_{ij} = 0 . \end{aligned} \quad (4.64)$$

Итак, усреднённый за период осцилляций тензор энергии-импульса когерентных осцилляций однородного скалярного поля совпадает с тензором энергии-импульса нерелятивистского вещества: давление равно нулю, а энергия падает как  $a^{-3}(t)$ . Как

мы уже отмечали, последнее свойство отвечает сохранению энергии в сопутствующем объёме, см. (4.59).

С точки зрения квантовой теории поля однородное осциллирующее поле (4.58) можно воспринимать как набор покоящихся свободных частиц массы  $m$  в когерентном состоянии. Плотность числа этих частиц равна

$$n = \frac{\rho}{m} = \frac{1}{2} m^2 \varphi_*^2 \cdot \frac{1}{a^3(t)} .$$

Как и любая плотность числа невзаимодействующих частиц,  $n(t)$  убывает как  $a^{-3}(t)$ . Равенство нулю давления естественным образом интерпретируется как проявление того факта, что частицы, будучи покоящимися, являются, конечно, нерелятивистскими.

## 4.8.2 Ускоренное расширение Вселенной за счёт скалярного поля

Ускоренное расширение Вселенной в современную эпоху можно объяснить, введя скалярное поле  $\varphi$  (квинтэссенцию) с действием (4.47) и подобрав потенциал  $V(\varphi)$  и современное значение поля  $\varphi$  так, чтобы эволюция поля  $\varphi(t)$  происходила сегодня в режиме медленного скатывания. При этом необходимо предположить, что поле  $\varphi$  однородно в пространстве; такие начальные данные естественным образом следуют из инфляционной теории, поэтому такое предположение особенной трудности не представляет.

В режиме медленного скатывания эффективное уравнение состояния для скалярного поля имеет вид  $p_\varphi \approx -\rho_\varphi$ , см. (4.63). Поэтому Вселенная действительно расширяется с ускорением, если доминирующий вклад в плотность энергии вносит само скалярное поле. Найдём, при каких условиях режим медленного скатывания действительно реализуется. Для определённости будем считать, что при современном значении  $\varphi$  главный вклад в  $V(\varphi)$  является степенным, т.е.  $V(\varphi) \propto \varphi^k$  и  $|k|$  не слишком велико. Тогда условие медленного скатывания имеет вид (4.53). Поскольку плотность энергии во Вселенной в основном определяется плотностью энергии скалярного поля, уравнение Фридмана имеет вид

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \rho_\varphi \\ &= \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} V(\varphi) , \end{aligned} \tag{4.65}$$

где мы воспользовались (4.63). Комбинируя (4.53) и (4.65) получаем

$$\varphi \gg M_{Pl} . \tag{4.66}$$

Это и есть условие медленного скатывания (для степенных потенциалов).

Несмотря на то, что значение поля  $\varphi$  сегодня чрезвычайно велико, сам потенциал  $V(\varphi)$  должен быть при этом очень мал,

$$V(\varphi) \sim \rho_c$$

(точнее,  $V(\varphi) = 0.76\rho_c$ ). Для степенного (и не только степенного) потенциала это означает, что потенциал должен быть чрезвычайно плоским. Например, в случае  $V(\varphi) = m^2 \varphi^2$  требуется

$$m \lesssim \frac{\sqrt{\rho_c}}{M_{Pl}} \sim 10^{-33} \text{ эВ} ,$$

а в случае  $V(\varphi) = \lambda\varphi^4$  необходимо

$$\lambda \lesssim 10^{-122}.$$

Таким образом, идея о квинтэссенции работает только при весьма экзотических предположениях о свойствах скалярного потенциала при значениях полей  $\varphi \gtrsim M_{Pl}$ .

Достоинством моделей квинтэссенции служит то, что они в принципе доступны проверке с помощью космологических наблюдений. В случае квинтэссенции соотношение  $p = -\rho$  для тёмной энергии *не является* точным, и поэтому эволюция Вселенной в прошлом отличается, вообще говоря, от эволюции Вселенной с космологической постоянной.

▷ *Задача 13. В случае потенциала  $V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2$  найти современное значение параметра  $w$ , входящего в уравнение состояния  $p = w\rho$ , в зависимости от современного значения  $\varphi = \varphi_0$ . Подбрав значение  $\varphi_0$  так, чтобы современное значение  $w$  было равно  $w_0 = 0.9$ , найти  $w(z)$  как функцию красного смещения при  $2 > z > 0$ . Указание: считать, что сегодня  $\Omega_\varphi \equiv \Omega_\Lambda = 0.76$ ,  $\Omega_M = 0.24$ ; воспользоваться тем, что изменение скалярного поля со временем — медленное.*

▷ *Задача 14. В условиях предыдущей задачи и с  $w_0 = 0.9$  найти численно зависимость  $r_{ph}(z)$  фотометрического расстояния от красного смещения (см. раздел 4.6). Построить график, аналогичный рис. 4.2, и сравнить с графиком  $\Omega_M = 0.24$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.76$  для не зависящей от времени  $\Lambda$ .*

Отметим, что в моделях с квинтэссенцией будущее Вселенной, вообще говоря, отличается от будущего Вселенной с космологической постоянной (см. обсуждение во Введении). Особенно сильно это отличие для моделей, в которых скатывание поля  $\varphi(t)$  происходит к отрицательным значениям потенциала  $V(\varphi)$ : в этом случае расширение Вселенной может смениться сжатием.

▷ *Задача 15. Считая, что сегодня  $\varphi = \varphi_0 \gg M_{Pl}$ , проанализировать будущее Вселенной в случае потенциала  $V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \epsilon\varphi$ , где  $\epsilon \ll m^2 M_{Pl}$  — малый параметр, а  $m$  — такое, что  $V(\varphi_0) \sim \rho_c$ . Указание: воспользоваться результатами раздела 4.8.1.*

Подчеркнём, что модели квинтэссенции, вообще говоря, не дают решения проблемы космологической постоянной. Они лишь подразумевают деление этой проблемы на две части — на вопрос о том, почему “истинная” космологическая постоянная (энергия вакуума) равна нулю и вопрос о том, почему столь мала плотность тёмной энергии — квинтэссенции. Ответа на первый вопрос модели квинтэссенции не дают *в принципе*; второй вопрос связан с *натуральностью* подбора параметров скалярного потенциала. Кроме того, в моделях квинтэссенции имеется вопрос о том, что обеспечивает “правильное” современное значение скалярного поля. Возможный ответ на последний вопрос дают модели “следающего поля”, которые мы сейчас вкратце обсудим.



### 4.8.3 Следящее поле

Рассмотрим один из классов моделей квинтэссенции — модели следящего (tracker) поля. Выберем потенциал скалярного поля в виде<sup>8</sup>

$$V(\varphi) = \frac{M^{n+4}}{n\varphi^n} ,$$

где  $M$  — параметр размерности массы и  $n > 2$  — численный параметр. На радиационно-доминированной или пылевидной стадии, когда  $a(t) \propto t^\alpha$ , уравнение скалярного поля (4.50) имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{3\alpha}{t}\dot{\varphi} - \frac{M^{n+4}}{\varphi^{n+1}} = 0 . \quad (4.67)$$

Оно имеет специальное “следящее” решение (tracker solution)

$$\varphi^{(tr)}(t) = CM^{1+\nu}t^\nu , \quad (4.68)$$

где

$$\nu = \frac{2}{n+2} , \quad (4.69)$$

а  $C = C(n, \alpha)$  определяется из уравнения (4.67).

▷ *Задача 16. Показать, что (4.68) действительно является решением уравнения (4.67). Найти  $C(n, \alpha)$ , входящее в (4.68).*

Решение (4.68) является аттрактором: если в начальный момент  $t_i$  поле  $\varphi_i$  было меньше, чем решение (4.68) в этот же момент,  $\varphi_i < \varphi^{(tr)}(t_i)$ , то скатывающая сила

$$\mathcal{F}(\varphi) \equiv -V'(\varphi) = \frac{M^{n+4}}{\varphi^{n+1}}$$

превышает скатывающую силу на решении (4.68) в начальный и последующие моменты времени,

$$\mathcal{F}(\varphi(t)) > \mathcal{F}(\varphi^{(tr)}(t)) .$$

Поэтому решение с начальным значением  $\varphi_i < \varphi^{(tr)}(t_i)$  догоняет следящее решение (4.68). Наоборот, решение с  $\varphi_i > \varphi^{(tr)}(t_i)$  скатывается медленнее, чем следящее решение, и последнее настигает решение с начальным значением  $\varphi_i$ . Это и означает, что решение (4.68) является аттрактором: в достаточно широком классе начальных данных решения стремятся к (4.68) при больших временах; эволюция поля  $\varphi$  по существу не зависит от начальных данных и описывается решением (4.68).

Для решения (4.68) справедливо (обозначение  $(tr)$  в дальнейшем опускаем)

$$\dot{\varphi}^2 \sim V(\varphi) \propto \frac{1}{t^{2-2\nu}} .$$

Видно, во-первых, что поле эволюционирует *не* в режиме медленного скатывания. Во-вторых, плотность энергии  $\rho_\varphi$  (см. (4.61)) убывает со временем медленнее, чем

---

<sup>8</sup>С точки зрения физики частиц такие потенциалы являются весьма экзотическими.

плотность энергии доминирующей материи (радиации или пыли): последняя убывает как  $H^2 \propto t^{-2}$ . Относительная доля поля  $\varphi$  в полной плотности энергии возрастает со временем как  $t^{2\nu}$ . В-третьих, поскольку  $a \propto t^\alpha$ , получаем

$$\rho_\varphi \propto \frac{1}{a^{\frac{2-2\nu}{\alpha}}}.$$

Учитывая соотношение (3.38), имеем следующее выражение для параметра  $w_\varphi$ , входящего в эффективное уравнение состояния следящего поля  $p_\varphi = w_\varphi \rho_\varphi$ ,

$$w_\varphi = -1 + \frac{2}{3} \frac{1-\nu}{\alpha}.$$

Воспользовавшись (4.69) и результатами раздела 3.2.4, получаем

$$w_\varphi = w \frac{n}{n+2} - \frac{2}{n+2}, \quad (4.70)$$

где  $w$  — параметр уравнения состояния доминирующей материи ( $w = \frac{1}{3}$  и  $w = 0$  для радиации и пыли, соответственно). Таким образом, уравнение состояния следящего поля зависит от уравнения состояния доминирующей материи. Отсюда и происхождение термина “следящее поле”. Отметим, что при больших  $n$  уравнение состояния следящего поля близко к уравнению состояния доминирующей материи,  $w_\varphi \approx w$ .

▷ *Задача 17. Вычислив давление и плотность энергии путём подстановки решения (4.68) в выражения (4.61), убедиться в справедливости (4.70) независимым образом.*

▷ *Задача 18. Показать, что для решения (4.68) справедливо  $V'' \propto H^2$  как на радиационно-доминированной, так и на пылевидной стадии. Это — ещё одна причина использования термина “следящее поле”.*

Решение (4.68) справедливо в те времена, когда плотность энергии следящего поля всё ещё мала по сравнению с плотностью энергии доминирующей материи. Относительный вклад следящего поля в полную плотность энергии растёт, и в какой-то момент начинает доминировать само следящее поле; после этого решение (4.68) перестаёт быть справедливым. Значение поля в этот момент найдём, воспользовавшись тем, что

$$V(\varphi) \sim \dot{\varphi}^2 \sim \frac{\varphi^2}{t^2},$$

т.е.

$$\rho_\varphi \sim \frac{\varphi^2}{t^2}.$$

Плотность энергии материи при этом равна

$$\rho_M = \frac{3}{8\pi} M_{Pl}^2 H^2(t) \sim \frac{M_{Pl}^2}{t^2}.$$

Из требования  $\rho_\varphi \sim \rho_M$  получим, что следящее поле начинает доминировать при

$$\varphi \sim M_{Pl}.$$

Отсюда, кстати, видно, что начальное значение поля, хотя и может быть достаточно произвольным, должно удовлетворять условию  $\varphi_i \ll M_{Pl}$ .

В более поздние времена поле  $\varphi(t)$  растёт, и довольно скоро начинает выполняться соотношение (4.66), т.е. эволюция  $\varphi$  переходит в режим медленного скатывания, а эволюция Вселенной — в режим ускоренного расширения.

Разумеется, в период перехода от доминирования материи к доминированию следящего поля и некоторое время после этого эволюция Вселенной довольно сильно отличается от эволюции Вселенной с не зависящей от времени космологической постоянной. Поэтому вполне реальной является возможность подтвердить или опровергнуть модель следящего поля путём космологических наблюдений. Существующие данные не исключают пока ни космологической постоянной (не зависящей от времени), ни модели следящего поля; совместны они и с целым рядом других моделей квинтэссенции.

▷ *Задача 19. Оценить для различных  $n$ , при каких значениях  $M$  модель следящего поля согласуется с реальной картиной ускоренного расширения Вселенной.*

## Глава 5

# Термодинамика в расширяющейся Вселенной

### 5.1 Функции распределения бозонов и фермионов

На протяжении ряда Глав мы будем рассматривать процессы, происходящие в расширяющейся Вселенной, которая заполнена горячей плазмой, состоящей из различных взаимодействующих между собой частиц. Как мы увидим в дальнейшем, скорость протекания взаимодействий между этими частицами во многих случаях выше темпа расширения Вселенной, так что можно считать, что в каждый момент времени Вселенная находится в термодинамическом равновесии. Поэтому нам понадобится ряд основных соотношений и формул равновесной термодинамики, которые мы и приводим в настоящем разделе. Стоит отметить, что, как правило, наиболее интересными моментами являются те, когда та или иная реакция выходит из равновесия (“вымораживается”). Равновесные термодинамические законы обычно оказываются полезными для качественного описания и такой ситуации — они позволяют оценить момент времени, когда происходит выход из равновесия, и определить направление того или иного неравновесного процесса.

В ранней Вселенной вещество находится в очень горячем и плотном состоянии, так что интенсивно идут процессы с изменением числа частиц и с нарушением квантовых чисел, сохраняющихся в обычных условиях. Например, как мы обсудим в разделе 11, при температуре  $T \gtrsim 100$  ГэВ активно идут реакции с изменением барионного числа. Для термодинамического описания такой системы необходимо ввести для каждого типа частиц свой химический потенциал  $\mu$ . При этом, если имеется реакция вида

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \longleftrightarrow B_1 + B_2 + \cdots + B_{n'} , \quad (5.1)$$

где  $A_i, B_j$  — различные типы частиц, то для соответствующих химических потенциалов в термодинамическом равновесии<sup>1</sup> справедливо свойство

$$\mu_{A_1} + \mu_{A_2} + \cdots + \mu_{A_n} = \mu_{B_1} + \mu_{B_2} + \cdots + \mu_{B_{n'}} , \quad (5.2)$$

Так, к примеру, в любой реакции, где участвует хотя бы одна заряженная частица, всегда имеется возможность испустить дополнительный фотон (например, возможна реакция  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-\gamma$ ). Поэтому из уравнения (5.2) следует, что химический

---

<sup>1</sup>Точнее, равенство (5.2) справедливо, когда реакция (5.1) находится в *химическом* равновесии, т.е. когда скорость её протекания выше характерной скорости изменения параметров системы (например, темпа расширения Вселенной).

потенциал фотона равен нулю,

$$\mu_\gamma = 0 .$$

В качестве другого применения соотношения (5.2) рассмотрим реакцию аннигиляции электрон-позитронной пары в два фотона

$$e^+ + e^- \leftrightarrow 2\gamma .$$

Поскольку  $\mu_\gamma = 0$ , из возможности такой реакции следует, что

$$\mu_{e^-} + \mu_{e^+} = 0 .$$

Ясно, что такое же соотношение справедливо для любых других частиц и античастиц, поскольку для них всегда имеется возможность проаннигилировать в фотоны. Таким образом, химический потенциал любой античастицы равен химическому потенциалу соответствующей частицы, взятому с обратным знаком.

В равновесной среде со многими типами частиц удобный способ учета всех реакций типа (5.1) состоит во введении независимых химических потенциалов  $\mu_i$  только к *сохраняющимся* квантовым числам  $Q^{(i)}$ . При этом  $Q^{(i)}$  должны быть независимы друг от друга и должны образовывать полный набор сохраняющихся чисел. Химический потенциал для частиц типа  $A$  равен

$$\mu_A = \sum_i \mu_i Q_A^{(i)} , \quad (5.3)$$

где  $Q_A^{(i)}$  — квантовые числа, которые несёт частица типа  $A$ . Например, при температурах  $200 \text{ МэВ} \ll T \ll 100 \text{ ГэВ}$  сохраняющимися числами являются барионное число  $B$ , лептонные числа  $L_e, L_\mu, L_\tau$  и электрический заряд  $Q$  (см. Приложение В, цвет кварков и глюонов для нас сейчас несущественен), т.е. полный набор независимых сохраняющихся чисел имеет вид  $Q^{(i)} = B, L_e, L_\mu, L_\tau, Q$ . В этой ситуации химический потенциал, например,  $u$ -кварка (барионное число  $1/3$ , электрический заряд  $2/3$ ) равен

$$\mu_u = \frac{1}{3}\mu_B + \frac{2}{3}\mu_Q ,$$

а для  $d$ -кварка, электрона и электронного нейтрино имеем

$$\mu_d = \frac{1}{3}\mu_B - \frac{1}{3}\mu_Q , \quad \mu_e = \mu_{L_e} - \mu_Q , \quad \mu_{\nu_e} = \mu_{L_e} .$$

Соотношения типа (5.2) автоматически выполняются во всех реакциях с участием этих частиц (как и всех других частиц, присутствующих в среде); примером служит реакция

$$u + e^- \rightarrow d + \nu_e ,$$

обусловленная слабым взаимодействием.

► **Задача 1.** Показать в общем случае, что соотношения (5.2) автоматически выполняются, если химические потенциалы частиц имеют вид (5.3), а заряды  $Q^{(i)}$  одинаковы для начального и конечного состояния реакции (5.1), т.е.

$$Q_{A_1}^{(i)} + \dots + Q_{A_n}^{(i)} = Q_{B_1}^{(i)} + \dots + Q_{B_{n'}}^{(i)} .$$

Далее, сами химические потенциалы можно найти, если известны плотности сохраняющихся чисел, которые мы обозначим  $n^{(i)}$ . Действительно, плотность каждого типа частиц  $n_A$  выражается через  $\mu_A$ , поэтому система уравнений

$$\sum_A Q_A^{(i)} n_A = n^{(i)}$$

вместе с (5.3) позволяет выразить<sup>2</sup> все  $\mu_i$  через  $n^{(i)}$ .

---

<sup>2</sup>Здесь существенно, что квантовые числа  $Q^{(i)}$  независимы и образуют полный набор.

В космической плазме взаимодействия между частицами, как правило, довольно слабы; мы будем уточнять это утверждение в соответствующих местах. В этом случае равновесные функции распределения частиц по импульсам  $\mathbf{p}$  в локально-лоренцевой системе координат равны функциям распределения идеальных бозе- и ферми-газов:

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{(E(\mathbf{p})-\mu)/T} \mp 1} . \quad (5.4)$$

Здесь

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (5.5)$$

— энергия частиц массы  $m$ ,  $T$  — температура среды. Знак “ $-$ ” в формуле (5.4) относится к частицам, подчиняющимся статистике Бозе, а знак “ $+$ ” — к частицам, подчиняющимся статистике Ферми.

В случае, когда можно пренебречь слагаемым  $\pm 1$  в знаменателе в правой части формулы (5.4), функция распределения принимает универсальную форму распределения Максвелла–Больцмана

$$f_B(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-(E(\mathbf{p})-\mu)/T} . \quad (5.6)$$

Важный пример, когда применима формула (5.6), даёт предел нерелятивистского разреженного газа, для которого  $m \gg T$ ,  $(m - \mu) \gg T$ . В этом случае

$$f_B(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{\frac{\mu-m}{T}} \cdot e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{2mT}} \quad (5.7)$$

Проинтегрировав функцию распределения по импульсам, получаем следующее общее выражение для плотности числа частиц  $i$ -го типа

$$n_i = g_i \int f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = 4\pi g_i \int f(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E dE , \quad (5.8)$$

где во втором равенстве мы проинтегрировали по углам и воспользовались соотношением

$$E dE = |\mathbf{p}| d|\mathbf{p}| , \quad (5.9)$$

вытекающим из релятивистского дисперсионного соотношения (5.5). Множитель  $g_i$  в (5.8) равен числу спиновых состояний данного типа частиц. К примеру, для фотонов, электронов и позитронов

$$g_\gamma = g_{e^-} = g_{e^+} = 2 ,$$

а для нейтрино и антинейтрино

$$g_\nu = g_{\bar{\nu}} = 1 .$$

Из явного вида функции распределения (5.4) следует, что разность чисел частиц и античастиц данного типа в единице объёма зависит от значения химического потенциала. Как мы скоро убедимся, при достаточно высоких температурах во Вселенной разность чисел частиц и античастиц крайне мала по сравнению с самим числом частиц. К примеру при  $T \gtrsim 1$  ГэВ для частиц с барионным зарядом (при таких температурах это кварки и антикварки) имеем (см. раздел 1.5.5)

$$\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_B + n_{\bar{B}}} \sim 10^{-10} .$$

Относительная разность чисел электронов и позитронов имеет тот же порядок величины (Вселенная в целом электрически нейтральна, поэтому избыточный положительный заряд, содержащийся в кварках, в точности компенсируется избыточным отрицательным зарядом в электронах). Следовательно, химические потенциалы были крайне малы в ранней Вселенной, и для многих целей ими можно пренебречь.

Плотность энергии  $\rho_i$  частиц  $i$ -го типа даётся следующим интегралом от функции распределения

$$\rho_i = g_i \int f(\mathbf{p}) E(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = 4\pi g_i \int f(E) \sqrt{E^2 - m_i^2} E^2 dE, \quad (5.10)$$

где во втором равенстве, как и в соотношении (5.8), мы проинтегрировали по углам и воспользовались (5.9).

Чтобы найти выражение для давления среды, рассмотрим маленькую площадку  $\Delta S$ , расположенную перпендикулярно оси  $z$ . Количество частиц с импульсами в интервале от  $\mathbf{p}$  до  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ , налетающих с одной из сторон на эту площадку за время  $\Delta t$ , равно

$$\Delta n = \frac{1}{2} v_z f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} \Delta S \Delta t,$$

где

$$v_z = \frac{p_z}{E}$$

— проекция скорости частицы на ось  $z$ , а множитель  $1/2$  связан с тем, что только половина частиц движется в сторону рассматриваемой площадки. Частица с проекцией импульса  $p_z$  при упругом отражении от площадки передаёт ей импульс в направлении оси  $z$ , равный

$$\Delta p_z = 2p_z.$$

Следовательно, давление, равное отношению полного импульса, полученного площадкой, к времени  $\Delta t$  и площади  $\Delta S$ , имеет вид

$$\begin{aligned} p_i &= g_i \int \frac{p_z^2}{E} f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} \\ &= \frac{4\pi g_i}{3} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}|^4 d|\mathbf{p}|}{E(\mathbf{p})} f(\mathbf{p}) = \frac{4\pi g_i}{3} \int_0^\infty f(E) (E^2 - m_i^2)^{3/2} dE, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где мы воспользовались тем, что в силу изотропии системы можно заменить  $p_z^2$  на

$$\frac{1}{3} \mathbf{p}^2 = \frac{1}{3} (E^2 - m^2).$$

Исследуем теперь выражения (5.8), (5.10) и (5.11) для плотности числа частиц, плотности энергии и давления в разных физически интересных предельных случаях. Для начала рассмотрим случай ультрарелятивистских частиц

$$T \gg m_i$$

с нулевым химическим потенциалом

$$\mu_i = 0.$$

В этом пределе выражение (5.10) для плотности энергии принимает вид (закон Стефана–Больцмана)

$$\rho_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{E^3}{e^{E/T} \mp 1} dE = \begin{cases} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Бозе} \\ \frac{7}{8} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 & \text{— Ферми} \end{cases} \quad (5.12)$$

Вычисление встречающихся в этой Главе интегралов приведено, например, в книге [17]; сводка формул дана в конце раздела. Как и следовало ожидать из размерных соображений, плотность энергии в этом случае равна  $T^4$  с точностью до численного коэффициента; вклад фермионов в плотность энергии отличается от вклада бозонов множителем 7/8. Отметим, что в релятивистском случае частицы часто удобно характеризовать спиральностью — проекцией спина на направление движения; параметр  $g_i$  можно тогда понимать как число спиральных состояний.

Если в плазме имеются ультрарелятивистские частицы различных типов и с одной и той же температурой  $T$ , а химическими потенциалами можно пренебречь, то плотность энергии ультрарелятивистской компоненты равна

$$\rho = g_* \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad (5.13)$$

где

$$g_* = \sum_{\substack{\text{бозоны} \\ \text{с } m \ll T}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\substack{\text{фермионы} \\ \text{с } m \ll T}} g_i \quad (5.14)$$

эффективное число степеней свободы.

Выражение (5.11) для давления в ультрарелятивистском случае имеет вид

$$p_i = \frac{g_i}{6\pi^2} \int \frac{E^3}{e^{E/T} \mp 1} dE = \frac{\rho_i}{3}. \quad (5.15)$$

Таким образом, уравнение состояния ультрарелятивистского вещества имеет форму

$$p = \frac{1}{3} \rho.$$

Выражение (5.8) для плотности числа частиц в ультрарелятивистском случае имеет вид

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2} \int \frac{E^2}{e^{E/T} \mp 1} dE = \begin{cases} g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{— Бозе} \\ \frac{3}{4} g_i \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{— Ферми} \end{cases} \quad (5.16a)$$

$$(5.16b)$$

Здесь численное значение дзета-функции равно

$$\zeta(3) \approx 1.2.$$

Пользуясь равенствами (5.12), (5.16), можно найти среднюю энергию частицы в ультрарелятивистском случае

$$\langle E \rangle = \frac{\rho_i}{n_i} \approx \begin{cases} 2.7 T & \text{— Бозе} \\ 3.15 T & \text{— Ферми} \end{cases} \quad (5.17)$$



В качестве простого примера применения приведённых формул оценим, при какой температуре релятивистская космическая среда находится в тепловом равновесии по отношению, например, к электромагнитным взаимодействиям. Ограничимся здесь случаем высоких температур,  $T \gg 1$  МэВ, когда электроны являются релятивистскими. Интересные для этого случая процессы — это комптоновское рассеяние,  $e^+e^-$ -аннигиляция (рис. 5.1) и т.д.

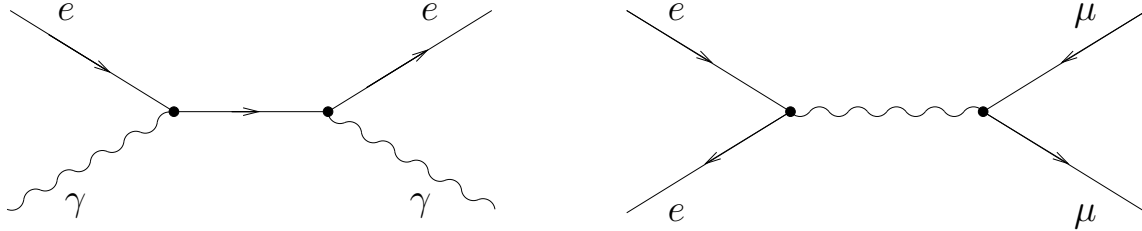


Рис. 5.1: Примеры фейнмановских диаграмм комптоновского рассеяния и  $e^+e^-$ -аннигиляции.

Амплитуды этих процессов пропорциональны  $\alpha \equiv e^2/(4\pi)$ , а сечения —  $\alpha^2$ . Отсюда и из размерных соображений сразу получаем оценку для темпа этих процессов (обратное время между соударениями одной частицы)

$$\Gamma \sim \alpha^2 T.$$

Процессы находятся в тепловом равновесии, если эта величина заметно превышает темп расширения Вселенной,

$$\Gamma \gg H(T).$$

Учитывая (см. раздел 3.2.2), что

$$H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*},$$

получим, что среда находится в равновесии при

$$T \ll \alpha^2 M_{Pl}^* \sim 10^{14} \text{ ГэВ}.$$

Такая же оценка работает для слабых и сильных (цветовых) взаимодействий.<sup>3</sup> Таким образом, предположение о тепловом равновесии действительно хорошо выполняется на протяжении большей части горячей стадии эволюции Вселенной (более точно следует говорить о кинетическом равновесии, т.е. о равновесном распределении по импульсам; обсуждение химического равновесия, т.е. равновесия между сортами частиц, надо проводить отдельно).

Рассмотрим теперь предел нерелятивистского разреженного газа, когда функция распределения принимает больцмановский вид (5.6). В этом пределе выражение для плотности числа частиц имеет вид

$$n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu_i - m_i}{T}}, \quad (5.18)$$

<sup>3</sup>Выход из термодинамического равновесия при низких температурах — важный вопрос, который мы будем обсуждать в разных местах этой книги.

а плотность энергии и давление равны

$$\rho_i = m_i n_i + \frac{3}{2} n_i T_i \quad (5.19)$$

и

$$p_i = T n_i \ll \rho_i . \quad (5.20)$$

Как было очевидно с самого начала, газ нерелятивистских частиц описывается уравнением состояния  $p = 0$ , с точностью до поправок  $O(T/m)$ .

▷ **Задача 2.** Показать, что при высоких температурах (больше масс всех частиц) и малых химических потенциалах разности плотностей числа частиц и античастиц определённой спиральности равны

$$\Delta n = \mu \frac{T^2}{3} \quad \text{бозоны} \quad (5.21)$$

и

$$\Delta n = \mu \frac{T^2}{6} \quad \text{фермионы} , \quad (5.22)$$

где  $\mu$  — химический потенциал для соответствующего типа частиц, причём считается, что  $\mu \ll T$ . Указания: (1) Учесть, что химические потенциалы частиц и античастиц равны по величине и противоположны по знаку; (2) Выделив в интеграле (5.8) с  $m = 0$  линейный член по  $\mu$ , проинтегрировать по частям и воспользоваться формулами конца раздела.

▷ **Задача 3.** Найти разности плотностей частиц и античастиц (асимметрии) для всех типов ультрарелятивистских частиц в равновесной электронейтральной среде при температуре  $T = 400$  МэВ, считая известными плотности барионного и лептонных чисел  $n_B, n_{L_e}, n_{L_\mu}, n_{L_\tau}$ , причём  $n_B, n_{L_e}, n_{L_\mu}, n_{L_\tau} \ll T^3$ . Указания: (1) учесть, что при такой температуре релятивистскими являются  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварки, глюоны, фотоны, электрон, мюон и все типы нейтрино, а остальные частицы Стандартной модели — нерелятивистские; (2) учесть, что нейтрино имеют одну спиральность, а другие фермионы — две; (3) учесть, что кварки имеют три цветовых состояния.

Приведём значения встречающихся в этой Главе интегралов.

(1).

$$\int_0^\infty \frac{dz}{e^z + 1} = \ln 2 .$$

(2). Для целых положительных  $n$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz &= \frac{(2\pi)^{2n}}{4n} B_n , \\ \int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z + 1} dz &= \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n , \end{aligned}$$

где  $B_n$  — числа Бернулли,

$$B_1 = \frac{1}{6} , \quad B_2 = \frac{1}{30} , \quad B_3 = \frac{1}{42} , \dots$$

(3). При произвольном  $x$

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z - 1} dz = \Gamma(x)\zeta(x) ,$$

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}}{e^z + 1} dz = (1 - 2^{1-x})\Gamma(x)\zeta(x) ,$$

где  $\zeta(x)$  — дзета-функция Римана, частные значения которой равны

$$\zeta(3) = 1.202 , \quad \zeta(5) = 1.037 , \quad \zeta(3/2) = 2.612 , \quad \zeta(5/2) = 1.341 .$$

Напомним, что для целых положительных  $n$  справедливо

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Значения гамма-функции при любых полуцелых  $x$  можно найти, исходя из значения

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

и воспользовавшись свойством  $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ .

## 5.2 Энтропия в расширяющейся Вселенной. Барион-фотонное отношение.

Одной из основных термодинамических характеристик системы является её энтропия. Поскольку мы собираемся применять термодинамические законы к расширяющейся Вселенной, полезно обсудить свойства энтропии в такой системе. Напомним, что в классической термодинамике понятие энтропии возникает в первом начале термодинамики. В общем случае переменного числа частиц приращение внутренней энергии  $dE$  имеет вид

$$dE = TdS - pdV + \sum_i \mu_A dN_i . \quad (5.23)$$

где  $S$  — энтропия системы, а индекс  $i$  обозначает сорт частиц; в дальнейшем этот индекс и суммирование по нему мы будем опускать, где это возможно.

Внутренняя энергия и число частиц являются экстенсивными характеристиками, то есть они линейно меняются с изменением объёма, а температура и давление являются локальными характеристиками, не зависящими от объёма системы. Поэтому из первого начала термодинамики (5.23) следует, что энтропия является экстенсивной величиной. В связи с этим удобно перейти от энергии, числа частиц и энтропии к их плотностям,

$$\rho \equiv \frac{E}{V} , \quad n \equiv \frac{N}{V} , \quad s \equiv \frac{S}{V} . \quad (5.24)$$

Взяв дифференциал от равенств (5.24), получим

$$dE = \rho dV + V d\rho , \quad (5.25)$$

$$dN = n dV + V dn , \quad (5.26)$$

$$dS = s dV + V ds . \quad (5.27)$$

Подставив выражения (5.25), (5.26) и (5.27) для дифференциалов в равенство (5.23), мы приходим к следующей форме записи первого начала термодинамики

$$(Ts - p - \rho + \mu n) dV + (Tds - d\rho + \mu dn) V = 0 . \quad (5.28)$$

Это соотношение применимо как ко всей системе, так и к любой её части. Применим его к области постоянного объёма внутри системы и получим для дифференциалов

$$Tds = d\rho - \mu dn .$$

Теперь можно применить (5.28) ко всей системе, объем которой меняется, и найти искомое выражение для плотности энтропии

$$s = \frac{p + \rho - \mu n}{T} .$$

В качестве важного примера рассмотрим сначала ультрарелятивистское вещество с нулевыми химическими потенциалами, для которого

$$s = \frac{p + \rho}{T} . \quad (5.29)$$

Пользуясь этим равенством и выражениями для  $\rho$  и  $p$ , полученными в предыдущем разделе, мы приходим к следующим выражениям для вкладов частиц  $i$ -го типа в плотность энтропии

$$s_i = \frac{4}{3} \frac{\rho_i}{T} = \begin{cases} g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & \text{— Бозе} \\ \frac{7}{8} g_i \frac{4\pi^2}{90} T^3 & \text{— Ферми} \end{cases} \quad (5.30)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (5.16) для плотности числа частиц, мы видим, что в ультрарелятивистском случае плотность энтропии и плотность числа частиц отличаются лишь на численный множитель порядка единицы.

Для нерелятивистской компоненты воспользуемся равенствами (5.19) и (5.20) и запишем

$$s_i = \frac{5}{2} n_i + \frac{m_i - \mu_i}{T} n_i .$$

Исключим из этого выражения химический потенциал с помощью (5.18) и получим окончательно

$$s_i = n_i \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left[ \frac{g_i}{n_i} \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \right] \right\} .$$

В космической среде плотность числа нерелятивистских частиц мала по сравнению с плотностью числа фотонов; при температурах  $T \lesssim 100$  МэВ, когда протоны и нейтроны являются нерелятивистскими, их плотность  $n_B$  оценивается величиной  $n_B \sim 10^{-9} n_\gamma$ . Такая же оценка имеет место для электронов, которые являются нерелятивистскими при  $T \lesssim 0.5$  МэВ. Таким образом, нерелятивистскими вкладами в энтропию можно пренебречь, и полная плотность энтропии даётся формулой

$$s = g_* \frac{4\pi^2}{90} T^3 , \quad (5.31)$$

где эффективное число релятивистских степеней свободы  $g_*$  определено, как обычно, формулой (5.14).

Одним из ключевых свойств энтропии, определяющим её важнейшую роль в термодинамике, является второе начало термодинамики, согласно которому энтропия замкнутой системы не убывает в ходе любого физического процесса и остаётся постоянной для обратимых процессов, то есть процессов настолько медленных, что

система всё время находится в состоянии термодинамического равновесия. Справедливость этого свойства неочевидна для вещества в расширяющейся Вселенной, поскольку кроме вещества во Вселенной имеется также и гравитационное поле, так что плазма сама по себе не образует замкнутой системы. Обсудим, как модифицируется закон сохранения энтропии в расширяющейся Вселенной (считая расширение равновесным процессом). Для этого вернёмся к соотношению (5.23) и учтём явным образом, что химические потенциалы частиц и античастиц равны по величине и противоположны по знаку. Запишем тогда

$$dE = TdS - pdV + \sum \mu(dN - d\bar{N}) , \quad (5.32)$$

где  $\bar{N}$  — число античастиц, а суммирование производится по всем типам частиц. При равновесном расширении соотношение (5.32) можно применить к сопутствующему объёму,  $V \propto a^3$ , при этом  $(N - \bar{N})$  в сопутствующем объёме сохраняется<sup>4</sup>. Таким образом, для сопутствующего объёма будем иметь

$$TdS = (p + \rho)dV + Vd\rho . \quad (5.33)$$

Причиной изменения сопутствующего объёма и характеристик среды является расширение Вселенной, поэтому соотношение (5.33) нужно понимать как

$$T \frac{dS}{dt} = a^3 \left[ (p + \rho) \cdot 3 \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\rho} \right] ,$$

где  $S = sa^3$  — энтропия в сопутствующем объёме. Вспомним теперь закон ковариантного сохранения энергии в расширяющейся Вселенной (см. уравнение (3.11))

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (5.34)$$

и получим

$$\dot{s} + 3 \frac{\dot{a}}{a}s = 0 . \quad (5.35)$$

Следовательно, полная энтропия в сопутствующем объёме сохраняется,

$$sa^3 = \text{const} . \quad (5.36)$$

Итак, ковариантный закон сохранения энергии имеет в случае равновесного расширения простую интерпретацию: он представляет собой закон сохранения энтропии в сопутствующем объёме.

Оценим плотность энтропии Вселенной в современную эпоху. Для этого вспомним, что Вселенная заполнена реликтовым микроволновым излучением — газом фотонов с температурой

$$T_0 = 2.725 \text{ K} .$$

Плотность энтропии этого фотонного газа в соответствии с формулой (5.30) равна

$$s_\gamma = \frac{8\pi^2}{90} T_0^3 \simeq 1.5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3} . \quad (5.37)$$

---

<sup>4</sup>Если быть более точными, то в формуле (5.32) в под  $(N - \bar{N})$  следует понимать сохраняющиеся квантовые числа, а под  $\mu$  — химические потенциалы к этим числам, см. (5.3).

Вкладами других типов частиц (в том числе нейтрино) для грубой оценки пренебрежём. Пользуясь результатом (5.37), мы можем оценить полную энтропию видимой части Вселенной. Размер видимой части Вселенной составляет  $l_{H,0} \sim 10^{28}$  см, так что для полной энтропии получаем

$$S_\gamma = \frac{4\pi}{3} s_\gamma l_{H,0}^3 \sim 10^{88}.$$

Мы видим, что энтропия видимой части Вселенной — это гигантское безразмерное число. Если бы в процессе расширения полная энтропия всё время сохранялась, то в момент своего рождения Вселенная должна была бы уже обладать такой энтропией. Таким образом, в стандартном сценарии горячего Большого взрыва мы сталкиваемся с необходимостью включать в начальные условия расширения Вселенной гигантский безразмерный параметр порядка  $10^{88}$ . Мы вернёмся к этой проблеме и обсудим возможность её решения в рамках инфляционной теории во второй части книги.

Сохранение энтропии в сопутствующем объёме можно использовать для того, чтобы ввести количественные, не зависящие от времени характеристики асимметрии Вселенной по отношению к различным сохраняющимся квантовым числам. Например, в настоящее время во Вселенной имеются частицы, несущие положительное барионное число — протоны и нейтроны, и отсутствуют частицы с отрицательным барионным числом. Следовательно, во Вселенной имеется ненулевая плотность барионного числа. Поскольку при температурах ниже сотен ГэВ процессы с нарушением барионного числа отсутствуют, полное барионное число в сопутствующем объёме остаётся постоянным при расширении Вселенной начиная по крайней мере<sup>5</sup> с  $T \sim 100$  ГэВ. Другими словами, справедливо равенство

$$(n_B - n_{\bar{B}})a^3 = \text{const}, \quad (5.38)$$

где  $n_B$  и  $n_{\bar{B}}$  — плотности чисел барионов и антибарионов. Сравнивая соотношения (5.36) и (5.38), мы видим, что отношение

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} \quad (5.39)$$

является постоянной во времени численной характеристикой барионной асимметрии Вселенной.

Несколько забегаая вперёд, приведём оценку численного значения барионной асимметрии Вселенной. Когда в космологии имеют дело со сравнительно низкими температурами ( $T \lesssim 1$  МэВ), традиционно используют *барион-фотонное отношение*

$$\eta_B = \frac{n_B}{n_\gamma},$$

где  $n_\gamma$  — плотность числа фотонов. Эта величина остаётся постоянной в течение эволюции Вселенной, начиная с температуры порядка 1 МэВ, и отличается от барионной асимметрии  $\Delta_B$  численным коэффициентом порядка единицы. Последний связан как с численным отличием  $n_\gamma$  от энтропии фотонов  $s_\gamma$ , см. (5.16) и (5.31),

---

<sup>5</sup>Мы не рассматриваем здесь возможность генерации барионной асимметрии при более низких температурах. Такая возможность имеется, например, в сценарии Аффлека–Дайна, см. раздел 11.6.

так и со вкладом нейтрино в энтропию Вселенной, см. Главу 7. При  $T \lesssim 1$  МэВ плотность энтропии во Вселенной равна

$$s = \frac{4\pi^2}{90} \left( 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{11} \right) T^3, \quad (5.40)$$

где первый и второй члены в скобках соответствуют вкладам фотонов и нейтрино, причём температура нейтрино связана с температурой фотонов  $T_\gamma \equiv T$  соотношением (4.14); происхождение фактора  $\frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3$  — такое же, как в (4.15). Для дальнейшего полезно отметить, что современное значение плотности энтропии равно<sup>6</sup>

$$s_0 = 2.9 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3} \quad (5.41)$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} \Delta_B &= \frac{n_\gamma}{s} \eta_B = \frac{\frac{2\zeta(3)}{\pi^2}}{\frac{4\pi^2}{90} \left( 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{11} \right)} \cdot \eta_B \\ &= 0.14 \cdot \eta_B. \end{aligned}$$

Точное значение барион-фотонного отношения можно извлечь из распространенности первичных элементов во Вселенной (см. Главу 8) и из измерений анизотропии реликтового излучения. Эти два независимых способа дают хорошо согласующиеся между собой результаты и приводят к значению

$$\eta_B = (6.10 \pm 0.20) \cdot 10^{-10}. \quad (5.42)$$

В терминах барионной асимметрии имеем

$$\Delta_B = 0.87 \cdot 10^{-10}.$$

Как мы обсуждали в разделе 1.5.5, в горячей Вселенной (при  $T \gtrsim 1$  ГэВ) по порядку величины имеем

$$\Delta_B \sim \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q + n_{\bar{q}}}, \quad (5.43)$$

где  $n_q$  и  $n_{\bar{q}}$  — плотности чисел кварков и антикварков, причём  $n_q \approx n_{\bar{q}} \sim s$ . Таким образом, параметр  $\Delta_B$  показывает, какую долю от общего числа кварков составляет избыток кварков над антикварками. Мы видим, что этот избыток очень мал. Следовательно, как мы и утверждали выше, химические потенциалы в ранней Вселенной были действительно крайне малы.

▷ **Задача 4.** Оцените численное значение химического потенциала для  $u$ -кварка при температуре 1 ГэВ.

---

<sup>6</sup>Тонкость, связанная с тем, что фотоны и нейтрино являются свободными в современной Вселенной, а по крайней мере два типа нейтрино к тому же имеют массы, превышающие  $T_{\nu,0}$ , здесь несущественна, поскольку в современной Вселенной функция распределения фотонов и нейтрино по импульсам — тепловые и ультрарелятивистские, см. раздел 2.5. Если стремиться к аккуратности, то правую часть (5.40) нужно считать *определением* величины  $s$  в современную эпоху, а также на достаточно поздних этапах эволюции.

В заключение этого раздела напомним, что наряду с барион-фотонным отношением  $\eta_B$  часто используют безразмерный параметр  $\Omega_B$ , определяемый как отношение современного значения (массовой) плотности барионов  $\rho_B$  к критической плотности  $\rho_c$  (см. Главу 4),

$$\Omega_B = \frac{\rho_B}{\rho_c} = \frac{m_B n_B}{\rho_c}, \quad (5.44)$$

где  $m_B \simeq 1$  ГэВ — масса протона (при той точности, с которой мы работаем, разница между массами протона и нейтрона несущественна). В соответствии с формулой (5.16a), плотность числа реликтовых фотонов в современной Вселенной равна

$$n_\gamma = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_0^3 = 410 \frac{1}{\text{см}^3}.$$

Используя значение критической плотности (4.4), получим из (5.42)

$$\Omega_B h^2 \simeq 0.022 \pm 0.001, \quad (5.45)$$

Таким образом,  $\Omega_B \simeq 0.042$ , что заметно меньше полной относительной плотности массы нерелятивистского вещества в модели  $\Lambda$ CDM,  $\Omega_M \simeq 0.24$  (см. Главу 4). Таким образом, большая часть нерелятивистской материи во Вселенной — не барионы, а неизвестные частицы тёмной материи.

Напомним (см. Введение), что прямая оценка значения  $\Omega_B$ , основанная на измерении средней плотности светящегося вещества (звёзд) во Вселенной, привела бы к значению  $\Omega_B^{lum}$  примерно на порядок меньшему, чем в (5.45). Это означает, что большая часть барионов во Вселенной находится в состоянии несветящегося газа<sup>7</sup>.

Одна из важных задач космологии — объяснить происхождение барионной асимметрии Вселенной. Мы обсудим эту проблему в Главе 11.

▷ *Задача 5. Дать численную оценку вкладов электронов и протонов в плотность энтропии во Вселенной при  $0.5 \text{ МэВ} \gg T \gg 1 \text{ эВ}$ . Указание: учесть, что при таких температурах электроны и протоны — нерелятивистские и находятся в свободном состоянии (рекомбинации в атомы водорода ещё не произошло), и что число электронов равно числу протонов (наличием лёгких ядер пренебрегаем).*

## 5.3 \*Неравновесные процессы

В этой книге нам неоднократно будет встречаться ситуация, когда большинство процессов в среде происходят достаточно быстро, но есть один или несколько медленных процессов, из-за низкого темпа которых среда не находится в состоянии термодинамического равновесия. Приведём характерный (но далеко не единственный) пример такой ситуации. Пусть в теории имеются гипотетические тяжёлые частицы  $X$  (скажем, с массой  $m_X \gtrsim 100$  ГэВ), имеющие большое время жизни, а единственным процессом, из-за которого концентрация  $n_X$  этих частиц в среде может изменяться,

---

<sup>7</sup>Альтернативной возможностью является то, что большая часть барионов содержится в плотных компактных несветящихся объектах. Как мы упоминали во Введении, поиск таких объектов в нашей Галактике с помощью гравитационного линзирования показывает, что они, по-видимому, действительно существуют, но их количества недостаточно, чтобы объяснить дефицит светящихся барионов.



является их аннигиляция с античастицами  $\bar{X}$ . В то же время, предположим, что рассеяние  $X$ -частиц на обычных частицах, имеющих в космической плазме (лептонах, кварках, фотонах и т.д.) происходит достаточно часто. При температурах  $T$ , превышающих массу  $X$ -частиц  $m_X$ , процессы рождения и аннигиляции  $X$ -частиц происходят, как правило, быстро (по сравнению с темпом расширения Вселенной), и их концентрация является равновесной.

Рассмотрим симметричную среду с одинаковым количеством частиц  $X$  и античастиц  $\bar{X}$ . При  $T \ll m_X$  концентрация  $X$ -частиц в такой среде экспоненциально падает с понижением температуры, так что процессы аннигиляции  $X$ -частиц происходят всё реже и реже, просто потому, что вероятность того, что  $X$ -частица встретит свою античастицу, становится всё меньше. Это даёт пример рассматриваемой ситуации: при  $T \ll m_X$  все процессы, кроме рождения и аннигиляции  $X$ - $\bar{X}$ -пар, являются быстрыми, а сами процессы  $X$ - $\bar{X}$ -аннигиляции и рождения — медленные, и концентрации  $n_X$  и  $n_{\bar{X}}$  могут не совпадать с равновесными. В этих условиях среда по-прежнему характеризуется температурой и числами частиц (в том числе самих частиц  $X$  и  $\bar{X}$ ; в симметричной среде  $n_X = n_{\bar{X}}$ ). Функции распределения даются формулами раздела 5.1; неравновесность же проявляется в том, что  $\mu_X \neq 0$ , причем для симметричной среды  $\mu_X = \mu_{\bar{X}}$ .

Не рассматривая пока расширение Вселенной, обсудим, как происходит в такой ситуации релаксация к состоянию термодинамического равновесия. В общем случае в процессе релаксации эффективная температура среды и плотности числа всех частиц изменяются со временем (температура изменяется, например, если процесс релаксации происходит с выделением тепла; в нашем примере это действительно имеет место, если концентрация  $X$ -частиц превышает равновесную,  $n_X > n_X^{eq}$ , и релаксация происходит путём аннигиляции  $X$ -частиц, а не рождения  $X$ - $\bar{X}$ -пар), но в каждый момент времени температура и химические потенциалы имеют вполне определённые значения. Таким образом, среду в каждый момент времени можно характеризовать свободной энергией<sup>8</sup>  $F(T, N_i)$ . Напомним, что свободная энергия связана с числом состояний (статистической суммой) соотношением (считаем, что система имеет большой, но конечный объём)

$$Z = e^{-\frac{F}{T}}. \quad (5.46)$$

При приближении к термодинамическому равновесию свободная энергия стремится к своему минимуму, а статистическая сумма — к максимуму.

Пусть имеется прямой медленный процесс, приближающий систему к состоянию термодинамического равновесия (в нашем примере — это  $X$ - $\bar{X}$ -аннигиляция; для определенности будем считать, что  $n_X > n_X^{eq}$ ). Обозначим темп таких процессов (их количество в единицу времени) как<sup>9</sup>  $\Gamma_+$ . Есть и обратные процессы, темп которых обозначим через  $\Gamma_-$  (в нашем примере — это процесс рождения  $X$ - $\bar{X}$ -пар). Наша задача — найти соотношение между  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ .

В результате единичного прямого процесса система переходит из состояния с большей свободной энергией  $F_+$  (и, соответственно, с меньшей статистической суммой  $Z_+$ ) в состояние с меньшей свободной энергией  $F_-$  и большей статистической

<sup>8</sup>Как правило, удобнее работать не со свободной энергией, а с большим термодинамическим потенциалом, фиксируя не числа частиц, а химические потенциалы. В этом разделе, однако, мы будем рассматривать состояния с определённым числом частиц, для которых справедлива формула (5.46).

<sup>9</sup>Это обозначение связано с тем, что в прямом процессе статистическая сумма увеличивается; этот процесс более выгоден с термодинамической точки зрения.

суммой  $Z_-$ . Пусть  $i_+$  — одно из *микроскопических* состояний<sup>10</sup> системы в начале прямого процесса, а  $j_-$  — одно из микроскопических состояний, в которые система может перейти в результате этого процесса. Вероятность реализации начального состояния  $i_+$  равна

$$P(i_+) = \frac{e^{-\frac{E(i_+)}{T}}}{Z_+} ,$$

где  $E(i_+)$  — энергия состояния  $i_+$  (здесь существенно, что по отношению ко всем другим процессам, кроме рассматриваемого, имеет место термодинамическое равновесие). Пусть  $\gamma(i_+ \rightarrow j_-)$  — вероятность прямого процесса  $i_+ \rightarrow j_-$ . Тогда вероятность того, что какой-либо прямой процесс произойдёт в среде, равна

$$\Gamma_+ = \sum_{i_+, j_-} P(i_+) \cdot \gamma(i_+ \rightarrow j_-) = \frac{1}{Z_+} \sum_{i_+, j_-} e^{-\frac{E(i_+)}{T}} \gamma(i_+ \rightarrow j_-) .$$

Аналогично, вероятность какого-либо обратного процесса в среде равна

$$\Gamma_- = \frac{1}{Z_-} \sum_{i_+, j_-} e^{-\frac{E(j_-)}{T}} \gamma(j_- \rightarrow i_+) .$$

В силу равенства вероятностей процесса  $i_+ \rightarrow j_-$  и обратного ему процесса  $j_- \rightarrow i_+$ , т.е.  $\gamma(j_- \rightarrow i_+) = \gamma(i_+ \rightarrow j_-)$ , а также закона сохранения энергии,  $E(i_+) = E(j_-)$ , имеем

$$\frac{\Gamma_+}{\Gamma_-} = \frac{Z_-}{Z_+} = e^{-\frac{1}{T}(F_- - F_+)} ,$$

и окончательно

$$\frac{\Gamma_+}{\Gamma_-} = e^{-\frac{\Delta F}{T}} , \quad (5.47)$$

где  $\Delta F$  — разность свободных энергий после и до прямого процесса (согласно данным выше определениям  $\Delta F < 0$ ). В дальнейшем под  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  мы будем понимать число прямых и обратных процессов, происходящих в единицу времени *в единице объёма*. Для них, разумеется, соотношение (5.47) остаётся справедливым.

Отметим, что в приведённом примере

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial N_X} \Delta N_X + \frac{\partial F}{\partial N_{\bar{X}}} \Delta N_{\bar{X}} ,$$

где  $\Delta N_X = \Delta N_{\bar{X}} = -1$  — изменение количества  $X$ - и  $\bar{X}$ -частиц в единичном прямом процессе (аннигиляция). Поэтому

$$\Delta F = -2\mu_X , \quad (5.48)$$

где мы учли, что  $\partial F / \partial N_X = \mu_X$  и  $\mu_{\bar{X}} = \mu_X$ .

Из выражения (5.47) видно, во-первых, что релаксация действительно идёт в сторону уменьшения свободной энергии:  $\Gamma_+ > \Gamma_-$  при  $\Delta F < 0$ . Далее, при  $|\Delta F| \gg T$  справедливо  $\Gamma_+ \gg \Gamma_-$ , и обратными процессами можно пренебречь. Наоборот, при  $|\Delta F| \ll T$  имеет место малое отклонение от термодинамического равновесия,  $(\Gamma_+ - \Gamma_-) \ll \Gamma_+, \Gamma_-$ , прямой и обратный процессы идут с примерно одинаковой

---

<sup>10</sup>Например, в случае классической статистической механики в состоянии  $i_+$  фиксированы положения и импульсы всех частиц среды.

интенсивностью. В этом случае темп прямого и обратного процессов близок к равновесному,  $\Gamma_+ \approx \Gamma_- \approx \Gamma_{eq}$ , и релаксация характеризуется темпом

$$\Gamma_+ - \Gamma_- = -\frac{\Delta F}{T} \Gamma_{eq}, \quad |\Delta F| \ll T. \quad (5.49)$$

В излагаемой в этом разделе ситуации часто можно ввести интенсивную (не зависящую от объёма  $V$ ) характеристику среды  $n = N/V$ . В приведённом выше примере — это плотность числа  $X$ -частиц, а  $N$  — полное число  $X$ -частиц в системе. Величина  $N$  не изменяется в быстрых процессах, и изменяется на  $\Delta N$  и  $(-\Delta N)$  в прямом и обратном медленных процессах (в приведённом примере  $\Delta N = -1$ , поскольку мы считаем, что прямой процесс — это процес аннигиляции). По-прежнему не рассматривая расширение Вселенной, запишем для  $n(t)$  уравнение

$$\frac{dn}{dt} = \Delta N \cdot (\Gamma_+ - \Gamma_-) \quad (5.50)$$

(напомним, что  $\Gamma_{\pm}$  — скорости процессов *в единице объёма*). В состоянии термодинамического равновесия свободная энергия имеет минимум по  $N$ , поэтому в равновесии

$$(\Delta F)_{eq} = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{eq} \cdot \Delta N = 0.$$

Вблизи термодинамического равновесия  $\Delta F$  пропорциональна отклонению  $n$  от равновесного значения  $n_{eq}$ , так что

$$\Delta F = -\alpha (n - n^{eq}),$$

где  $\alpha$  — положительная постоянная. С учётом этого уравнение (5.50) принимает вид

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\alpha}{T} \Delta N \Gamma_{eq} (n - n^{eq}), \quad (5.51)$$

Поскольку в термодинамическом равновесии  $n$  не зависит от времени, т.е.

$$\frac{dn^{eq}}{dt} = 0,$$

последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d(n - n^{eq})}{dt} = \frac{\alpha}{T} \Delta N \Gamma_{eq} (n - n^{eq}). \quad (5.52)$$

Отсюда видно, что приближение к равновесию носит экспоненциальный характер<sup>11</sup>.

В приведённом выше примере симметричной среды с частицами  $X$  и  $\bar{X}$  их концентрация при  $T \ll m_X$  даётся формулой (5.18) с ненулевыми  $\mu_X = \mu_{\bar{X}}$ , поэтому

$$n_X = n_{\bar{X}} = e^{\frac{\mu_X}{T}} n_X^{eq}.$$

Следовательно, вблизи равновесия (т.е. при  $\frac{\mu_X}{T} \ll 1$ ) имеем, с учётом (5.48)

$$\Delta F = -2\mu_X = -2T \frac{n_X - n_X^{eq}}{n_X^{eq}}.$$

<sup>11</sup> Отметим, что правая часть (5.52) всегда отрицательна: при  $n > n^{eq}$  прямой процесс — это процесс с уменьшением  $n$ , т.е.  $\Delta N < 0$ , и наоборот.

Отсюда  $\alpha = \frac{2T}{n_X^{eq}}$  и, с учётом  $\Delta N = -1$ , приближение к равновесию описывается уравнением

$$\frac{d(n_X - n_X^{eq})}{dt} = -2 \frac{\Gamma_{eq}}{n_X^{eq}} (n_X - n_X^{eq}) . \quad (5.53)$$

Учтём, наконец, что темп процессов аннигиляции в единице объёма в состоянии равновесия равен

$$\Gamma_{eq} = \Gamma_{X,eq} \cdot n_X^{eq} ,$$

где  $\Gamma_{X,eq} = \tau_X^{-1}$  — время жизни  $X$ -частицы в среде, и получим

$$\frac{d(n_X - n_X^{eq})}{dt} = -2\Gamma_{X,eq} (n_X - n_X^{eq}) .$$

Последний результат можно получить и вполне элементарным способом. В среде с концентрацией частиц  $n_X$  и концентрацией античастиц  $n_{\bar{X}}$  вероятность аннигиляции в единицу времени частицы  $X$  с какой-то античастицей  $\bar{X}$  равна

$$\Gamma_X = \sigma_{\text{анн}} \cdot n_{\bar{X}} \cdot v_X ,$$

где  $v_X$  — скорость  $X$ -частицы, а  $\sigma_{\text{анн}}$  — сечение аннигиляции (за время  $\tau_X = \Gamma_X^{-1}$  частица с площадью поперечного сечения  $\sigma_{\text{анн}}$  встретит на своём пути ровно одну античастицу  $\bar{X}$ ). Поэтому вероятность процесса аннигиляции в единицу времени в единице объёма равна

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &= \Gamma_X \cdot n_X = \sigma_{\text{анн}} \cdot n_{\bar{X}} \cdot v_X \cdot n_X \\ &= \Gamma_{eq} \frac{n_{\bar{X}}}{n_X^{eq}} \frac{n_X}{n_X^{eq}} . \end{aligned}$$

Вероятность обратного процесса образования  $X$ - $\bar{X}$ -пары не зависит от того, сколько в действительности имеется частиц  $X$  в среде, поэтому она равна

$$\Gamma_- = \Gamma_{eq} .$$

Поэтому

$$\frac{d(n_X - n_X^{eq})}{dt} = \Gamma_{eq} \left( 1 - \frac{n_{\bar{X}} n_X}{n_X^{eq} n_X^{eq}} \right) .$$

В симметричной среде  $n_{\bar{X}} = n_X$  и  $n_X^{eq} = n_X^{eq}$ , и при  $|n_X - n_X^{eq}| \ll n_X$  отсюда следует уравнение (5.53).

В случае расширяющейся Вселенной уравнение (5.50) перестаёт быть справедливым. Если Вселенная расширяется, оставаясь однородной<sup>12</sup>, а  $N$  — параметр типа числа частиц, то его плотность уменьшается как  $a^{-3}$  даже при выключенных медленных процессах, просто за счёт расширения Вселенной. В этом случае имеет смысл рассматривать величину  $N$  в сопутствующем объёме,  $N \propto na^3$ . Уравнение для неё будет иметь вид

$$\frac{d(na^3)}{dt} = \Delta N \cdot (\Gamma_+ - \Gamma_-) \cdot a^3 , \quad (5.54)$$

где  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  — по-прежнему скорости медленных процессов в единицу времени в единице физического объёма, между которыми в общем случае имеется соотношение (5.47). Разумеется,  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  сами зависят от времени, например, из-за уменьшения температуры за счёт расширения Вселенной. Вблизи термодинамического равновесия уравнение (5.51) обобщается на случай расширяющейся Вселенной следующим образом

$$\frac{d(na^3)}{dt} = \frac{\alpha}{T} \Delta N \cdot \Gamma_{eq} (n - n_{eq}) \cdot a^3 . \quad (5.55)$$

<sup>12</sup>Эта оговорка необходима, поскольку могут быть этапы эволюции Вселенной, на которых она временно перестаёт быть однородной. Примером служат фазовые переходы первого рода, см. Главу 10.

Уравнение (5.54) — это упрощённое уравнение Больцмана в расширяющейся Вселенной. В этой книге мы будем неоднократно пользоваться уравнениями подобного типа и их простыми обобщениями.

# Глава 6

## Рекомбинация

### 6.1 Температура рекомбинации

При температурах, превышающих энергию связи электронов в атомах, обычное вещество во Вселенной находилось в состоянии ионизованной плазмы, состоящей из электронов, фотонов и барионов. Как мы обсудим в разделе 8, при температуре ниже нескольких десятков кэВ барионы в основном состояли из протонов (около 75% от общей массы) и ядер  ${}^4\text{He}$  —  $\alpha$ -частиц (около четверти от общей массы). При дальнейшем понижении температуры в определённый момент становится термодинамически выгодным образование атомов. Этот этап в истории Вселенной называется рекомбинацией. Если до рекомбинации фотоны активно рассеиваются на свободных электронах, присутствующих в плазме, так что их длина свободного пробега много меньше размера горизонта, то после рекомбинации вещество во Вселенной становится электрически нейтральным и фотоны распространяются практически свободно. Эти фотоны и дожили до настоящего времени в виде реликтового излучения.

Количественное изучение процесса рекомбинации начнём с того, что определим температуру, при которой образование атомов становится термодинамически выгодным. Наивно можно было бы ожидать, что эта температура близка к энергии связи электрона в атоме. Однако, как мы увидим, рекомбинация происходит при заметно более низкой температуре. Физическая причина этого состоит в том, что плазма во Вселенной является очень разреженной при рассматриваемых температурах, и объединение электронов с ядрами в единое целое приводит к значительному проигрышу в энтропии.

Эквивалентное “микроскопическое” объяснение малости температуры рекомбинации состоит в следующем. При малой концентрации электронов и протонов рекомбинация одного из электронов с каким-то протоном происходит<sup>1</sup> за время  $\tau_+$ , пропорциональное плотности числа протонов,  $\tau_+ \propto n_B$ . Образовавшийся атом водорода разрушается фотоном, энергия которого превышает энергию связи атома водорода  $\Delta_H$ . Такие фотоны имеются в среде и при  $T \ll \Delta_H$ , хотя их количество экспоненциально мало. Поэтому время жизни атома водорода в среде конечно, хотя и экспоненциально велико,  $\tau_- \propto e^{-\Delta_H/T}$ . Рекомбинация становится эффективной при

$$\tau_+ \sim \tau_- , \quad (6.1)$$

---

<sup>1</sup>Индексы + и – относятся к прямому и обратному процессам — рекомбинации и дезинтеграции, соответственно.

что при малом  $n_B$  действительно соответствует  $T \ll \Delta_H$ . Температуру рекомбинации можно было бы найти, используя намеченный здесь кинетический подход (см. задачу в этом разделе). Однако проще применить термодинамический подход, что мы сейчас и сделаем.

Начнём с рассмотрения ситуации, когда все барионы в плазме состоят из протонов. Тот факт, что в действительности имеется существенная доля  $\alpha$ -частиц, практически не сказывается на значении температуры рекомбинации.

Будем считать, что среда их электронов протонов и атомов водорода находится в термодинамическом равновесии. То, что это предположение справедливо, мы проверим в разделе 6.3. Нас сейчас интересуют температуры масштаба 1 эВ (масштаб энергии связи электронов в атомах). При таких температурах электроны и протоны являются нерелятивистскими. Выпишем выражения для равновесных концентраций электронов, протонов и атомов водорода в нерелятивистском приближении:

$$n_e = g_e \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T}, \quad (6.2)$$

$$n_p = g_p \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T}, \quad (6.3)$$

$$n_H = g_H \left( \frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T}. \quad (6.4)$$

В них входят неизвестные пока химические потенциалы. Количество спиновых степеней свободы для электрона  $g_e$  и для протона  $g_p$  равно двум. Для атома водорода

$$g_H = 4.$$

▷ *Задача 1. Покажите, что  $g_H = 4$ .*

Температура рекомбинации  $T_r$  определяется условием

$$n_p(T_r) \simeq n_H(T_r). \quad (6.5)$$

При температурах выше  $T_r$  протонам и электронам выгоднее оставаться в свободном состоянии, а при понижении температуры более выгодным становится связанное состояние в виде нейтрального атома водорода. Для того, чтобы найти значение  $T_r$ , нам необходимо найти ещё три уравнения, позволяющие исключить неизвестные химические потенциалы  $\mu_e$ ,  $\mu_p$  и  $\mu_H$ , входящие в соотношения (6.2)–(6.4). Первым из этих условий является закон сохранения полного барионного числа<sup>2</sup>

$$n_p + n_H = n_B. \quad (6.6)$$

Здесь, как и прежде,  $n_B$  — плотность барионного числа

$$n_B(T) = \eta_B n_\gamma(T), \quad (6.7)$$

где значение барион-фотонного отношения уже фигурировало в разделе 5.2,

$$\eta_B \simeq 6.15 \cdot 10^{-10}, \quad (6.8)$$

---

<sup>2</sup>Для простоты мы здесь не учитываем тот факт, что плотность числа всех протонов отличается от  $n_B$  из-за наличия ядер гелия. Мы это учтём в дальнейшем.

а плотность числа фотонов  $n_\gamma(T)$  — известная функция температуры (см. (5.16a)). Ещё одно уравнение

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H \quad (6.9)$$

следует из химического равновесия реакции

$$p + e \leftrightarrow H + \gamma, \quad (6.10)$$

которая собственно и является основной реакцией процесса рекомбинации. Наконец, последнее уравнение следует из электронейтральности Вселенной и имеет вид

$$n_p = n_e. \quad (6.11)$$

Итого, мы получили шесть уравнений: (6.2), (6.3), (6.4), (6.6) (6.9) и (6.11), из которых при каждом значении температуры  $T$  можно определить три неизвестных плотности числа частиц  $n_e$ ,  $n_p$ ,  $n_H$  и три неизвестных химических потенциала  $\mu_e$ ,  $\mu_p$ ,  $\mu_H$ . Самый быстрый способ упростить эту систему уравнений состоит в том, чтобы перемножить выражения (6.2) и (6.3) для плотности числа электронов и протонов:

$$n_p n_e = g_p g_e \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p + \mu_e - m_p - m_e)/T}.$$

Теперь, пользуясь равенствами (6.9), (6.11) и выражением (6.4) для  $n_H$ , можно исключить химические потенциалы и привести получившееся уравнение к следующему виду

$$n_p^2 = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T}, \quad (6.12)$$

где

$$\Delta_H \equiv m_p + m_e - m_H = 13.6 \text{ эВ}$$

— энергия связи водорода, и мы пренебрегли разницей между  $m_p$  и  $m_H$  в предэкспоненциальном множителе в правой части уравнения (6.12). Вместе с уравнением (6.6), уравнение (6.12) определяет концентрации свободных протонов и атомов водорода  $n_p$  и  $n_H$ .

Удобно ввести безразмерные отношения

$$X_p \equiv \frac{n_p}{n_B}, \quad X_H \equiv \frac{n_H}{n_B},$$

так что условие сохранения барионного числа принимает вид

$$X_p + X_H = 1. \quad (6.13)$$

Пользуясь уравнением (6.12) можно выразить  $X_H$  через  $X_p$ , в результате чего условие (6.13) приведёт к следующей связи между  $X_p$  и температурой:

$$X_p + n_B X_p^2 \left( \frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\frac{\Delta_H}{T}} = 1. \quad (6.14)$$

Уравнение (6.14) носит название уравнения Саха. Выразив  $n_B$  через барион-фотонное отношение  $\eta_B$  с помощью соотношения (6.7) и воспользовавшись формулой



(5.16a) для плотности числа фотонов  $n_\gamma(T)$ , мы получаем следующее уравнение, содержащее только безразмерные величины

$$X_p + \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \left( \frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} X_p^2 e^{\frac{\Delta_H}{T}} = 1. \quad (6.15)$$

Второе слагаемое здесь — это относительная концентрация атомов водорода, выраженная через  $X_p$ ,

$$X_H = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \left( \frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} X_p^2 e^{\frac{\Delta_H}{T}}. \quad (6.16)$$

Теперь мы явно видим, что рекомбинация происходит при температурах заметно более низких, чем энергия связи атома водорода  $\Delta_H$ . Действительно, пока экспоненциальный фактор в (6.16) недостаточно велик, концентрация протонов  $X_p$  близка к единице, а концентрация атомов водорода  $X_H$  подавлена. Это подавление связано как с малостью барион-фотонного отношения  $\eta_B \sim 10^{-9}$ , так и с тем, что электроны являются сильно нерелятивистскими при интересующих нас температурах,

$$\frac{T}{m_e} \ll 1.$$

Момент рекомбинации наступает тогда, когда одновременно  $X_p \sim 1$ ,  $X_H \sim 1$ . В этот момент отмеченная малость компенсируется экспоненциальным фактором  $e^{\Delta_H/T}$ . При этом отношение  $\Delta_H/T$  заметно больше единицы :

$$\frac{\Delta_H}{T_r} \simeq -\ln \left( \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \left( \frac{2\pi T_r}{m_e} \right)^{3/2} \right). \quad (6.17)$$

Эта формула получается подстановкой  $X_H(T_r) \sim X_p(T_r) \sim 1$  в соотношение (6.16). Из неё и вычисляется температура рекомбинации.

Для дальнейшего полезно обсудить, как решать уравнения типа (6.17). Это уравнение является частным случаем уравнения вида

$$x = \ln(Ax^\alpha), \quad (6.18)$$

где в нашем случае неизвестная  $x$  равна

$$x = \frac{\Delta_H}{T_r},$$

а параметры  $A$  и  $\alpha$  равны

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{2}, \\ A &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}\zeta(3)} \left( \frac{m_e}{\Delta_H} \right)^{3/2} \eta_B^{-1}. \end{aligned}$$

Существенно, что

$$\ln A \gg 1. \quad (6.19)$$

В уравнении вида (6.18) в ведущем логарифмическом приближении (то есть, пренебрегая числом порядка единицы по сравнению с  $\ln A$ ) можно положить  $x = 1$  в правой части, что приводит к следующему результату для  $x$ :

$$x \approx \ln A. \quad (6.20)$$

▷ *Задача 2. Представив  $x$  в виде*

$$x = (1 + \epsilon) \ln A$$

*и считая  $\epsilon \ll 1$ , найдите  $x$  в первом нетривиальном порядке по  $\epsilon$  и убедитесь, что  $\epsilon$  действительно мало, если выполнено условие (6.19) и  $\alpha \sim 1$ .*

В нашем случае в ведущем логарифмическом приближении получаем следующее значение для температуры рекомбинации

$$T_r \approx \frac{\Delta_H}{\ln \left( \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}\zeta(3)} \left( \frac{m_e}{\Delta_H} \right)^{3/2} \eta_B^{-1} \right)} \approx 0.38 \text{ эВ} . \quad (6.21)$$

Численное решение уравнения (6.17)  $c^3 \eta_B = 0.75 \cdot 6.15 \cdot 10^{-10}$  даёт  $T_r = 0.33 \text{ эВ}$ .

Сравнивая значение температуры рекомбинации (6.21) со значением температуры (4.22) перехода от радиационно-доминированной стадии расширения к пылевидной, мы видим, что рекомбинация происходит на пылевидной стадии. Значению температуры  $T_r = 0.33 \text{ эВ}$  соответствует величина красного смещения  $z_r \approx 1400$ .

Найдём возраст Вселенной на момент рекомбинации. Для этого воспользуемся соотношением (3.19), справедливым для пылевидной стадии, и запишем

$$t_r = \frac{2}{3} H^{-1}(t_r) = \left[ \frac{M_{Pl}^2}{6\pi\rho_M(T_r)} \right]^{1/2} .$$

Для плотности энергии нерелятивистского вещества (включая тёмную материю) имеем

$$\rho_M(T) = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} \cdot m_p \cdot n_B(T) .$$

Используя равенство  $n_B(T) = \eta_B \cdot n_\gamma(T)$  и формулу (5.16а), получаем окончательно

$$t_r = \left[ \frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_M}{\Omega_B} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B T_r^3 m_p} \right]^{1/2} . \quad (6.22)$$

Численно

$$t_r = 350 \text{ тыс. лет}$$

для  $T_r = 0.33 \text{ эВ}$ ,  $\Omega_B = 0.042$ ,  $\Omega_M = 0.24$  и  $\eta_B = 6.10 \cdot 10^{-10}$ . Отметим, что выражение (6.22) содержит лишь параметры, характеризующие Вселенную на момент рекомбинации (поскольку  $\frac{\Omega_B}{\Omega_M} = \frac{\rho_B}{\rho_B + \rho_{CDM}}$  постоянно во времени), как и должно быть.

▷ *Задача 3. Оцените численные значения химических потенциалов  $\mu_e$ ,  $\mu_p$ ,  $\mu_H$  на момент рекомбинации. Сравните полученные значения с массами электрона, протона и атома водорода.*

▷ *Задача 4. Дайте альтернативный вывод температуры рекомбинации, основанный на кинетическом подходе и соотношении (6.1).*

---

<sup>3</sup>Фактор 0.75 здесь — это отношение числа протонов к полному числу барионов, см. главу 8. Ядра <sup>4</sup>He раньше связываются с электронами в атомы гелия (см. раздел 6.2), поэтому для рассматриваемого процесса они несущественны.

Сделаем одно замечание. Разумеется, рекомбинация происходит не мгновенно: концентрация протонов  $X_p$ , определяемая из уравнения (6.14), плавно меняется от единицы (при  $T > T_r$ ) до практически нулевого значения (при  $T < T_r$ ). Однако это изменение происходит на малом интервале температур,

$$\Delta T \ll T_r ,$$

что связано с быстрым изменением экспоненты в (6.14) при  $T \sim T_r \ll \Delta_H$ . Этот интервал можно оценить из требования, чтобы экспонента в (6.14) отличалась в  $e$  раз от своего значения при  $T = T_r$ , то есть

$$\left| \frac{\Delta_H}{T_r \pm \Delta T} - \frac{\Delta_H}{T_r} \right| = 1 .$$

Отсюда получим

$$\frac{\Delta T}{T_r} \approx \frac{T_r}{\Delta_H}$$

или с учётом (6.17)

$$\frac{\Delta T}{T_r} \approx \frac{1}{-\ln \left( \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \left( \frac{2\pi T_r}{m_e} \right)^{3/2} \right)} \approx 0.03$$

Таким образом, концентрация свободных протонов и электронов в период рекомбинации заметно падает при понижении температуры всего на несколько процентов. Поскольку при эволюции Вселенной выполняется  $|\dot{T}/T| = \dot{a}/a = H(t)$ , процесс рекомбинации происходит за время, много меньшее хаббловского времени,  $\Delta t \ll H^{-1}(t)$ .

После рекомбинации, когда концентрация свободных протонов мала,  $X_p \ll 1$ , в уравнении (6.15) можно пренебречь первым членом. Тогда видно, что при дальнейшем понижении температуры концентрация свободных протонов экспоненциально падает.

## 6.2 Последнее рассеяние фотонов

С точки зрения наблюдений реликтового излучения интерес представляет не сам “момент” рекомбинации, который мы определили как момент равенства концентраций свободных протонов и атомов водорода, а “момент” последнего рассеяния реликтовых фотонов, после которого они свободно распространяются во Вселенной. Последнее рассеяние фотонов происходит несколько позже рекомбинации, когда плотность свободных электронов и протонов значительно падает. Основным процессом при этом является комптоновское рассеяние фотонов на электронах

$$\gamma e \rightarrow \gamma e \tag{6.23}$$

В квантовой электродинамике сечение этой реакции определяется двумя диаграммами, изображёнными на рис. 6.1. Нас интересуют температуры, а, следовательно, и частоты фотонов, малые по сравнению с массой электрона. В этом пределе сечение комптоновского рассеяния сводится к томсоновскому сечению, известному из классической электродинамики (обсуждение комптоновского рассеяния в квантовой

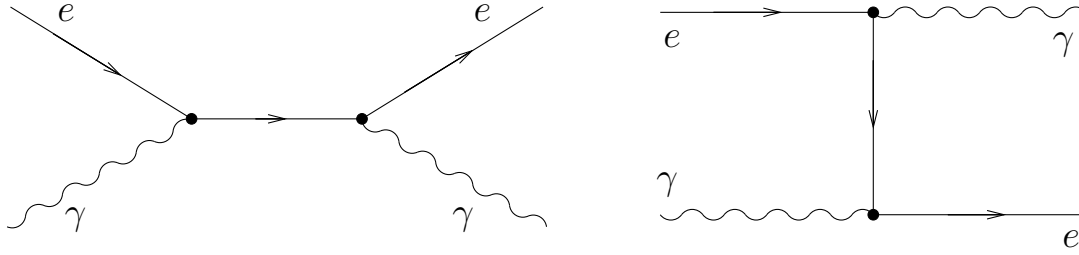


Рис. 6.1: Фейнмановские диаграммы для комптоновского рассеяния.

электродинамике читатель может найти в [18]; вывод томсоновского сечения в классической теории см. в [19]). Томсоновское сечение равно

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m_e^2} \approx 0.67 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2. \quad (6.24)$$

Отметим, что значение томсоновского сечения с точностью до численного множителя  $8\pi/3$  сразу же получается из размерных соображений. Действительно, множитель  $\alpha^2$  в сечении связан с тем, что диаграммы для комптоновского рассеяния содержат две вершины взаимодействия электрона с фотонами. Каждая из вершин вносит множитель  $e$  в выражение для амплитуды, что приводит к множителю  $\alpha^2$  в сечении, пропорциональном квадрату модуля амплитуды. При низких энергиях единственным размерным параметром является масса электрона, так что зависимость  $\sigma_T \propto m_e^{-2}$  восстанавливается по размерности.

Таким образом, время свободного пробега фотона по отношению к комптоновскому рассеянию равно

$$\tau_\gamma = \frac{1}{\sigma_T \cdot n_e(T)}, \quad (6.25)$$

где  $n_e$  — плотность свободных электронов. Последняя совпадает с плотностью протонов и определяется формулой (6.12), в которой при  $T < T_r$  можно положить  $n_H = n_B = \eta_B \cdot n_\gamma$ , поскольку рекомбинация практически завершилась. Итак,

$$n_e^2 = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \eta_B e^{-\Delta_H/T}, \quad (6.26)$$

где мы воспользовались формулой (5.16a). В момент последнего рассеяния время свободного пробега (6.25) совпадает по порядку величины с темпом расширения Вселенной,

$$\tau_\gamma(T_f) \simeq H^{-1}(T_f) \simeq t_f, \quad (6.27)$$

где  $T_f$  — температура последнего рассеяния. Используя (6.26), получаем отсюда

$$\frac{\Delta_H}{T_f} = \ln \left[ \sigma_T^2 t_r^2 \cdot \left( \frac{m_e T_r}{2\pi} \right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_r^3 \right], \quad (6.28)$$

где мы пренебрегли отличием  $T_f$  от  $T_r$  под логарифмом. Подставляя сюда  $T_r \simeq 0.33$  эВ,  $\eta_B = 0.75 \cdot 6.15 \cdot 10^{-10}$ ,  $t_r \simeq 3.5 \cdot 10^5$  лет и значение томсоновского сечения (6.24), получим численно

$$T_f = 0.27 \text{ эВ}.$$

Отметим, что хотя это значение и не сильно отличается от значения  $T_r = 0.33$  эВ, вычисленного в предыдущем разделе, доля свободных электронов в момент последнего рассеяния сильно отличается от единицы благодаря экспоненциальной зависимости в (6.26), см. также конец предыдущего раздела. Отметим также, что сделанные приближения и неопределённость, присущая (6.27), слабо сказываются на результате, по-существу по той же причине (а технически — благодаря слабой логарифмической зависимости правой части (6.28) от входящих в неё параметров). Итак, упругое рассеяние фотонов на электронах прекращается при  $T = 0.27$  эВ ( $z = 1100$ ). Возраст Вселенной в это время составляет 480 тыс. лет.

Почти в то же время полностью перестают идти процессы фотодезинтеграции — развала атомов водорода фотонами из высокоэнергетичной части спектра. Вселенная становится прозрачной для реликтовых фотонов. В дальнейшем, если не оговорено особо, мы не будем делать различия между температурами рекомбинации и последнего рассеяния фотонов и под температурой рекомбинации будем подразумевать

$$T_r \equiv T_f = 0.27 \text{ эВ} .$$

▷ *Задача 5. Проверьте, что характерное время рассеяния фотона на нейтральных атомах превышает возраст Вселенной на момент рекомбинации. Это означает, что наличие нейтрального водорода не сказывается на распространении реликтовых фотонов во Вселенной.*

## 6.3 \*Выполнение условий термодинамического равновесия

Обсудим более подробно физические допущения, сделанные нами при получении численного значения температуры рекомбинации. Прежде всего вспомним, что на самом деле в плазме имелась некоторая доля  $\alpha$ -частиц (примеси остальных лёгких ядер пренебрежимо малы). Часть электронов соединится не с протонами, а с  $\alpha$ -частицами. Вычисление температуры, при которой становится термодинамически выгодным образование нейтральных атомов гелия, производится совершенно аналогично вычислению для водорода, приведённому выше. Поскольку энергия ионизации атома гелия почти в два раза выше чем для водорода, образование нейтрального гелия происходит при более высокой температуре.

▷ *Задача 6. Найдите эту температуру. Не забудьте, что для образования нейтрального атома гелия  $\alpha$ -частице необходимо захватить два электрона.*

Таким образом, наличие  $\alpha$ -частиц, а потом атомов гелия в среде практически не влияет на процесс отщепления реликтовых фотонов: сразу после образования нейтрального гелия плазма всё ещё содержит свободные протоны и электроны, и поэтому всё ещё непрозрачна для фотонов.

Проверим теперь справедливость предположения о том, что плазма находится в термодинамическом равновесии. Именно на этом предположении было основано всё наше вычисление. Нам надо проверить, что скорость реакций энергообмена между различными компонентами плазмы (фотонами, электронами и протонами) достаточно высока по сравнению с темпом расширения Вселенной на момент рекомбинации, так что функции распределения всех этих частиц имеют равновесный вид (6.2)–(6.4) с одной и той же температурой. Кроме того, необходимо проверить, что скорость реакции рекомбинации (6.10) достаточно высока, так что свободные протоны и электроны действительно успевают объединяться в атомы водорода, несмотря на расширение Вселенной.

Начнём с обсуждения реакций энергообмена. В разделе 2.5 мы обнаружили, что если бы взаимодействие между фотонами и нерелятивистскими частицами в плазме отсутствовало, то и те и другие продолжали бы описываться равновесными функциями распределения, однако эффективная температура фотонов падала бы медленнее с расширением Вселенной. Таким образом, нам надо проверить, что взаимодействие, обеспечивающее “перекачку” энергии от фотонов в электрон-протонную компоненту плазмы, происходит достаточно эффективно.

Для начала рассмотрим электроны. Они получают энергию от фотонов в результате процесса комптоновского рассеяния (6.23), которое происходит с томсоновским сечением (6.24). Характерное время между двумя последовательными взаимодействиями данного электрона с фотонами имеет вид

$$\tau = \frac{1}{\sigma_T n_\gamma(T)} .$$

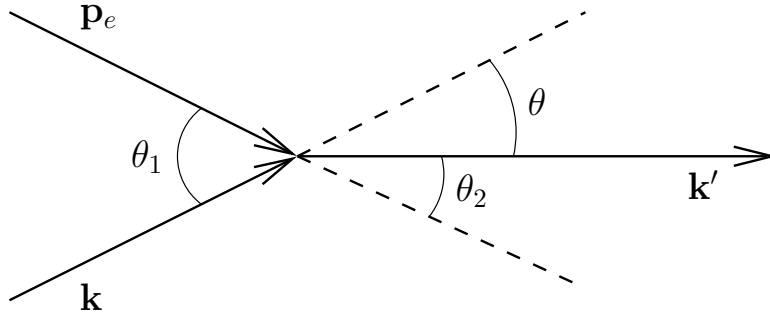


Рис. 6.2: Кинематика комптоновского рассеяния.

Нас, однако, интересует эффективность энергообмена между электронами и фотонами. Другими словами, нам необходимо оценить время  $\tau_E$ , в течение которого электрон приобретает кинетическую энергию порядка температуры за счет процессов комптоновского рассеяния. Для того, чтобы произвести эту оценку, заметим, что характерная передача энергии при столкновении фотона малой частоты  $\omega$  с медленным электроном дополнительно подавлена. Действительно, запишем закон сохранения 4-импульса в этом процессе в виде

$$p_e + p_\gamma - p'_\gamma = p'_e ,$$

где  $p_e, p_\gamma$  — начальные 4-импульсы электрона и фотона, а штрихованные величины относятся к конечным электрону и фотону. Возводя это равенство в квадрат, получаем

$$m_e(\omega - \omega') - |\mathbf{p}_e|(\omega \cos \theta_1 - \omega' \cos \theta_2) - \omega\omega'(1 - \cos \theta) = 0 , \quad (6.29)$$

где  $\mathbf{p}_e$  — начальный импульс электрона,  $\omega, \omega'$  — начальная и конечная частоты фотона,  $\theta_1, \theta_2$  — углы между начальным импульсом электрона и начальным и конечным импульсами фотона  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , соответственно, а  $\theta$  — угол рассеяния фотона (см. рис. 6.2). Если первоначально электрон покоился, то в уравнении (6.29) остаются первый и третий члены, так что мы получаем, что характерная передача энергии равна

$$\Delta E = \omega' - \omega \sim \frac{\omega^2}{m_e} . \quad (6.30)$$

Таким образом, для того чтобы покоящемуся электрону была передана энергия, сравнимая с температурой фотонов, требуется количество актов комптоновского рассеяния, по порядку величины равное

$$N \sim \frac{T}{\Delta E} \sim \frac{m_e}{T} . \quad (6.31)$$

Нас, впрочем, интересует ситуация, когда электрон до столкновения имеет энергию, сравнимую с частотой фотона. Именно эта ситуация интересна для проверки того, что электроны и фотоны находятся в термодинамическом равновесии на момент рекомбинации. В этой ситуации импульс электрона равен

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{2E_e m_e} \sim \sqrt{\omega m} ,$$

так что можно пренебречь третьим слагаемым в левой части равенства (6.29), и мы получаем следующую оценку для характерной энергопередачи в одном столкновении

$$\Delta E \sim \omega \sqrt{\frac{\omega}{m}} . \quad (6.32)$$

Заметим, однако, что в отличие от третьего члена, второе слагаемое в левой части уравнения (6.29) является знакопеременным, поскольку углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  принимают произвольные случайные значения. Поэтому, пользуясь аналогией со случайными блужданиями, можно оценить количество актов комптоновского рассеяния, требующихся для “разогрева” движущегося электрона как

$$N \sim \left( \frac{T}{\Delta E} \right)^2 \sim \frac{m_e}{T} ,$$

что совпадает с оценкой (6.31) для покоящегося электрона<sup>4</sup>. Тогда для характерного времени “разогрева” мы получаем следующую оценку

$$\tau_E(T) \sim N\tau(T) \sim \frac{m_e}{T\sigma_T n_\gamma(T)} = \frac{m_e}{T_0\sigma_T n_\gamma(T_0)}(1+z)^{-4} , \quad (6.33)$$

<sup>4</sup>Заметим, что с повышением скорости электрона второй член в уравнении (6.29) начинает приводить к систематической потере энергии электроном, поскольку количество фотонов, летящих навстречу электрону, больше, чем количество фотонов, “догоняющих” электрон. В итоге этот процесс приводит к установлению равновесной энергии электрона  $E \sim T$ , если вначале электрон имел высокую энергию  $E \gg T$ .

где мы учли, что  $T = T_0(1 + z)$  и  $n_\gamma \propto T^3$ . Подставляя численные значения параметров, входящих в выражение (6.33), на момент рекомбинации получаем следующее значение  $\tau_E(T_r)$

$$\tau_E(T_r) \simeq 1.8 \cdot 10^8 \text{ с} ,$$

что намного меньше возраста Вселенной на момент рекомбинации. Таким образом, энергообмен между фотонами и электронами достаточно эффективен, чтобы поддерживать у них одинаковое значение температуры на момент рекомбинации.

Обсудим теперь как происходит “подогрев” протонов. Легко видеть, что механизм энергопередачи, основанный на прямом взаимодействии с фотонами, неэффективен. В самом деле, весь анализ, приведённый для электронов, остаётся в силе с той разницей, что везде вместо массы электрона следует теперь подставить массу протона. Это приведёт к увеличению характерного времени “подогрева” на фактор  $(m_p/m_e)^3$ , так что это время станет больше возраста Вселенной на момент рекомбинации.

Процесс, обеспечивающий эффективную энергопередачу протонам — это упругое рассеяние электронов на протонах. Для нерелятивистских частиц дифференциальное сечение этого процесса в системе покоя протона дается классической формулой Резерфорда

$$d\sigma_R = \frac{\pi\alpha^2}{m_e^2 v^4} \frac{\sin\theta}{\sin^4\theta/2} d\theta , \quad (6.34)$$

где  $v$  — скорость электрона,  $\theta$  — угол рассеяния. Дифференциальное сечение (6.34) имеет степенную сингулярность вида  $d\theta/\theta^3$  при малых углах рассеяния, так что соответствующее интегральное сечение расходится, а время свободного пробега формально обращается в нуль. Однако, как и выше, нас интересует не время свободного пробега, а характерное время энергопередачи  $\tau_E$ . Для того, чтобы получить оценочную формулу для этой величины, заметим, что при рассеянии электрона на покоящемся протоне на угол  $\theta$  передача энергии равна

$$\Delta E = 2 \frac{m_e}{m_p} E (1 - \cos\theta) , \quad (6.35)$$

где  $E$  — энергия электрона.

► *Задача 7. Проверьте формулу (6.35).*

Как и в случае комптоновского рассеяния, при переходе в систему отсчета плазмы, где протон движется, возникает знакопеременный вклад в передачу, подавленный не отношением  $m_e/m_p$ , а квадратным корнем из этого отношения. Однако, в соответствии с аргументами, приведёнными выше, после усреднения по углам вклад этого члена оказывается того же порядка, что и (6.35), так что мы не будем выписывать его явно.

Пользуясь выражениями (6.34) и (6.35), мы получаем следующую оценку для характерного времени энергопередачи

$$\tau_E \sim \left( n_e v \int d\theta \frac{d\sigma_R}{d\theta} \frac{\Delta E(\theta)}{E} \right)^{-1} = \left( \frac{8n_e \pi \alpha^2}{m_p m_e v^3} \int d\theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{-1} . \quad (6.36)$$

Интеграл в правой части уравнения (6.36) по-прежнему расходится на малых углах, но уже не степенным образом, а логарифмически. Такое сглаживание сингулярности хорошо понятно физически — оно связано с тем, что при рассеянии на малые углы энергопередача тоже становится крайне мала. Для того, чтобы получить конечное значение для интеграла в (6.36), вспомним, что в плазме фотон в некотором смысле не является строго безмассовой частицей, а приобретает небольшую “массу”  $m_D$  за счет эффектов вещества. Точнее, на расстояниях  $r \gtrsim r_D = m_D^{-1}$  потенциал между заряженными частицами определяется не законом Кулона, а экспоненциально подавлен (напомним, что это явление носит название дебаевской экранировки, см. [17]). Значение дебаевского радиуса  $r_D$  дается следующей формулой

$$r_D = \left( \frac{T}{4\pi n_e \alpha} \right)^{1/2} .$$

Следовательно, интеграл в уравнении (6.36) следует обрезать на углах рассеяния, соответствующих значению прицельного параметра, равному  $r_D$ ,

$$\theta \gtrsim \theta_D \sim \frac{\alpha}{m_e v^2 r_D} . \quad (6.37)$$

► *Задача 8. Пользуясь выражением (6.34) для резерфордовского дифференциального сечения, получите оценку (6.37) для  $\theta_D$ .*

Главный вклад в интеграл в уравнении (6.36) приходит из области малых углов рассеяния  $\theta \sim \theta_D$ , так что мы можем написать следующую оценку для характерного времени энергопередачи

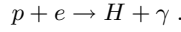
$$\tau_E(T) \sim \frac{m_p m_e v^3}{16\pi n_e(T) \alpha^2 \ln \theta_D^{-1}} \sim \frac{m_p m_e}{16\pi n_e(T) \alpha^2 \ln(6T r_D / \alpha)} \left( \frac{3T}{m_e} \right)^{3/2}. \quad (6.38)$$

Подставляя численные значения параметров, входящих в (6.38), на момент рекомбинации, получаем

$$\tau_E(T_r) \sim 10^4 \text{ с} \ll t_r.$$

Следовательно, энергопередача между электронами и протонами достаточно эффективна для установления термодинамического равновесия.

Перейдём теперь к обсуждению установления химического равновесия для основной реакции рекомбинации



В интересующей нас кинематической области, когда энергия электрона меньше энергии связи атома водорода  $\Delta_H$ , сечение этой реакции имеет следующий вид (см. [18], стр. 243-244)

$$\sigma_{rec} = \frac{2^{10} \pi^2}{3e^4} \frac{\omega^2}{\alpha m_e^4 v^2}, \quad (6.39)$$

где  $\omega$  — частота испущенного фотона, по порядку величины равная  $\Delta_H$ , а  $e$  — основание натуральных логарифмов. Тогда характерное время, требующееся свободному протону для образования атома водорода, равно

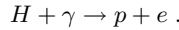
$$\tau_r(T) \simeq \langle (\sigma_{rec} v n_e)^{-1} \rangle \simeq \frac{3e^4 \alpha}{2^{10} \pi^2} \frac{2\sqrt{2T m_e} m_e^3}{\sqrt{\pi} \Delta_H^2 n_e(T)}, \quad (6.40)$$

где мы усреднили по скоростям электронов. К моменту рекомбинации,  $T \simeq 0.33$  эВ, когда плотность свободных электронов с хорошей степенью точности ещё была равновесной, это время составляло

$$\tau_r(T_r) \simeq 435 \text{ лет}. \quad (6.41)$$

Итак, характерное время реакции образования атома водорода также меньше возраста Вселенной на момент рекомбинации.

► **Задача 9.** Проверьте, что аналогичное утверждение справедливо и для обратного процесса — фотоэффекта для атома водорода



Таким образом, мы убедились в применимости равновесного рассмотрения процесса рекомбинации. Заметим, что в качестве побочного следствия нашего вычисления легко получить оценку для остаточной ионизации Вселенной, т.е. для концентрации свободных электронов после рекомбинации. А именно, электроны и протоны закаливаются тогда, когда характерное время, необходимое свободному протону для встречи со свободным электроном и последующим образованием атома водорода, определяемое формулой (6.40), превысит возраст Вселенной,

$$\tau_r(T) \gtrsim t_r. \quad (6.42)$$

Это происходит при температуре  $T_r \approx 0.27$  эВ. Условие (6.42) совместно с выражением (6.40) определяют плотность свободных электронов  $n_e^{\text{своб.}}$  (она уже не будет даваться равновесным температурным распределением) на момент закалки — замораживания реакции образования водорода. Её отношение к полной плотности электронов, содержащихся к этому моменту, в основном, в атомах водорода (и гелия), равна

$$\frac{n_e^{\text{своб.}}(T_r)}{n_e^{\text{полн.}}(T_r)} \simeq \frac{1}{t_r \langle \sigma_{rec} v \rangle \eta_B n_\gamma(T_r)} = \frac{3e^4 \alpha}{2^{10} \zeta(3) \sqrt{\pi} \eta_B} \frac{\sqrt{2m_e}}{\sqrt{T_r}} \frac{m_e^3}{\Delta_H^2 T_r^2 t_r} \simeq 10^{-3}, \quad \eta_B = 6.15 \cdot 10^{-10}. \quad (6.43)$$

После этого реакция рекомбинации идти не будет, так что (6.43) даёт оценку для остаточной концентрации свободных электронов.

Отметим, что из (6.27) следует, что при интересующих нас температурах,  $T \simeq T_f = 0.27$  эВ, время свободного пробега фотона (6.25) превышает характерное время рекомбинации (6.40). Это означает, что последнее рассеяние фотонов происходит перед тем, как закаливаются свободные электроны, так что результаты раздела 6.2 остаются в силе.

В заключение раздела подчеркнём, что все наше рассмотрение носило оценочный, приближённый характер. К примеру, при вычислении различных термодинамических средних (таких как  $\sigma v$  в формуле для времени свободного пробега) мы заменяли среднее от произведения на произведение средних. Конечно, при точных количественных вычислениях нужно действовать более аккуратно, а для вычисления неравновесных величин, таких как остаточная плотность свободных электронов, необходимо пользоваться уравнением Больцмана. Тем не менее, сравнение с точными вычислениями показывает, что оценки, сделанные нами, в большинстве случаев справедливы с точностью порядка 10-50%, что вполне достаточно для наших целей.



## 6.4 Горизонт на момент рекомбинации и угол, под которым он виден сегодня. Пространственная плоскостность Вселенной

Реликтовые фотоны, отщепившиеся в момент рекомбинации, несут на себе отпечаток Вселенной, какой она была при температуре  $T_r = 0.26$  эВ, т.е. в  $z_r = 1100$  раз более высокой, чем сейчас. В период рекомбинации Вселенная характеризовалась собственным масштабом длины — размером горизонта  $l_{H,r}$ . Этот масштаб интересен, во-первых, тем, что в теории горячего Большого взрыва области, находившиеся в то время на расстоянии больше  $l_{H,r}$  друг от друга, были в тот момент причинно несвязанными. Во-вторых, наличие характерного масштаба длины не могло не сказаться на свойствах реликтовых фотонов. Мы увидим во второй части книги, что анизотропия реликтового излучения действительно имеет особенности на угловых масштабах, определяемых размером  $l_{H,r}$ , точнее, тем углом, под которым горизонт на момент рекомбинации виден сегодня. В этом разделе мы найдём этот угол и определим, как он зависит от космологических параметров.

Поскольку температура рекомбинации  $T_r = 0.27$  эВ заметно меньше температуры  $T_{eq} \simeq 0.7$  эВ, при которой произошел переход от радиационно-доминированной к пылевидной стадии (см. раздел 4.4), размер горизонта на момент рекомбинации даётся формулой (3.23), справедливой для пылевидной стадии:

$$l_{H,r} = \frac{2}{H_r}$$

где  $H_r \equiv H(t_r)$  — параметр Хаббла на момент рекомбинации. Дальнейшее вычисление можно было бы провести аналогично вычислению возраста Вселенной  $t_r$ , приводящему к формуле (6.22). Нам здесь, однако, будет удобен другой, эквивалентный подход. Величину  $H_r$  найдём из уравнения Фридмана

$$H_r^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M(t_r) .$$

Учтём, что

$$\rho_M(t_r) = \rho_{M,0} \left( \frac{a_0}{a_r} \right)^3 = \rho_{M,0} (1 + z_r)^3 .$$

где  $\rho_{M,0}$  — современная плотность нерелятивистского вещества во Вселенной, и что  $\rho_{M,0} = \rho_c \Omega_M$ , см. Главу 4. Комбинируя эти формулы с определением  $\rho_c$  (см. (4.3)), получим

$$l_{H,r} = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1 + z_r)^{3/2}} . \quad (6.44)$$

▷ *Задача 10. Показать, что результаты (6.44) и (6.22) совпадают с учётом равенства  $l_{H,r} = 3t_r$ . Таким образом, зависимость выражения (6.44) от параметров, характеризующих современную Вселенную — лишь кажущаяся.*

С момента рекомбинации масштаб (6.44) растянулся в  $(1 + z_r)$  раз за счёт расширения Вселенной, и сегодня соответствующий размер равен

$$l_{H,r}(t_0) = \frac{2}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1 + z_r}} .$$

Видно, что этот размер примерно в  $\sqrt{1+z_r} \simeq 30$  раз меньше современного размера горизонта (4.30); иными словами, в сегодняшней видимой части Вселенной имеется порядка  $(1+z_r)^{3/2} \sim 3 \cdot 10^4$  областей, которые не были причинно связанными между собой к моменту рекомбинации (разумеется, если оставаться в рамках модели горячего Большого Взрыва). Тем не менее, эти области Вселенной были совершенно одинаковыми — это мы знаем как из свойств пришедшего из них реликтового излучения, так и из глубоких обзоров галактик. Как получилось, что несмотря на отсутствие причинной связи между разными областями они оказались в совершенно одинаковом состоянии? Ответа на этот вопрос теория горячего Большого взрыва не даёт, что составляет одну из проблем этой теории — проблему горизонта. Проблема горизонта элегантно разрешается в инфляционной теории.

Найдём сегодняшний угловой размер области, пространственный размер которой в момент рекомбинации равнялся  $l_{H,r}$ . При этом мы вновь, как и в разделе 4.6, не будем предполагать, что Вселенная — пространственно плоская: как мы обсудим в этом разделе на качественном уровне (а в дальнейшем и более подробно), именно вычисления подобного типа и их сравнение с измерениями анизотропии реликтового излучения позволяют сделать вывод о том, что пространственная кривизна Вселенной близка к нулю. Кроме того, мы будем считать  $\rho_\Lambda$  постоянной во времени (тёмная энергия=вакуум); соответствующее обобщение сделать нетрудно.

Для определённости вновь, как и в разделе 4.6, выберем открытую модель Вселенной ( $\varkappa = -1$ ,  $\Omega_{curv} > 0$ ), т.е. будем пользоваться метрикой в форме (2.10). Рекомбинация отделена от нас на координатное расстояние

$$\chi_r = \int_{t_r}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (6.45)$$

именно такое координатное расстояние пролетели реликтовые фотоны, испущенные в момент рекомбинации. Это координатное расстояние вновь выражается формулой (4.36), в которой следует положить  $z = z_r$ . Поскольку  $z_r \gg 1$ , в интеграле (4.36) можно положить предел интегрирования равным бесконечности, что соответствует пределу  $t_r \rightarrow 0$  в интеграле (6.45). Физически это означает, что мы пренебрегаем отличием между расстоянием, которое пролетели реликтовые фотоны с момента рекомбинации, и размером современного горизонта. Итак,

$$\chi_r \simeq \chi_{H,0} = \int_0^\infty \frac{dz}{a_0 H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}}, \quad (6.46)$$

что совпадает с координатным размером современного горизонта. Воспользовавшись результатами раздела 4.7, запишем выражение для углового размера,

$$\Delta\theta_r = \frac{l_{H,r}}{r_a(z_r)},$$

где  $r_a(z_r) = (1+z_r)^{-1} \cdot a_0 \cdot \text{sh} \chi_r$  — расстояние углового размера для момента рекомбинации. Имеем окончательно

$$\Delta\theta_r = \frac{2}{\sqrt{\Omega_M} a_0 H_0 \text{sh} \chi_r} \frac{1}{\sqrt{z_r + 1}}. \quad (6.47)$$

При обсуждении этой формулы по-прежнему нужно иметь в виду соотношения (4.41) и (4.42).

Мы начнём обсуждение результата (6.47) с гипотетического случая пространственно-плоской Вселенной без космологической постоянной,  $\Omega_{curv} = 0$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ . Пространственно-плоская Вселенная получается в пределе  $a_0 \rightarrow \infty$ , так что

$$\Delta\theta_r = \frac{1}{\sqrt{z_r + 1}}, \quad \Omega_{curv} = \Omega_\Lambda = 0. \quad (6.48)$$

Разумеется, этот результат гораздо быстрее можно было бы получить, используя непосредственно формулы для Вселенной с пылевидной материей, раздел 3.2.1.

▷ *Задача 11. Получить формулу (6.48) непосредственно в модели плоской Вселенной с пылевидной материей.*

Для  $z_r = 1100$  формула (6.48) даёт  $\Delta\theta_r = 0.03$ , или  $\Delta\theta_r = 1.7^\circ$ . В рамках модели горячего Большого взрыва это означает, что реликтовые фотоны, приходящие к нам с направлений, различающихся на небесной сфере более чем на  $2^\circ$ , были испущены из областей Вселенной, причинно не связанных между собой. Тем не менее эти фотоны имеют одинаковую (с точностью лучше  $10^{-4}$ ) температуру! Это и есть одно из проявлений проблемы горизонта.

Вернёмся к обсуждению формулы (6.47). Как мы уже отмечали, угол  $\Delta\theta_r$  определяет угловой масштаб, на котором имеются особенности в спектре угловой анизотропии реликтового излучения (подробности мы обсудим во второй части книги). В этом смысле угол  $\Delta\theta_r$  является измеримой величиной. Поэтому имеет смысл рассмотреть зависимость  $\Delta\theta_r$  от космологических параметров. Поскольку  $z_r$  фиксировано, таких параметров всего два: с учётом соотношений (4.41) и (4.42) в качестве пары независимых параметров можно выбрать  $(\Omega_M, \Omega_{curv})$ . Чтобы понять, от какого из этих двух параметров зависимость наиболее сильная, рассмотрим сначала случай  $\Omega_{curv} = 0$ , т.е. случай пространственно-плоской Вселенной. В отличие от случая (6.48), теперь  $\Omega_\Lambda \neq 0$  и, соответственно,  $\Omega_M \neq 1$ . Нас интересует предел  $a_0 \rightarrow \infty$ , так что выражение (6.47) приобретает вид

$$\Delta\theta_r = \frac{1}{\sqrt{z_r + 1}} \frac{1}{I(\Omega_M)}, \quad \Omega_{curv} = 0, \quad (6.49)$$

где

$$I = \frac{\sqrt{\Omega_M}}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M(z+1)^3 + \Omega_\Lambda}}, \quad (6.50)$$

причём  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M$ . С помощью замены  $(1+z) = y^{-2}$  приведём этот интеграл к виду

$$I = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} y^6}}. \quad (6.51)$$

Если  $\Omega_M$  не слишком малá, то этот интеграл довольно слабо зависит от  $\Omega_\Lambda/\Omega_M$ : при  $\Omega_M = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$  он равен 1, а при  $\Omega_M = 0.24$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.76$  он равен 0.81. Мы заключаем, что зависимость угла  $\Delta\theta_r$  от соотношения между  $\Omega_M$  и  $\Omega_\Lambda$  — довольно слабая.

В то же время, угол  $\Delta\theta_r$  весьма сильно зависит от  $\Omega_{curv}$ . Чтобы убедиться в этом, рассмотрим гипотетический случай  $\Omega_\Lambda = 0$ , когда  $\Omega_M + \Omega_{curv} = 1$ . В этом случае замена переменных  $(1+z) = y^{-2}$  позволяет вычислить интеграл (6.46) в аналитическом виде

$$\chi_r = 2 \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{\Omega_{curv}}{\Omega_M}}, \quad \Omega_\Lambda = 0,$$

где мы использовали соотношение (4.42). Для угла  $\Delta\theta_r$  имеем

$$\Delta\theta_r = \frac{1}{\sqrt{z_r + 1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega_{curv}/\Omega_M}}.$$

Видно, что при  $\Omega_{curv} \sim \Omega_M$  это выражение довольно сильно отличается от результатов (6.48) и (6.49), полученных для случая плоской Вселенной. Уже отсюда ясно, что измерение  $\Delta\theta_r$  (точнее, связанных с ним угловых масштабов) позволяет получить сильные ограничения на пространственную кривизну Вселенной.

Наконец, рассмотрим случай, когда  $\Omega_{curv}$  мало по сравнению с  $\Omega_M$  и  $\Omega_\Lambda$ , а последние — сравнимы между собой. Тогда в подкоренном выражении в (6.46) можно пренебречь величиной  $\Omega_{curv}$  (это соответствует малости вклада кривизны в уравнение Фридмана на всех этапах эволюции Вселенной, обсуждавшейся в разделе 4.2), и с учётом (4.42) мы получаем

$$\chi_r = 2\sqrt{\frac{\Omega_{curv}}{\Omega_M}} I(\Omega_M, \Omega_\Lambda),$$

где  $I$  — тот же интеграл (6.50) или (6.51), но  $\Omega_\Lambda$  уже не равно  $(1 - \Omega_M)$ . Вновь используя (6.47), получим выражение для угла

$$\Delta\theta_r = \frac{1}{\sqrt{z_r + 1}} \frac{2\sqrt{\Omega_{curv}/\Omega_M}}{\text{sh}\left(2\sqrt{\Omega_{curv}/\Omega_M} I\right)}. \quad (6.52)$$

Кривизна пространства здесь проявляется в том, что в знаменателе стоит гиперболический синус, а не линейная функция: угол, под которым заданный отрезок длины виден с фиксированного расстояния на гиперboloиде, меньше, чем соответствующий угол для евклидова пространства. Зависимость правой части (6.52) от  $\Omega_{curv}/\Omega_M$  — достаточно сильная, в отличие от зависимости от  $\Omega_\Lambda/\Omega_M$ . Это подтверждает вывод о заметной чувствительности измерения  $\Delta\theta_r$  к пространственной кривизне. Заметим, что мы вновь сталкиваемся с явлением приближённого вырождения по параметрам, с которым мы встречались в разделе 4.6, но теперь в роли менее существенного параметра выступает  $\Omega_\Lambda/\Omega_M$ .

Уже первые достаточно точные измерения анизотропии реликтового излучения на небольших угловых масштабах (доли градуса) позволили сделать вывод о малой пространственной кривизне Вселенной, а вместе с результатами изучения сверхновых типа Ia — сформулировать модель  $\Lambda$ CDM (см. рис. 6.3). Последующие наблюдательные данные не вошли в противоречие с этой моделью, но привели к её уточнению и развитию. Это проиллюстрировано на рис. 6.4. Некоторых из этих результатов мы коснёмся в следующих Главах.

- ▷ *Задача 12.* Вычисляя интеграл (6.46) численно, изобразить линии постоянного  $\Delta\theta_r$  на плоскости  $(\Omega_\Lambda, \Omega_M)$ . Сравнить качественно с рис. 6.3. Указание: использовать соотношения (4.41), (4.42).
- ▷ *Задача 13.* Уточнить формулу (6.44) с учётом того, что переход от радиационно-доминированной к пылевидной стадии произошел не слишком задолго до рекомбинации. Указание: воспользоваться для этого результатами решения задачи 4 Главы 4.

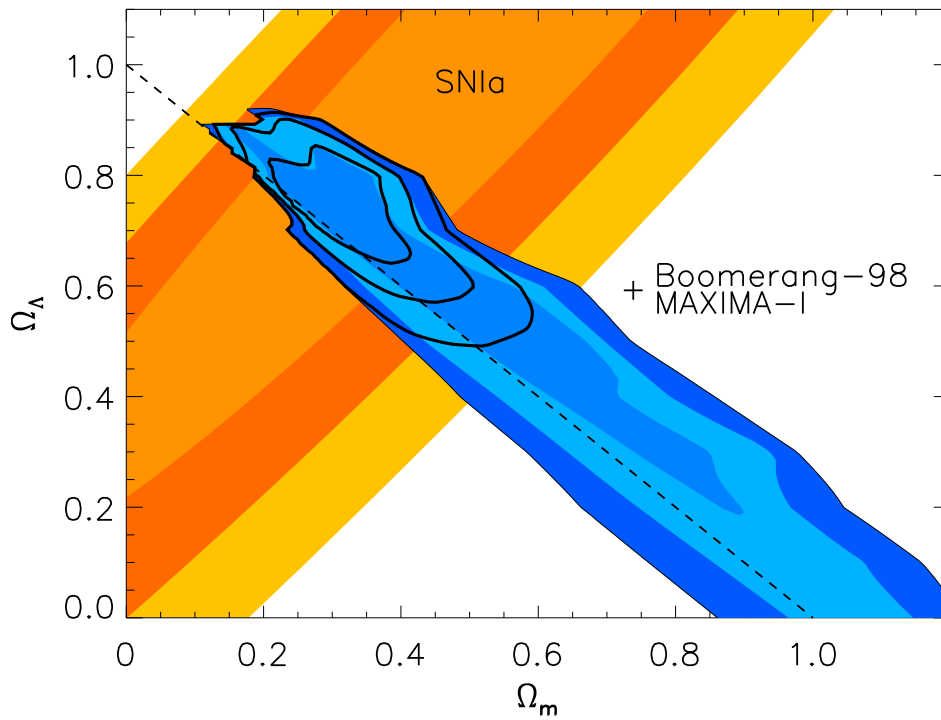


Рис. 6.3: Ранние ограничения на космологические параметры из анализа [20] данных измерения анизотропии реликтового излучения и данных наблюдения сверхновых типа Ia. По поводу контуров, ограничивающих разрешённые области, см. комментарий к рис. 4.6 перед задачей 9.

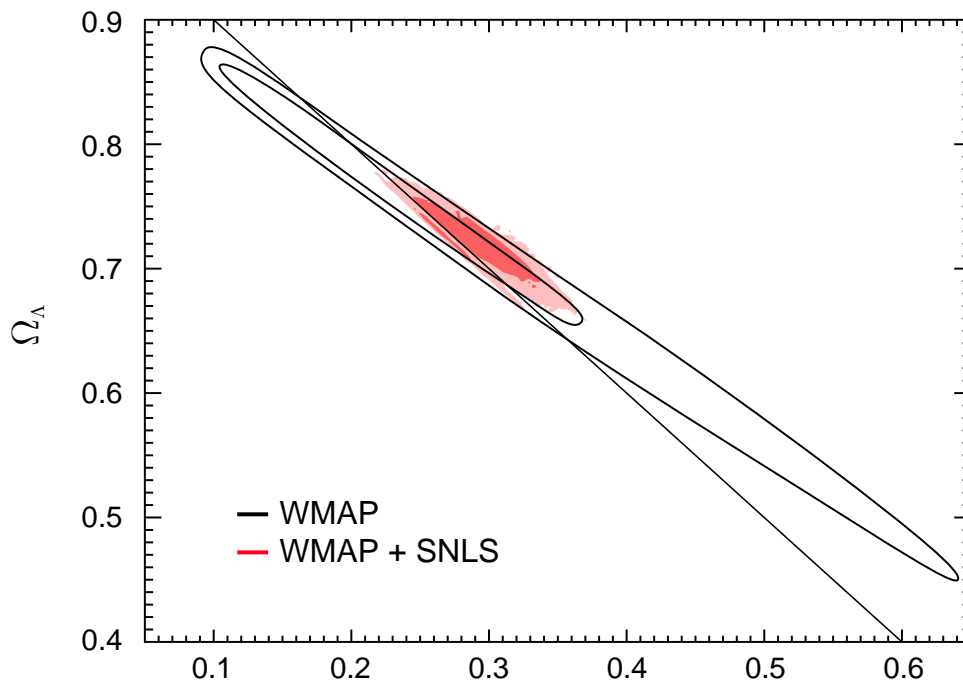


Рис. 6.4: Разрешённая область в пространстве  $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$  из данных по анизотропии реликтового излучения и наблюдений сверхновых типа Ia [5]. Отмечены области параметров, отвечающие 68% и 90% доверительным интервалам.

# Глава 7

## Реликтовые нейтрино

Чем более ранний момент времени в истории Вселенной мы рассматриваем, тем выше температура и плотность вещества, заполняющего её. Из-за этого те взаимодействия, которые слишком слабы, чтобы играть роль на современной стадии эволюции, оказываются существенными на более ранних стадиях и могут оставить заметный след в той Вселенной, которую мы наблюдаем сейчас.

В Главе 6 мы уже обсуждали явление такого рода на примере реликтового фотонного излучения. В этой Главе мы продвинемся еще дальше назад по времени и обсудим роль других лёгких частиц — нейтрино.

### 7.1 Температура закалки нейтрино

В этом разделе мы оценим температуру, при которой нейтрино перестают взаимодействовать между собой и с космической плазмой. Мы увидим, что это происходит при температуре порядка нескольких МэВ. В это время электроны и позитроны все ещё релятивистские, и их концентрация даётся формулой (5.16b). Барионы при этом уже нерелятивистские, и их концентрация подавлена фактором порядка  $\eta_B$  по отношению к концентрации  $e^+e^-$ -пар. Поэтому с точки зрения закалки нейтрино существенными процессами являются только процессы рассеяния нейтрино на электронах, позитронах и между собой и аннигиляция нейтрино и антинейтрино в  $e^+e^-$ -пару или пару нейтрино-антинейтрино другого типа, а также обратные процессы. Все они происходят с участием ультрарелятивистских частиц при интересующих нас температурах.

Для дальнейшего нам будет несущественно точное значение температуры закалки нейтрино. Поэтому нам будет достаточно размерной оценки сечений процессов с участием нейтрино. Нейтрино участвуют только в слабых взаимодействиях (см. Приложение С). При интересующих нас энергиях сечения пропорциональны квадрату фермиевской константы  $G_F^2$ , где

$$G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2} .$$

Из размерных соображений отсюда сразу получается оценка для сечения любого из указанных выше процессов,

$$\sigma_\nu \sim G_F^2 E^2 ,$$

где  $E$  — характерная энергия столкновения,  $E \sim T$ .

Время свободного пробега нейтрино как всегда даётся формулой

$$\tau_\nu = \frac{1}{\langle \sigma_\nu n v \rangle}, \quad (7.1)$$

$v$  — относительная скорость нейтрино и частиц, с которыми происходит столкновение, а  $n$  — плотность этих частиц. В интересующем нас случае ультрарелятивистских частиц плотность числа частиц даётся релятивистской формулой (5.16), т.е.  $n \sim T^3$ , а относительная скорость  $v \simeq 1$ . Таким образом, мы приходим к следующей оценке для времени свободного пробега

$$\tau_\nu \sim \frac{1}{G_F^2 T^5}. \quad (7.2)$$

Сравнивая  $\tau_\nu$  с хаббловским временем

$$H^{-1} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2}, \quad (7.3)$$

мы видим, что в процессе охлаждения Вселенной  $\tau_\nu$  растёт быстрее, чем  $H^{-1}$ . Следовательно, в соответствии с наивным ожиданием, при достаточно высоких температурах время свободного пробега нейтрино было меньше, чем хаббловское время, и нейтрино находились в термодинамическом равновесии с веществом. Действительно, число столкновений нейтрино, начиная с момента времени  $t$ , оценивается величиной

$$N(t) \sim \int_t^\infty \frac{dt'}{\tau_\nu(t')} = \int_t^\infty \frac{dt'}{t'} \frac{t'}{\tau_\nu(t')} \sim \frac{t}{\tau_\nu(t)} \sim \frac{1}{H(t)\tau_\nu(t)},$$

где мы учли, что  $t/\tau_\nu(t) \sim 1/(H(t)\tau_\nu(t))$  быстро падает со временем. Если  $N(t) \gg 1$ , то нейтрино находятся в термодинамическом равновесии, а при  $N(t) \ll 1$  они распространяются как свободные частицы. Таким образом, нейтрино перестают взаимодействовать (“закалываются”) при

$$\tau_\nu(T) \sim H^{-1}(T).$$

Из (7.2) и (7.3) следует, что это происходит при температуре

$$T_{\nu,f} \sim \left( \frac{1}{G_F^2 M_{Pl}^*} \right)^{1/3} \sim 2 \div 3 \text{ МэВ}.$$

▷ *Задача 1. Оценить возраст Вселенной на момент закалки нейтрино.*

Итак, при температуре порядка  $T_{\nu,f}$  нейтрино испытали последнее столкновение и с тех пор распространялись во Вселенной свободно. Их полное число (в сопутствующем объёме) при этом не изменялось: как мы говорили, реакции аннигиляции  $e^+e^- \rightarrow \bar{\nu}\nu$  и  $\bar{\nu}\nu \rightarrow e^+e^-$  также обусловлены слабыми взаимодействиями и, следовательно, также перестают идти в момент закалки нейтрино. Таким образом, одно лишь предположение о том, что Вселенная когда-то имела температуру выше нескольких МэВ (а как мы увидим в дальнейшем, успех теории нуклеосинтеза даёт твёрдое подтверждение такому предположению) приводит к выводу о том, что должен существовать реликтовый газ нейтрино, аналогичный газу реликтовых фотонов, т.е. микроволновому фотонному излучению.

## 7.2 Эффективная температура нейтрино. Космологическое ограничение на массу нейтрино

Как следует из результатов раздела 2.5, нейтрино после закалки по-прежнему описываются ультрарелятивистской функцией распределения, характеризующейся эффективной температурой

$$T_\nu = T_{\nu,f} \frac{a(t_\nu)}{a(t_0)} = \frac{T_{\nu,f}}{1 + z_\nu} , \quad (7.4)$$

где  $z_\nu$  — красное смещение, соответствующее моменту закалки нейтрино. В этот момент температура нейтрино была равна температуре фотонов. Впоследствии температура фотонов также падала за счёт расширения Вселенной, сначала по закону (7.4). Однако, в момент закалки нейтрино кроме фотонов в плазме было также большое количество релятивистских электрон-позитронных пар. После того, как Вселенная охладилась до температур ниже массы электрона, электрон-позитронные пары проаннигилировали в фотоны, что привело к “подогреву” фотонов относительно нейтрино. Количественно эффект подогрева фотонов за счёт аннигиляции электронов и позитронов можно определить, пользуясь законом сохранения энтропии электрон-фотонной компоненты в сопутствующем объёме,

$$g_*(T) a^3 T^3 = \text{const} , \quad (7.5)$$

где  $g_*(T)$  — эффективное число релятивистских степеней свободы в электрон-фотонной плазме (см. соотношения (5.31) и (5.36)). Сразу после закалки нейтрино в энтропию электрон-фотонной плазмы давали вклад фотоны, электроны и позитроны, что приводит к следующему значению:

$$g_*(T_{\nu,f}) = 2 + \frac{7}{8}(2 + 2) = \frac{11}{2} ,$$

После  $e^+e^-$ -аннигиляции в энтропию плазмы вносят вклад только фотоны, и отношение температур фотонов и нейтрино остаётся постоянным и равным

$$\frac{T_{\gamma,0}}{T_{\nu,0}} = \left( \frac{g_*(T_{\nu,f})}{g_*(T_0)} \right)^{1/3} = \left( \frac{11}{4} \right)^{1/3} \simeq 1.4 . \quad (7.6)$$

Следовательно, в настоящее время температура нейтрино равна <sup>1</sup>

$$T_\nu(t_0) \simeq 1.95 \text{ K} . \quad (7.7)$$

Пользуясь формулой (5.16) находим, что при современной температуре плотность числа нейтрино и антинейтрино каждого типа составляет

$$n_{\nu,0} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_\nu^3(t_0) \simeq 112 \text{ см}^{-3} . \quad (7.8)$$

---

<sup>1</sup>Ещё раз отметим, что *массивные* нейтрино имеют сегодня *ультрарелятивистскую* функцию распределения по импульсам. Это не мешает, однако, использовать формулу (5.16) для нахождения их концентрации.



- ▷ *Задача 2.* Сделаем (неправильное) предположение о том, что в природе отсутствуют  $Z^0$ -бозоны, а  $W^\pm$  — существуют (модель Джорджи–Глэшоу). Какими тогда будут современные концентрации нейтрино различных типов? Указание: процессы, происходящие на петлевом уровне, не учитывать; предполагать (снова вопреки экспериментальным данным), что нейтринные осцилляции отсутствуют.

Прямое детектирование реликтовых нейтрино кажется практически неразрешимой задачей ввиду крайне малых сечений взаимодействия нейтрино с веществом и ничтожного энерговыделения.

- ▷ *Задача 3.* Считая нейтрино безмассовыми, оцените массу детектора, в котором бы происходило одно взаимодействие реликтового нейтрино в течение одного года.

Реликтовые нейтрино, если они массивны, могли бы оказать существенное влияние на темп расширения Вселенной. Отсюда возникает важное космологическое ограничение на массу нейтрино. Чтобы вывести это ограничение, найдём вклад  $\Omega_\nu$  какого-то одного типа нейтрино и антинейтрино в современную относительную плотность Вселенной. Если речь идёт о безмассовом нейтрино, то из выражения (5.12) для плотности энергии в ультрарелятивистском случае следует, что  $\Omega_\nu$  невелико,

$$\Omega_\nu(t_0) = 2 \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} \frac{T_{\nu,0}^4}{\rho_c} \approx 10^{-5} ,$$

и, следовательно, безмассовое нейтрино не оказывает существенного влияния на современное расширение Вселенной. Стоит отметить, что это не так на более ранних стадиях расширения; в частности, из теории первичного нуклеосинтеза следует жёсткое ограничение на число типов нейтрино с массой  $m_\nu \lesssim 1$  МэВ, которое будет обсуждаться в Главе 8.

Найдём теперь вклад в современную плотность Вселенной массивных нейтрино с массой  $m_\nu > T_{\nu,0}$ . Плотность энергии, связанная с такими нейтрино, равна

$$\rho_{\nu,0} = m_\nu n_{\nu,0} ,$$

а соответствующий вклад в относительную плотность равен

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_{\nu,0}}{\rho_c} \approx \left( \frac{m_\nu}{1 \text{ эВ}} \right) \cdot 0.01 h^{-2} . \quad (7.9)$$

Потребуем, чтобы плотность энергии нейтрино не превышала полную плотность массы нерелятивистского вещества во Вселенной. Учтя все три типа нейтрино, получаем отсюда следующее космологическое ограничение на сумму масс всех типов нейтрино

$$\sum_i m_{\nu_i} < 100 \cdot h^2 \Omega_M \text{ эВ} \quad (7.10)$$

Используя консервативную оценку  $\Omega_M < 0.4$  и положив  $h = 0.7$ , получим

$$\sum_i m_{\nu_i} < 20 \text{ эВ} .$$

В течение долгого времени подобное ограничение было самым сильным ограничением на массы  $\mu$ - и  $\tau$ -нейтрино. Сегодня комбинирование прямых ограничений на массу электронного нейтрино [4],

$$m_{\nu_e} < 2 \text{ эВ} ,$$

и результатов экспериментов по поиску нейтринных осцилляций, из которых следует, что разность квадратов масс  $\Delta m^2$  между  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$  мала,  $\Delta m^2 \lesssim 5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ , приводит к более сильному ограничению на массу нейтрино,

$$m_\nu < 2 \text{ эВ} , \quad (7.11)$$

для всех типов (см. Приложение С). Из ограничения (7.11) и соотношения (7.9) следует, что вклад нейтрино всех типов в плотность энергии во Вселенной невелик,

$$\sum_i \Omega_{\nu_i} < 0.12 . \quad (7.12)$$

Тем не менее, сравнивая это ограничение со значением  $\Omega_M \approx 0.25$  для полной плотности нерелятивистского вещества в модели  $\Lambda$ CDM, мы видим, что одного ограничения (7.12) недостаточно, чтобы исключить, что нейтрино являются заметной компонентой тёмной материи. Однако, результаты, связанные с изучением структур во Вселенной и измерением анизотропии реликтового излучения<sup>2</sup>, ограничивают вклад нейтрино в плотность энергии во Вселенной на уровне

$$\sum_i \Omega_{\nu_i} h^2 < 0.008 , \quad (7.13)$$

что соответствует ограничению на сумму масс нейтрино [5]

$$\sum_i m_{\nu_i} < 0.72 \text{ эВ}$$

и исключает нейтрино как кандидата на роль тёмной материи. Мы подробнее обсудим происхождение ограничения (7.13) во второй части книги.

В заключение этой Главы отметим, что изложенные результаты были получены в предположении, что во Вселенной нет заметной асимметрии между нейтрино и антинейтрино, иными словами, что химический потенциал нейтрино близок к нулю. Это предположение представляется вполне разумным, особенно с учётом того, что электрослабые процессы при температурах выше 100 ГэВ уравнивают по порядку величины лептонную и барионную асимметрию (см. Главу 11), а барионная асимметрия крайне мала,  $\eta_B \sim 10^{-9}$ . Тем не менее, нельзя полностью исключить, что лептонная асимметрия заметно больше барионной, т.е. количество нейтрино во Вселенной заметно больше количества антинейтрино (или наоборот). В этом случае экспериментальные данные по нейтринным осцилляциям (точнее, нижнее ограничение на массу наиболее тяжелого нейтрино,  $m_\nu > m_{atm} \approx 0.05 \text{ эВ}$ ) вместе с ограничением (7.13) можно использовать для того, чтобы получить ограничение на лептонную асимметрию в современной и ранней Вселенной.

---

<sup>2</sup>Как мы увидим, сама по себе анизотропия реликтового излучения слабо чувствительна к массам нейтрино, однако позволяет определить с хорошей точностью другие космологические параметры, знание которых необходимо для описания структур во Вселенной. Именно изучение последних и даёт наиболее сильное ограничение на массы нейтрино.

- ▷ Задача 4. Используя результаты, относящиеся к нейтринным осцилляциям (Приложение С), получить ограничение на нейтринную асимметрию современной Вселенной

$$\Delta_{L,0} = \frac{\sum_i (n_{\nu_i} - n_{\bar{\nu}_i})}{s},$$

где  $s$  — плотность энтропии. Показать, что в применении к ранней Вселенной это ограничение приводит к ограничению на лептонную асимметрию

$$\Delta_L = \frac{\sum_i n_{L,i}}{s},$$

где

$$n_{L,i} = (n_{\nu_i} - n_{\bar{\nu}_i}) + (n_{l_i} - n_{\bar{l}_i})$$

—плотность лептонного числа каждого типа, а  $l_i$  обозначает заряженный лептон  $i$ -го типа:  $l_1 = e^-$ ,  $l_2 = \mu^-$ ,  $l_3 = \tau^-$ . Величина  $\Delta_L$  сохраняется в процессе эволюции Вселенной, если сохраняется полное лептонное число.

Более сильное ограничение на лептонную асимметрию получается из сравнения теории первичного нуклеосинтеза с измерениями первичной концентрации гелия-4. В разделе 8.1 мы получим ограничение на химический потенциал электронного нейтрино при температуре порядка 1 МэВ на уровне  $|\mu_{\nu_e}/T| < 0.05$ . Более точное ограничение имеет вид (95% доверительный интервал),

$$-0.023 < \frac{\mu_{\nu_e}}{T} < 0.014, \quad T \sim 1 \text{ МэВ}. \quad (7.14)$$

В действительности это ограничение относится ко всем типам нейтрино, поскольку к моменту закалки ( $T \sim 2-3$  МэВ) нейтрино успевают проосциллировать между собой, и концентрации разных типов нейтрино успевают выровняться. Действительно, характерный период осцилляций нейтрино с энергией  $E$  составляет (см. Приложение С)

$$t_{osc} \simeq \pi \frac{4E}{\Delta m^2}.$$

При  $E \simeq 3T$ ,  $T \simeq 3$  МэВ и даже наименьшей разности квадратов масс  $\Delta m_{sol}^2 \simeq 8 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2$  этот период составляет

$$t_{osc} \simeq 5 \cdot 10^{-4} \text{ с},$$

что гораздо меньше хаббловского времени  $H^{-1}(T \simeq 3 \text{ МэВ}) \sim 0.1 \text{ с}$ . Отметим, что в последней оценке мы не учитывали эффектов среды; при температуре около 3 МэВ это действительно является неплохим приближением (подробности см. в [21]). Итак, к моменту закалки нейтрино

$$\mu_{\nu_e} = \mu_{\nu_\mu} = \mu_{\nu_\tau}, \quad T \sim 3 \text{ МэВ}.$$

Отсюда и следует, что ограничение (7.14) справедливо для всех типов нейтрино.

Избыток нейтрино над антинейтрино дается формулой (5.22), а сама плотность числа нейтрино — формулой (5.16b). Поэтому для асимметрии каждого типа нейтрино имеем

$$\frac{n_\nu - n_{\bar{\nu}}}{n_\nu + n_{\bar{\nu}}} = \frac{\pi^2}{9\zeta(3)} \frac{\mu_\nu}{T}.$$

Эта асимметрия сохраняется до нашего времени, так что из (7.14) имеем для нейтрино любого типа

$$\frac{|n_\nu - n_{\bar{\nu}}|}{n_\nu + n_{\bar{\nu}}} < 0.06 .$$

В современной Вселенной избыток нейтрино над антинейтрино или избыток антинейтрино над нейтрино мал.

### 7.3 \*Стерильные нейтрино

Наблюдаемые нейтринные осцилляции указывают на неполноту Стандартной модели физики частиц (см. подробнее Приложение С). Некоторые из возможных расширений Стандартной модели подразумевают введение дополнительных частиц – так называемых *стерильных* нейтрино – левых фермионов, смешивающихся с обычными нейтрино. Термин *стерильные* указывает на то обстоятельство, что дополнительные поля нейтрино считаются не взаимодействующими с калибровочными полями Стандартной модели, в частности, не участвующими в слабых взаимодействиях. В этом контексте обычные нейтрино, взаимодействующие с  $W$ - и  $Z$ -бозонами, называют *активными*. Число нейтринных массовых состояний растёт с числом стерильных нейтрино  $N_s$  как  $3 + N_s$ . Ниже для простоты мы ограничимся рассмотрением случая одного стерильного нейтрино,  $N_s = 1$ . Отметим, что за исключением результатов эксперимента LSND, объяснение существующих экспериментальных данных по нейтринным осцилляциям не требует введения стерильных нейтрино (см. обсуждение в разделе С.3), однако такое обобщение Стандартной модели вполне заслуживает обсуждения.

В простейших моделях рождение стерильных нейтрино  $|\nu_s\rangle$  в ранней Вселенной происходит благодаря их смешиванию с активными нейтрино  $|\nu_\alpha\rangle$ ,  $\alpha = e, \mu, \tau$ . В приближении, когда существенно только смешивание между двумя компонентами нейтрино, будем иметь

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle &= \cos \theta_\alpha |\nu_1\rangle + \sin \theta_\alpha |\nu_2\rangle , \\ |\nu_s\rangle &= -\sin \theta_\alpha |\nu_1\rangle + \cos \theta_\alpha |\nu_2\rangle , \end{aligned}$$

где  $|\nu_\alpha\rangle$  и  $|\nu_s\rangle$  – состояния активного и стерильного нейтрино, а  $|\nu_1\rangle$  и  $|\nu_2\rangle$  – массовые состояния нейтрино с массами  $m_1 < m_2$ , а  $\theta_\alpha$  – угол смешивания в вакууме между стерильным и активным нейтрино. Будем считать смешивание малым,  $\theta_\alpha \ll 1$ , так что тяжёлое состояние в основном образовано стерильным нейтрино,  $|\nu_2\rangle \approx |\nu_s\rangle$ . В этом случае массу тяжёлого состояния естественно назвать массой стерильного нейтрино,  $m_2 \equiv m_s$ . Будем считать, что масса стерильного нейтрино велика по сравнению с массой активного нейтрино,  $m_s \gg m_1$ .

Вычисление вероятности осцилляций  $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_s$  осуществляется аналогично случаю осцилляций между разными активными нейтрино,  $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$  (см. раздел С.2). Для ультрарелятивистских нейтрино,  $E_\nu \gg m_s$ , вероятность перехода  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_s$  за время  $t$  в пренебрежении эффектами плазмы (вакуумные осцилляции) равна

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_s) &= \sin^2 2\theta_\alpha \cdot \sin^2 \left( \frac{t}{2t_\alpha^{vac}} \right) , \\ t_\alpha^{vac} &= \frac{2E_\nu}{\Delta m^2} , \quad \Delta m^2 = m_s^2 - m_1^2 \simeq m_s^2 . \end{aligned} \tag{7.15}$$

Эффекты первичной плазмы, однако, весьма существенны, особенно при высоких температурах. Плазма влияет на эволюцию состояния активного нейтрино  $|\nu_\alpha\rangle$ , так что гамильтониан нейтрино в калибровочном базисе  $(|\nu_\alpha\rangle, |\nu_s\rangle)$  принимает вид

$$H = U \cdot \text{diag} \left( \frac{m_1^2}{2E_\nu}, \frac{m_2^2}{2E_\nu} \right) \cdot U^\dagger + V_{int}, \quad (7.16)$$

где матрица смешивания  $U$  и матрица взаимодействия с плазмой  $V_{int}$  имеют вид

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta_\alpha & \sin \theta_\alpha \\ -\sin \theta_\alpha & \cos \theta_\alpha \end{pmatrix}, \quad V_{int} = \begin{pmatrix} V_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Величина  $V_{\alpha\alpha}$  для различных  $\nu_\alpha = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$  может быть вычислена с использованием методов квантовой теории поля при конечных температурах, изложенных в Приложении D. В предположении отсутствия асимметрии между нейтрино и антинейтрино, лидирующие вклады от нейтрино и антинейтрино в  $V_{\alpha\alpha}$  сокращаются.<sup>3</sup> Наиболее существенными оказываются вклады второго порядка по константе Ферми  $G_F$ . При интересующих нас температурах  $T \sim 100$  МэВ в плазме нет реликтовых  $\tau$ -лептонов и мало мюонов, однако много релятивистских электронов. Поэтому величины  $V_{\alpha\alpha}$  для различных поколений нейтрино отличаются. Для  $\nu_\tau$  будем иметь [22]

$$V_{\tau\tau} = \frac{14\pi}{45\alpha} \sin^2 \theta_w \cos^2 \theta_w \cdot G_F^2 T^4 \cdot E_\nu \approx 25 \cdot G_F^2 T^4 \cdot E_\nu,$$

для электронного нейтрино соответствующий численный коэффициент примерно в 3.5 раза больше, а тот же коэффициент для мюонного нейтрино лежит между 1 и 3.5 в зависимости от соотношения между величиной температуры и массой мюона.

Диагонализация гамильтониана (7.16) даёт величины эффективных масс нейтрино и углов смешивания в плазме, отличные от аналогичных величин в вакууме. В результате для вероятности осцилляций будем иметь выражение, аналогичное (7.15), но с другими углом смешивания  $\theta_\alpha^{\text{пл.}}$  и периодом осцилляций  $t_\alpha^{\text{пл.}}$ ,

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_s) = \sin^2 2\theta_\alpha^{\text{пл.}} \cdot \sin^2 \left( \frac{t}{2t_\alpha^{\text{пл.}}} \right), \quad (7.17)$$

$$t_\alpha^{\text{пл.}} = \frac{t_\alpha^{\text{vac}}}{\sqrt{\sin^2 2\theta_\alpha + (\cos 2\theta_\alpha - V_{\alpha\alpha} \cdot t_\alpha^{\text{vac}})^2}}, \quad \sin 2\theta_\alpha^{\text{пл.}} = \frac{t_\alpha^{\text{пл.}}}{t_\alpha^{\text{vac}}} \cdot \sin 2\theta_\alpha,$$

где в качестве  $t_\alpha^{\text{vac}}$  фигурирует вакуумное время осцилляций при энергии  $E_\nu \sim T$ . При интересующих нас температурах  $E_\nu \sim T \sim 100$  МэВ и массах стерильных нейтрино  $m_1 \ll m_s \ll T$  для характерного времени осцилляций нейтрино в плазме получаем оценку

$$t_\alpha^{\text{пл.}} = \min(t_\alpha^{\text{vac}}, V_{\alpha\alpha}^{-1}) = \min(2Tm_s^{-2}, 0.04 \cdot T^{-5} \cdot G_F^{-2}). \quad (7.18)$$

Характерное время осцилляций не только существенно меньше хаббловского времени  $H^{-1}(T)$ , но и численно меньше характерного времени слабых взаимодействий в среде, которое оценивается как

$$\tau_w \sim (\sigma_w \cdot n)^{-1} \sim T^{-5} \cdot G_F^{-2}.$$

<sup>3</sup>Речь здесь идёт о вкладах, приводящих к эффекту Михеева–Смирнова–Вольфенштейна.

Рассеяние активного нейтрино приводит к коллапсу волновой функции. Поэтому в течение времени  $\tau_W$  активное и стерильное нейтрино осциллируют друг в друга, а в момент столкновения когерентность волновой функции разрушается.

Итак, каждое активное нейтрино  $\nu_\alpha$  успевает много раз проосциллировать в стерильное нейтрино  $\nu_s$ , пока не столкнётся с другими частицами плазмы, поэтому вероятность образования за время  $\tau_W$  этим нейтрино стерильного нейтрино равна

$$\langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_s) \rangle = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2\theta_\alpha^{\text{пл.}}, \quad (7.19)$$

где мы усреднили второй множитель в (7.17) по нескольким периодам осцилляций. Другими словами, каждое активное нейтрино в плазме с вероятностью (7.19) выбывает из плазмы за характерное время  $\tau_W$ , превращаясь в стерильное. При температурах  $T \gtrsim 3$  МэВ, когда активные нейтрино находятся в термодинамическом равновесии в плазме, этот процесс не изменяет плотность активных нейтрино в среде, однако приводит к увеличению плотности стерильных нейтрино. Темп образования стерильных нейтрино в единице объёма за единицу времени равен

$$\tau_W^{-1} \cdot \langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_s) \rangle \cdot n_{\nu_\alpha}.$$

Отсюда для плотности стерильных нейтрино  $n_{\nu_s}$  в пренебрежении их возможного исчезновения в результате распада (например, в фотон и активное нейтрино) или обратной осцилляции в активное нейтрино будем иметь

$$\frac{dn_{\nu_s}}{dt} + 3Hn_{\nu_s} = \tau_W^{-1} \cdot \langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_s) \rangle \cdot n_{\nu_\alpha}, \quad (7.20)$$

где второе слагаемое в левой части учитывает расширение Вселенной. Удобно переписать уравнение (7.20) как уравнение на отношение плотностей стерильного и активного нейтрино. В результате получим

$$\frac{d\left(\frac{n_{\nu_s}}{n_{\nu_\alpha}}\right)}{d \ln T} = -\frac{\langle P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_s) \rangle}{H(T)\tau_W}, \quad (7.21)$$

где мы перешли от переменной  $t$  к переменной  $T$  и пренебрегли зависимостью числа степеней свободы  $g_*$  от температуры. Поскольку правая часть уравнения (7.21) с учётом сильной зависимости угла смешивания в плазме  $\theta_\alpha^{\text{пл.}}$  от температуры ведёт себя при малых температурах как  $\propto T^3$ , а при больших температурах как  $\propto T^{-7}$ , то рождение стерильных нейтрино в основном происходит в узком интервале температур вблизи критической температуры  $T_*$ , при которой правая часть уравнения (7.21) достигает максимума, т.е. когда выражения в скобках в (7.18) совпадают по порядку величины. Отсюда имеем

$$T_* \sim \left(\frac{m_s}{5G_F}\right)^{1/3} \simeq 200 \text{ МэВ} \cdot \left(\frac{m_s}{1 \text{ кэВ}}\right)^{1/3}.$$

С учётом резкой степенной зависимости темпа образования стерильных нейтрино от температуры, для их плотности справедлива следующая простая оценка по порядку величины

$$\begin{aligned} \frac{n_{\nu_s}(T_*)}{n_{\nu_\alpha}(T_*)} &\sim \frac{\sin^2 2\theta_\alpha}{H(T_*) \cdot \tau_W(T_*)} \sim T_*^3 M_{Pl}^* G_F^2 \cdot \sin^2 2\theta_\alpha \\ &\sim 10^{-2} \cdot \left(\frac{m_s}{1 \text{ кэВ}}\right) \cdot \left(\frac{\sin 2\theta_\alpha}{10^{-4}}\right)^2. \end{aligned} \quad (7.22)$$

В дальнейшем плотность числа стерильных нейтрино в сопутствующем объёме можно считать постоянной, так что постоянным остаётся и отношение  $n_{\nu_s}/n_{\nu_\alpha}$ . С учётом выражения для плотности числа активных нейтрино (7.8), из (7.22) получаем оценку для вклада стерильных нейтрино в современную плотность энергии Вселенной

$$\Omega_{\nu_s} \simeq 0.2 \cdot \left( \frac{\sin 2\theta_\alpha}{10^{-4}} \right)^2 \cdot \left( \frac{m_\nu}{1 \text{ кэВ}} \right)^2. \quad (7.23)$$

Более аккуратные вычисления показывают, что полученная нами оценка (7.23) имеет неплохую точность. Таким образом, стерильные нейтрино с массой  $m_\nu \gtrsim 1$  кэВ и малым углом смешивания  $\theta_\alpha \lesssim 10^{-4}$  могут составлять тёмную материю. Это была бы тёплая тёмная материя, поэтому лёгкие стерильные нейтрино с массами  $m_s \lesssim 1$  кэВ неприемлемы как кандидаты на роль частиц тёмной материи (см. обсуждение в разделе 9.1).

Заметим, что полученная нами оценка для отношения плотностей стерильных и активных нейтрино (7.22) совпадает с отношением темпа образования стерильных нейтрино во Вселенной к темпу расширения Вселенной, стоящему в правой части уравнения (7.21), при температуре  $T = T_*$ , когда это отношение является максимальным. Отсюда ясно, что стерильные нейтрино не входят в равновесие с плазмой, пока отношение (7.22) остаётся меньше единицы.

Оценки (7.23) и (7.13) закрывают<sup>4</sup> простейшее объяснение результата эксперимента LSND (см. подробнее раздел С.3) как осцилляции между электронным, мюонным и одним стерильным нейтрино: с учётом существующих прямых экспериментальных ограничений на параметры такого смешивания масса стерильного нейтрино и угол смешивания между стерильным и активным нейтрино, входящие в формулу (7.23), оказываются слишком большими, т.е. такие стерильные нейтрино давали бы слишком большой вклад в современную плотность энергии Вселенной [23].

В завершение раздела отметим, что в более сложных моделях помимо рассмотренного нами существуют и другие механизмы рождения лёгких стерильных нейтрино, например, в результате распада тяжёлых частиц. Для этих моделей полученная нами оценка (7.23), вообще говоря, является оценкой снизу.

---

<sup>4</sup>Для стерильных нейтрино, которые не находились в термодинамическом равновесии в ранней Вселенной, ограничение (7.13) справедливо лишь с точностью до фактора порядка единицы. Это обстоятельство не влияет на обсуждаемый здесь результат.

## Глава 8

# Первичный нуклеосинтез

Самая ранняя эпоха горячей Вселенной, о которой сегодня имеются надёжные наблюдательные данные — это эпоха первичного нуклеосинтеза. Как мы увидим, она начинается с температуры порядка 1 МэВ и продолжается до температур порядка десятков кэВ. В это время нейтроны, входившие в состав космической плазмы, объединяются с протонами в лёгкие ядра — в основном гелий-4 ( ${}^4\text{He}$ ) с небольшой, но измеримой примесью дейтерия ( $\text{D} \equiv {}^2\text{H}$ ), гелия-3 ( ${}^3\text{He}$ ) и лития ( ${}^7\text{Li}$ ). Мы увидим, что нейтронов при интересующих нас температурах заметно меньше, чем протонов; “лишние” протоны остаются во Вселенной и в конечном итоге образуют атомы водорода. Измерения химического состава вещества в тех областях современной (или относительно недавней) Вселенной, где вещество не подвергалось дальнейшей переработке в термоядерных реакциях в звёздах, позволяют не только подтвердить теорию горячей Вселенной, но и определить важный космологический параметр — барион-фотонное отношение  $\eta_B$ . Кроме того, первичный нуклеосинтез позволяет получать ограничения на параметры теорий, претендующих на обобщение Стандартной модели физики частиц, поскольку наблюдения согласуются с предсказаниями стандартного нуклеосинтеза, базирующегося на процессах в расширяющейся Вселенной, описываемых Стандартной моделью.

Точное вычисление концентраций лёгких элементов, образованных в результате первичного нуклеосинтеза — сложная и трудоёмкая задача, которая решается численно на основе кинетических уравнений с учётом многочисленных термоядерных реакций. В этой Главе, как и во многих других местах этой книги, мы ограничимся оценками по порядку величины, имея в виду основную цель — обсудить физику процессов, происходивших в ранней Вселенной, и пояснить на качественном уровне зависимость результатов от космологических параметров.

### 8.1 Закалка нейтронов. Нейтрон-протонное отношение

Первым этапом первичного нуклеосинтеза является закалка нейтронов. Мы сейчас увидим, что она происходит при температуре порядка 1 МэВ, когда образование лёгких ядер ещё не началось.

Нейтроны образуются и исчезают в ранней Вселенной в результате процессов слабого взаимодействия





и кроссинг-процессов. Характерные энергетические параметры для таких процессов — это разность масс нейтрона и протона

$$\Delta m \equiv m_n - m_p = 1.3 \text{ МэВ}$$

и масса электрона  $m_e = 0.5 \text{ МэВ}$ . Предположим для простоты, что мы имеем дело с достаточно высокими температурами,

$$T \gtrsim \Delta m, m_e. \quad (8.2)$$

Тогда, как и в Главе 7, время свободного пробега нейтрона *по отношению к процессам типа* (8.1) можно оценить из размерных соображений

$$\begin{aligned} \tau_{n \leftrightarrow p} &= \Gamma_{n \leftrightarrow p}^{-1}, \\ \Gamma_n &= C_n G_F^2 T^5, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где  $C_n$  — константа порядка единицы. Процессы типа (8.1) прекращаются, когда время  $\tau_n$  становится сравнимым с хаббловским временем, т.е.

$$\Gamma_n(T) \sim H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*}, \quad (8.4)$$

где мы учли, что Вселенная при интересующих нас температурах  $T \sim 1 \text{ МэВ}$  находится на радиационно-доминированной стадии. Как и раньше,

$$M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}}, \quad (8.5)$$

причём число ультрарелятивистских степеней свободы равно

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} \cdot 4 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot N_\nu. \quad (8.6)$$

Первый вклад здесь возникает благодаря фотонам, второй — благодаря электронам и позитронам (они — ультрарелятивистские при  $T > m_e$ ), третий связан с лёгкими нейтрино, число типов которых мы пока обозначили  $N_\nu$  (в действительности  $N_\nu = 3$ ). Напомним (см. Главу 7), что при  $T > m_e$ , т.е. до аннигиляции позитронов с электронами, нейтрино имеют ту же температуру, что и фотоны.

Из (8.4) и (8.3) получаем температуру, при которой реакции типа (8.1) прекращаются,

$$T_n = \frac{1}{(C_n M_{Pl}^* G_F^2)^{1/3}}. \quad (8.7)$$

Константа  $C_n$  известна: процессы типа (8.1) возникают благодаря четырём фермионной вершине, изображённой на рис. (8.1a); точно та же вершина описывает распад нейтрона, рис. (8.1b).

Поэтому  $C_n$  извлекается из времени жизни нейтрона; численно,  $C_n = 1.2$ . Таким образом, температура закалки (8.7) не содержит неизвестных параметров. Отметим, однако, что она зависит от числа типов лёгких нейтрино, см. (8.5) и (8.6).

Подставляя в (8.7) значение  $G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}$  и  $g_* = 43/4$  (для  $N_\nu = 3$ ), получаем численно

$$T_n \approx 1.4 \text{ МэВ}.$$

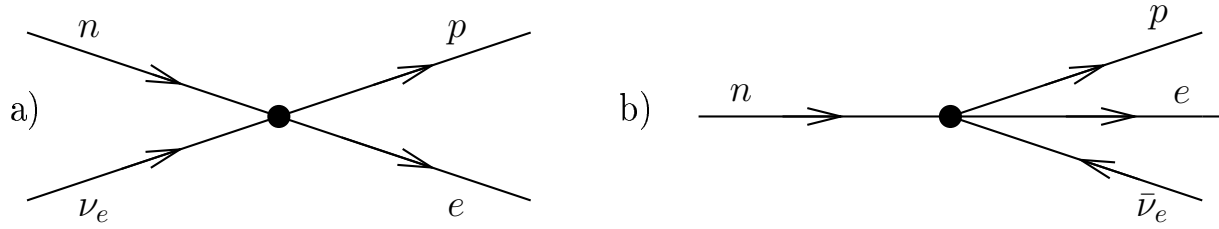


Рис. 8.1: Фейнмановские диаграммы для процессов  $n + \nu_e \leftrightarrow p + e$  (а) и  $n \rightarrow p e \bar{\nu}_e$  (б).

Следует отметить, что исходное предположение (8.2) удовлетворяется плохо, поэтому требуется более аккуратное вычисление. Оно даёт  $T_n = 0.7$  МэВ.

Замечательно, что температура закалки нейтронов с приличной точностью совпадает с разностью масс  $\Delta m$ . Такого совпадения могло бы и не быть (например, если бы массы  $u$ - и  $d$ -кварков были бы сильно разными, или константа Ферми, гравитационная постоянная или  $g_*$  отличались бы от своих реальных значений). Это — одна из случайностей, благодаря которым первичный нуклеосинтез вообще был возможен в ранней Вселенной. Из-за этой случайности нейтронов в момент закалки довольно много, что в конечном итоге приводит к заметной концентрации лёгких ядер.<sup>1</sup>

Оценим остаточную концентрацию нейтронов после их закалки. С хорошей степенью точности она равна равновесной концентрации нейтронов непосредственно перед закалкой. Для дальнейшего полезно ещё раз записать общую формулу для плотности числа частиц  $A$  (протонов, нейтронов, ядер) в химическом равновесии при температуре  $T \ll m_A$  (см. Главу 5):

$$n_A = g_A \left( \frac{m_A T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu_A - m_A}{T}}, \quad (8.8)$$

где  $\mu_A$  — химический потенциал частицы  $A$ . Чтобы применить эту формулу к протонам и нейтронам, учтём, что непосредственно перед закалкой реакции типа (8.1) находятся в равновесии, поэтому (см. Главу 5)  $\mu_p + \mu_e = \mu_n + \mu_\nu$ , то есть

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e - \mu_\nu. \quad (8.9)$$

Для релятивистских электронов и позитронов имеем из (5.22)

$$n_{e^-} - n_{e^+} \sim \mu_e T^2, \quad (8.10)$$

поэтому

$$\frac{\mu_e}{T} \sim \frac{n_{e^-} - n_{e^+}}{T^3}.$$

Разность концентраций электронов и позитронов равна концентрации протонов (из электронейтральности космической плазмы),

$$n_{e^-} - n_{e^+} = n_p,$$

<sup>1</sup>Если бы оказалось, что  $\Delta m \gg T_n$ , то концентрация нейтронов в момент закалки (а, следовательно, и концентрация лёгких ядер после нуклеосинтеза) была бы подавлена фактором  $\exp(-\Delta m/T_n)$ , см. (8.12). Наоборот, при  $\Delta m \ll T_n$  нейтронов и протонов в плазме было бы поровну, и практически все нуклоны (протоны и нейтроны) после эпохи нуклеосинтеза находились бы в ядрах  ${}^4\text{He}$ , т.е. в первичном веществе Вселенной практически отсутствовал бы водород. Такая Вселенная без водорода вряд ли бы была пригодна для жизни!

а  $n_p/T^3$  по порядку величины совпадает с барион-фотонным отношением

$$\frac{n_p}{T^3} \sim \eta_B \sim 10^{-9},$$

Поэтому химический потенциал электронов крайне мал

$$\frac{\mu_e}{T} \sim 10^{-9}.$$

Предположим далее, что во Вселенной нет большой лептонной асимметрии (обсуждение обратной ситуации мы проведём в конце раздела), т.е.

$$n_\nu - n_{\bar{\nu}} \ll n_\nu + n_{\bar{\nu}} \sim T^3.$$

Тогда  $\mu_\nu/T$  тоже мало и из (8.9) получаем с хорошей точностью

$$\mu_n = \mu_p. \quad (8.11)$$

Из (8.8) заключаем тогда, что нейтрон-протонное отношение на момент закалки нейтронов целиком определяется температурой закалки

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{m_n - m_p}{T_n}} \equiv e^{-\frac{\Delta m}{T_n}} \quad (8.12)$$

(мы учли, что протон и нейтрон имеют по два спиновых состояния, т.е.  $g_n = g_p = 2$ , и пренебрегли отличием масс протона и нейтрона в предэкспонентах).

Нейтрон-протонное отношение (8.12) является, грубо говоря, величиной порядка единицы, т.е. концентрация нейтронов после их закалки не слишком мала по сравнению с концентрацией протонов. Для количественной оценки необходимо знать температуру закалки с хорошей точностью. Для  $T_n = 0.7$  МэВ получаем

$$\frac{n_n}{n_p} = 0.157 \approx \frac{1}{6}. \quad (8.13)$$

Отметим, что нейтрон-протонное отношение на момент закалки зависит от числа типов лёгких нейтрино  $N_\nu$  (обобщая, можно сказать, что имеется зависимость от числа релятивистских степеней свободы в первичной плазме при  $T \sim 1$  МэВ) и практически не зависит от других космологических параметров.

В заключение этого раздела найдём возраст Вселенной к моменту закалки нейтронов. Имеем в соответствии с (3.26)

$$t = \frac{1}{2H(T_n)} = \frac{M_{Pl}^*}{2T_n^2}.$$

Для  $T_n = 0.7$  МэВ и  $N_\nu = 3$  получаем отсюда

$$t = 1.5 \text{ с}.$$

Таким образом, теория первичного нуклеосинтеза относится к космологической эпохе, начинающейся через полторы секунды (!) после Большого взрыва.

В заключение этого раздела отметим, что приведённое вычисление нейтрон-протонного отношения существенным образом опиралось на предположение об отсутствии лептонной асимметрии. Если это не так, т.е. если имеется асимметрия между электронными нейтрино и антинейтрино, то вместо (8.11) будем иметь

$$\mu_n = \mu_p - \mu_{\nu_e}$$

а вместо (8.12) получим

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-\frac{\Delta m}{T_n} - \frac{\mu_{\nu_e}}{T_n}}$$

Нейтрон-протонное отношение определяет наработанную в конечном итоге концентрацию  ${}^4\text{He}$  (см. раздел 8.2),

$$n_{{}^4\text{He}} \propto \frac{n_n}{n_p},$$

и из сравнения теории с наблюдениями можно сделать вывод о том, что отличие  $n_n/n_p$  от стандартного значения не должно быть большим,

$$\left| \Delta \left( \frac{n_n}{n_p} \right) \right| \lesssim 0.05.$$

Отсюда следует ограничение на химический потенциал электронного нейтрино,

$$\left| \frac{\mu_{\nu_e}}{T} \right| \lesssim 0.05.$$

Более точное современное ограничение приведено в (7.14); его асимметричность связана с тем, что наблюдаемая распространенность  ${}^4\text{He}$  лежит несколько ниже стандартного предсказания.

## 8.2 Начало нуклеосинтеза. Направление термоядерных реакций

Цепочки термоядерных реакций в ранней Вселенной начинаются с образования дейтерия в реакции



В ядерной физике для этой и аналогичных реакций используют обозначение

$$p(n, \gamma)\text{D} \quad (8.15)$$

Мы будем использовать как обозначения (8.14), так и обозначения (8.15). Для вычисления температуры, при которой начинается реакция (8.14), воспользуемся следующим приёмом. *Предположим*, что реакция (8.14) происходит достаточно быстро, и имеет место химическое равновесие дейтерия с протонами и нейтронами. При этом будем считать, что остальные термоядерные реакции (о них речь ниже) выключены. Найдём в этих предположениях концентрацию дейтерия при температуре  $T$ . При высоких температурах эта концентрация мала, т.е. образование дейтерия термодинамически невыгодно (ср. с Главой 6). Соответствующий физический механизм состоит в том, что образующиеся ядра дейтерия быстро диссоциируют обратно в нейтроны и протоны под воздействием жёстких  $\gamma$ -квантов из хвоста температурного распределения. Образование дейтерия начинается при такой температуре, когда (в сделанных только что предположениях) равновесная концентрация дейтерия становится сравнимой с концентрацией протонов и нейтронов (последние равны по порядку величины, см. (8.13)).

Такой “равновесный” подход позволяет определить *направление* термоядерных реакций. Успевают они произойти или нет, зависит от скорости реакций в сравнении

с темпом расширения Вселенной: из-за довольно быстрого космологического расширения химическое равновесие в действительности не вполне достигается. Именно благодаря последнему обстоятельству нуклеосинтез приводит к заметной остаточной концентрации D,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$ : в термодинамическом равновесии при интересующих нас температурах их концентрация была бы ничтожно мала, а все нейтроны находились бы в наиболее сильно связанном ядре  ${}^4\text{He}$ .

Продолжая использовать равновесный подход, преобразуем соотношение (8.8) к виду уравнения Саха. В ситуации, когда существенны термоядерные реакции, химические потенциалы нейтронов и протонов не равны между собой, поэтому формула (8.8), применённая к протонам и нейтронам, даёт

$$n_n = 2 \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu_n - m_n}{T}}, \quad (8.16)$$

$$n_p = 2 \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\frac{\mu_p - m_p}{T}}, \quad (8.17)$$

где в предэкспоненте мы пренебрегли разницей масс протона и нейтрона. Если ядро с атомным весом  $A$  и зарядом  $Z$  (нас сначала будет интересовать дейтерий, однако для последующих оценок полезно написать общую формулу) находится в химическом равновесии, то химический потенциал для него равен<sup>2</sup>

$$\mu_A = \mu_p \cdot Z + \mu_n \cdot (A - Z).$$

Действительно, предположение о химическом равновесии означает, что достаточно быстро идёт цепочка термоядерных реакций, в результате которой  $Z$  протонов и  $(A - Z)$  нейтронов объединяются в ядро  $(A, Z)$ .

Действуя так же, как в Главе 6, получим из (8.8), (8.16), (8.17)

$$n_A = n_p^Z n_n^{A-Z} 2^{-A} g_A A^{3/2} \left( \frac{2\pi}{m_p T} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} e^{\frac{\Delta_A}{T}}, \quad (8.18)$$

где мы положили в предэкспоненте  $m_A = A m_p$  и ввели энергию связи ядра  $(A, Z)$

$$\Delta_A = Z m_p + (A - Z) m_n - m_A.$$

Введём ещё безразмерное отношение числа нуклонов, находящихся в ядрах  $(A, Z)$ , к полному числу нуклонов

$$X_A = \frac{A n_A}{n_B}$$

и запишем соотношение (8.18) в виде уравнения Саха

$$X_A = X_p^Z X_n^{A-Z} n_B^{A-1} 2^{-A} g_A A^{5/2} \left( \frac{2\pi}{m_p T} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} e^{\frac{\Delta_A}{T}}.$$

Наконец, плотность числа барионов равна

$$n_B = \eta_B \cdot n_\gamma = \eta_B \cdot \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 = 0.24 \eta_B T^3.$$

<sup>2</sup>Здесь и далее подстрочный индекс  $A$  обозначает ядро  $(A, Z)$ ; более аккуратно было бы использовать обозначение типа  $\mu_{A,Z}$ , но мы этого не будем делать для упрощения записи формул.

Окончательно, имеем

$$X_A = X_p^Z X_n^{A-Z} 2^{-A} g_A A^{5/2} \eta_B^{A-1} \left( \frac{2.5T}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} e^{\frac{\Delta_A}{T}}. \quad (8.19)$$

Аналогично Главе 6, правая часть этого равенства содержит малый энтропийный фактор  $\eta_B^{A-1} (T/m_p)^{\frac{3}{2}(A-1)}$ , так что равновесная концентрация ядер перестаёт быть малой лишь при  $T \ll \Delta_A$ , т.е. когда температура станет заметно меньше энергии связи ядра.

Нуклеосинтез начинается тогда, когда становится термодинамически выгодным образование дейтерия, т.е. тогда, когда  $X_D$  становится, грубо говоря, величиной порядка единицы (образование более тяжёлых ядер, напоминая, предполагается выключенным). Учитывая, что при этом  $X_p, X_n \sim 1$ , и пренебрегая факторами порядка единицы в (8.19), получаем

$$X_D(T_{NS}) \sim \eta_B \left( \frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{3/2} e^{\frac{\Delta_D}{T_{NS}}} \sim 1, \quad (8.20)$$

где  $T_{NS}$  — температура нуклеосинтеза,  $\Delta_D = 2.22$  МэВ, и мы учли, что для дейтерия  $A = 2$ ,  $Z = 1$ . Из (8.20) получаем при  $\eta_B = 6.1 \cdot 10^{-10}$

$$T_{NS} \approx 65 \text{ кэВ}.$$

Итак, в предположении о достаточно большой скорости реакции образования дейтерия (8.14) нуклеосинтез происходит при температурах около 70 кэВ. Отметим, что эта температура слабо (логарифмически) зависит от  $\eta_B$ .

Убедимся, что при таких больших температурах термодинамически наиболее выгодным является в действительности образование ядер  ${}^4\text{He}$ . Для этого вновь используем равновесный подход. Если действительно практически все нейтроны находятся при  $T \approx T_{NS}$  в ядрах  ${}^4\text{He}$ , то применяя формулу (8.19), мы должны получить, что

$$X_{{}^4\text{He}} \sim 1,$$

в то время как концентрации всех других лёгких ядер, включая свободные нейтроны, малы. Поэтому запишем формулу (8.19) для  ${}^4\text{He}$  ( $A = 4$ ,  $Z = 2$ ,  $g_A = 4$ )

$$X_{{}^4\text{He}} = X_p^2 X_n^2 \cdot 8 \eta_B^3 \left( \frac{2.5T}{m_p} \right)^{9/2} e^{\frac{\Delta_{{}^4\text{He}}}{T}}.$$

Учтём, что протонов в плазме больше, чем нейтронов (см. (8.13)), так что “лишние” протоны дают  $X_p \sim 1$ , и выразим концентрацию нейтронов через  $X_{{}^4\text{He}}$ , пренебрегая факторами порядка единицы:

$$X_n = X_{{}^4\text{He}}^{1/2} \eta_B^{-3/2} \left( \frac{2.5T}{m_p} \right)^{-9/4} e^{-\frac{\Delta_{{}^4\text{He}}}{2T}}. \quad (8.21)$$

Подставляя выражение (8.21) в (8.19), считая  $X_{{}^4\text{He}} \sim 1$  и вновь опуская факторы порядка единицы, получим для других ядер

$$\begin{aligned} X_A &= \left[ \eta_B \cdot \left( \frac{2.5T}{m_p} \right)^{3/2} \right]^{\frac{3}{2}Z - \frac{1}{2}A - 1} e^{\frac{\Delta_A - \Delta_{{}^4\text{He}}(A-Z)/2}{T}} \\ &\simeq 10^{7.4(A+2-3Z)} e^{\frac{\Delta_A - \Delta_{{}^4\text{He}}(A-Z)/2}{T}}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

Z	ядро	$\Delta_A$	$\Delta_A/A$	$\Delta_A/(A - Z)$
1	${}^2\text{H} \equiv \text{D}$	2.22	1.11	2.22
	${}^3\text{H} \equiv \text{T}$	8.48	2.83	4.24
2	${}^3\text{He}$	7.72	2.57	7.72
	${}^4\text{He} \equiv \alpha$	28.30	7.75	14.15
3	${}^6\text{Li}$	31.99	5.33	10.66
	${}^7\text{Li}$	39.24	5.61	9.81
4	${}^7\text{Be}$	37.60	5.37	12.53
5	${}^8\text{B}$	37.73	4.71	12.58
6	${}^{12}\text{C}$	92.2	7.68	15.37

Таблица 8.1: Энергии связи некоторых стабильных (или почти стабильных по сравнению с продолжительностью нуклеосинтеза) лёгких ядер (МэВ).

где численные значения предэкспоненциального фактора соответствуют  $\eta_B = 6.1 \cdot 10^{-10}$ ,  $T = 65$  кэВ. Заметим, что знак показателя экспоненты зависит от величины энергии связи на нейтрон для ядра  $(A, Z)$ , т.е.  $\Delta_A/(A - Z)$ . Среди лёгких ядер эта величина максимальна для ядра  ${}^4\text{He}$ , и именно поэтому во Вселенной в основном образуются именно эти ядра.

Энергии связи для наиболее сильно связанных стабильных (или почти стабильных по сравнению с продолжительностью нуклеосинтеза) лёгких ядер приведены в таблице 8.1. Используя эти данные, получим из (8.22) оценки при  $T = 65$  кэВ:  $X_n \sim 10^{-79}$ ,  $X_D \sim 10^{-79}$ ,  $X_{3\text{H}} \sim 10^{-118}$ ,  $X_{3\text{He}} \sim 10^{-51}$ ,  $X_{6\text{Li}} \sim 10^{-78}$ ,  $X_{7\text{Li}} \sim 10^{-116}$ ,  $X_{7\text{Be}} \sim 10^{-55}$ ,  $X_{8\text{B}} \sim 10^{-69}$ . Таким образом, при  $T = T_{NS}$  равновесные концентрации лёгких ядер действительно малы по сравнению с концентрацией  ${}^4\text{He}$ .

Отметим в связи с этим два обстоятельства. Во-первых, применение формулы (8.22) к ядру  ${}^{12}\text{C}$  дало бы  $X_{12\text{C}} \gg 1$ , т.е. если бы это ядро могло образовываться, то наше предположение о доминировании  ${}^4\text{He}$  было бы неверным: большинство нейтронов связывалось бы в ядро  ${}^{12}\text{C}$  (и более тяжёлые ядра), а не в  ${}^4\text{He}$ . Однако из таблицы 8.1 видно, что ядро  ${}^{12}\text{C}$  не может образовываться в двухчастичных реакциях с участием более лёгких *стабильных* ядер<sup>3</sup>: слияние двух ядер  ${}^6\text{Li}$  происходит редко из-за очень малой концентрации этих ядер (их образование возможно лишь в реакции слияния гелия-3 и трития, что сильно подавлено по сравнению с рождением гелия-4 из того же начального состояния). Поэтому цепочка термоядерных реакций во Вселенной до ядра углерода не доходит. Термоядерные реакции в ранней Вселенной при  $T \approx T_{NS}$  идут в сторону образования ядра  ${}^4\text{He}$ .

Во-вторых, если бы во Вселенной при  $T > 65$  кэВ всё время имелось химическое равновесие по отношению к образованию  ${}^4\text{He}$ , то первичный нуклеосинтез происходил бы при более высоких температурах, поскольку энергия связи для  ${}^4\text{He}$  заметно превышает энергию связи в дейтерии. Однако до образования дейтерия такое химическое равновесие невозможно из-за того, что  ${}^4\text{He}$  образуется не прямо из нейтронов и протонов, а в результате горения дейтерия. В этом смысле нуклеосинтез происхо-

<sup>3</sup>Трёхчастичные реакции практически не идут в ранней Вселенной из-за того, что концентрации ядер в ней меньше или порядка  $\eta_B \sim 10^{-9}$ , т.е. очень малы. Ядро  ${}^{12}\text{C}$  образуется в звёздах именно в трёхчастичных реакциях из ядер  ${}^4\text{He}$ .

дит в ранней Вселенной с задержкой.

▷ *Задача 1. Найти температуру нуклеосинтеза в гипотетическом случае химического равновесия по отношению к образованию  ${}^4\text{He}$  при  $T > 65$  кэВ.*

В завершение этого раздела определим возраст Вселенной в эпоху нуклеосинтеза, т.е. время, прошедшее от начала Большого взрыва до момента  $t_{NS}$ , когда стало термодинамически выгодным образование дейтерия. Как мы видели, температура Вселенной при этом была около  $T_{NS} \approx 70$  кэВ. В соответствии с (3.26) получаем отсюда

$$t_{NS} = \frac{1}{2H(T_{NS})} = \frac{M_{Pl}^*}{2T_{NS}^2}. \quad (8.23)$$

При температуре  $T_{NS} \approx 70$  кэВ на темп расширения Вселенной влияют только два типа релятивистских частиц: фотоны и нейтрино, причём поскольку последние уже не взаимодействуют с веществом плазмы, то их эффективный вклад подавлен, см. (7.6). В результате выражение (8.23) содержит

$$M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}}, \text{ где } g_* = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot N_\nu \cdot \left(\frac{11}{4}\right)^{4/3}, \quad N_\nu = 3. \quad (8.24)$$

Отсюда возраст Вселенной в эпоху нуклеосинтеза составляет

$$t_{NS} = 121 \text{ с} \approx 2 \text{ мин}.$$

Найденное время позволяет предсказать распространённость первичного гелия-4 во Вселенной. Действительно, мы увидим в разделе 8.3, что термоядерные реакции, происходившие в первичной плазме, протекают достаточно быстро, а приводят они, в основном, к образованию гелия-4. Поэтому после завершения нуклеосинтеза практически все нераспавшиеся нейтроны будут содержаться именно в этих ядрах. Концентрация гелия-4 при  $T = T_{NS}$  составляет половину от концентрации нейтронов,

$$n_{{}^4\text{He}}(T_{NS}) = \frac{1}{2}n_n(T_{NS}),$$

которая, в свою очередь, связана с концентрацией протонов как

$$\frac{n_n(T_{NS})}{n_p(T_{NS})} \approx \frac{1}{6} \cdot e^{-\frac{t_{NS}}{\tau_n}} \approx \frac{1}{7},$$

где мы модифицировали соотношение (8.13) с учётом конечного времени жизни нейтрона  $\tau_n \approx 886$  с. В результате получаем массовую долю  ${}^4\text{He}$  среди всех барионов

$$X_{{}^4\text{He}} = \frac{m_{{}^4\text{He}} \cdot n_{{}^4\text{He}}(T_{NS})}{m_p(n_p(T_{NS}) + n_n(T_{NS}))} = \frac{2}{\frac{n_p(T_{NS})}{n_n(T_{NS})} + 1} \approx 24\%. \quad (8.25)$$

Отметим, что массовая доля гелия-4 зависит как от момента нуклеосинтеза  $t_{NS}$ , так и от момента закалки нейтронов  $T_n$  (см. (8.12)). Обе эти величины в свою очередь зависят от (эффективного) числа релятивистских степеней свободы в первичной плазме. Поэтому измерение распространённости первичного гелия фиксирует  $g_*$  для эпохи нуклеосинтеза. Это, в свою очередь, позволяет определить число релятивистских нейтрино (см. (8.6)),  $N_\nu = 3$ , и существенно ограничить пространство



параметров многочисленных теорий, претендующих на роль обобщений Стандартной модели физики частиц, в рамках которых возможно появление в первичной плазме новых релятивистских компонент. Это ограничение обычно формулируют в терминах эффективного числа дополнительных типов нейтрино: плотность энергии новых частиц к началу нуклеосинтеза не должна превышать плотности энергии, соответствующей одному типу нейтрино,

$$\Delta N_{\nu,eff} \leq 1, \quad T \sim 1 \text{ МэВ} \quad (8.26)$$

▷ *Задача 2. Определить наименьшую температуру закалки гипотетических безмассовых частиц, если неопределённость в  $g^*(T_{NS})$  составляет 20%. То же для неопределённости 5%.*

Основная неопределённость в теоретическом предсказании распространённости гелия-4 во Вселенной связана с неточностью измерения времени жизни нейтрона.

## 8.3 Кинетика нуклеосинтеза

В предыдущем разделе с использованием равновесного подхода было установлено, что ядерные реакции первичного нуклеосинтеза идут в сторону образования гелия-4 ( $\alpha$ -частиц). В этом разделе мы обсудим скорости этих реакций и оценим остаточные концентрации лёгких ядер, т.е. распространённость первичных химических элементов во Вселенной.

Выясненное в предыдущем разделе направление реакций позволяет расположить все основные ядерные реакции первичного нуклеосинтеза по следующим этапам:

1.  $p(n, \gamma)D$  — образование дейтерия, начало нуклеосинтеза.
2.  $D(p, \gamma)^3\text{He}$ ,  $D(D, n)^3\text{He}$ ,  $D(D, p)T$  — предварительные реакции, подготавливающие материал для образования  $^4\text{He}$ .
3.  $T(D, n)^4\text{He}$ ,  $^3\text{He}(D, p)^4\text{He}$  — образование  $^4\text{He}$ .
4.  $T(\alpha, \gamma)^7\text{Li}$ ,  $^3\text{He}(\alpha, \gamma)^7\text{Be}$  — образование наиболее тяжёлых элементов первичного нуклеосинтеза.
5.  $^7\text{Li}(p, \alpha)^4\text{He}$  — горение  $^7\text{Li}$ .

Отметим, что поскольку интенсивность реакций определяется концентрациями сталкивающихся ядер, то среди всех разрешённых реакций основными являются те, для которых хотя бы одна из компонент является достаточно распространённой в первичной плазме, т.е.  $p$ ,  $n$ ,  $D$ ,  $^4\text{He}$ .

Рассмотрим эти реакции по порядку с целью оценить скорости их протекания в ранней Вселенной. Сравнение этих скоростей с темпом расширения Вселенной на момент нуклеосинтеза,

$$H(T_{NS} = 70 \text{ кэВ}) = 4 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1},$$

позволяет найти остаточные *неравновесные* концентрации первичных химических элементов во Вселенной, которые, конечно, значительно выше, чем те, что получились бы в условиях химического равновесия.

### 8.3.1 Горение нейтронов, $p + n \longrightarrow D + \gamma$

Как мы видели, дейтерию термодинамически выгодно образовываться при температуре  $T = T_{NS} \approx 65$  кэВ. Однако Вселенная довольно быстро расширяется, поэтому, в принципе, часть нейтронов может не успеть “сгореть”. Определим, какая доля нейтронов переходит в дейтерий. Для этого сравним интенсивность “горения” нейтронов с темпом расширения Вселенной на момент  $t_{NS}$ .

Сечение образования дейтерия можно грубо оценить как геометрическое,

$$(\sigma v)_{p(n,\gamma)D} \sim \frac{\alpha}{m_\pi^2} \simeq \frac{1}{137} \frac{1}{(200 \text{ МэВ})^2} = 2 \cdot 10^{-18} \frac{\text{см}^3}{\text{с}},$$

где  $m_\pi$  — масса пиона, определяющая характерный пространственный размер ядерных взаимодействий,  $r \sim m_\pi^{-1}$ , а постоянная тонкой структуры  $\alpha$  учитывает подавление, связанное с необходимостью испускания фотона. Отметим, что оцененное так сечение не зависит от скоростей сталкивающихся частиц, т.е. от температуры плазмы. В действительности это не так, и температурные поправки изменяют сечение образования дейтерия в 1.5-2 раза при  $T \sim T_{NS}$ . Кроме того, поскольку ядро дейтерия является слабо связанным, имеется дополнительный фактор подавления  $\omega_\gamma/p_D$ , определяемый отношением величины характерного импульса испускаемого фотона,  $\omega_\gamma \sim \Delta_D$ , к величине характерных импульсов протона и нейтрона в дейтерии относительно общего центра,  $p_D$ . Импульс составляющих частей дейтерия может быть найден из теоремы вириала

$$\frac{p_D^2}{M_D} \simeq \Delta_D, \quad (8.27)$$

где мы предположили для оценки, что потенциал сильного взаимодействия между нейтроном и протоном обратно пропорционален расстоянию между ними. Окончательная оценка имеет вид

$$(\sigma v)_{p(n,\gamma)D} \approx 6 \cdot 10^{-20} \frac{\text{см}^3}{\text{с}}.$$

Скорость выгорания нейтронов определяется как частота столкновений нейтрона с протонами, сопровождающихся образованием дейтерия. Отсюда для скорости процесса получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{p(n,\gamma)D} &= n_p \cdot (\sigma v)_{p(n,\gamma)D} = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \cdot (\sigma v)_{p(n,\gamma)D} \\ &= 0.31 \text{ с}^{-1}, \quad \text{для } \eta_B = 6.1 \cdot 10^{-10}, \quad T = T_{NS} = 65 \text{ кэВ}, \end{aligned}$$

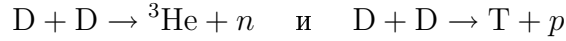
где мы выразили концентрацию протонов на момент нуклеосинтеза через барион-фотонное отношение  $\eta_B$  и плотность фотонов при температуре нуклеосинтеза  $T = T_{NS}$ . Поскольку эта скорость значительно превышает темп расширения Вселенной,  $\Gamma_{p(n,\gamma)D} \gg H(T_{NS})$ , нейтроны действительно активно горят, и все стремятся перейти в дейтерий.<sup>4</sup>

▷ **Задача 3.** Определить температуру и время жизни Вселенной на момент замораживания процесса горения нейтронов. Какова была бы их концентрация на этот момент, если бы было можно пренебречь другими ядерными реакциями?

<sup>4</sup>Заметим, что для  $\eta_B < 10^{-11}$  это уже не так!

### 8.3.2 Горение дейтерия

Образовавшиеся в результате горения нейтронов ядра дейтерия служат материалом для образования трития и гелия-3. Сечения реакций



можно оценить как геометрические, однако необходимо учесть кулоновский барьер: оба сталкивающиеся ядра ( $D$  и  $D$  или  $D$  и  $p$ ) несут положительный электрический заряд, и между ними имеется отталкивание. На больших расстояниях  $r \gg 1/m_\pi$  это отталкивание доминирует и препятствует протеканию реакций. Соответствующий эффективный потенциал представлен на рис. 8.2.

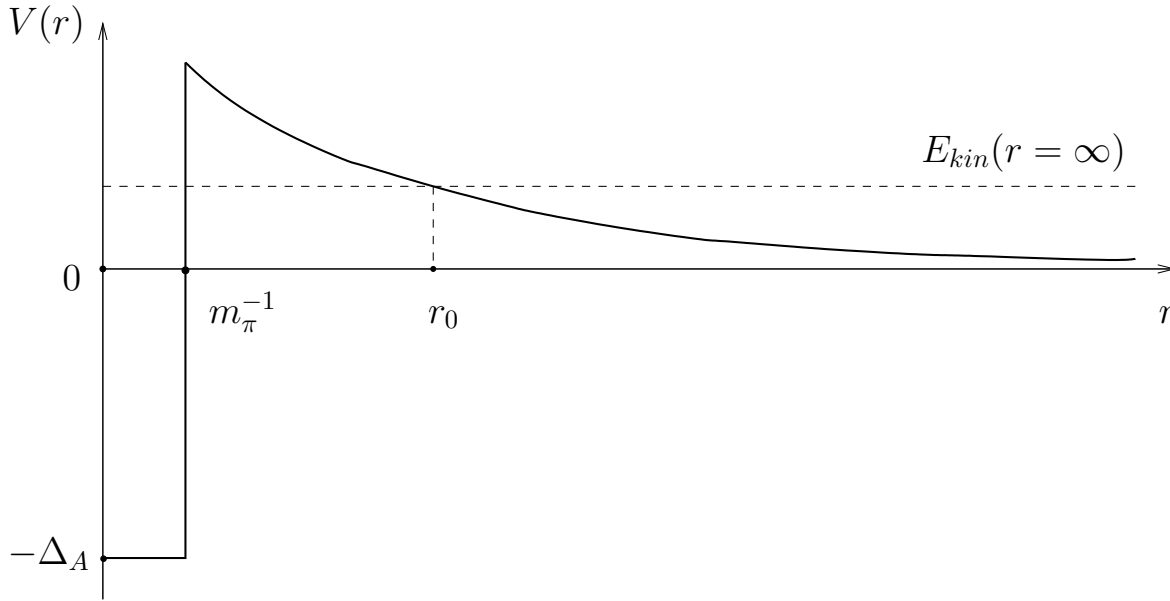


Рис. 8.2: Схематическое изображение эффективного потенциала для ядерных реакций первичного нуклеосинтеза.

Чтобы произошло образование ядра  $A$  с энергией связи  $\Delta_A$ , сталкивающиеся ядра должны преодолеть кулоновский барьер. Достигается это в результате туннельного процесса.

Чтобы оценить соответствующее сечение, перейдём в систему центра масс двух сталкивающихся ядер с зарядами  $Z_1$  и  $Z_2$ , массами  $M_1$  и  $M_2$  и скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , соответственно (хотя сейчас мы интересуемся горением дейтерия, для дальнейшего изложения нам будет полезно оценить сечение реакции горения в общем случае). Кинетическая энергия системы будет иметь вид  $E_{kin} = Mv^2/2$ , где  $M = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$  — приведённая масса, и  $v = v_1 - v_2$  — относительная скорость ядер.

Амплитуда туннелирования экспоненциально подавлена и в  $s$ -волне имеет вид

$$A \propto e^{-\int_0^{r_0} \sqrt{2M(V(r) - E_{kin})} dr},$$

где точка поворота  $r_0$  определяется из условия

$$E_{kin}(r = r_0) = E_{kin}(r = \infty) - V(r_0) = \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{\alpha Z_1 Z_2}{r_0} = 0,$$

причём  $v$  — относительная скорость удалённых друг от друга ядер; в показателе экспоненты было учтено, что  $r_0 \gg 1/m_\pi$ , т.е. туннелирование происходит в центр системы (ядра “падают” друг на друга). Таким образом, показатель экспоненты принимает вид

$$-\sqrt{2\pi\alpha Z_1 Z_2} \int_0^{r_0} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} dr = -\frac{\pi\alpha Z_1 Z_2}{v}.$$

В результате для сечения горения ядер получаем

$$\sigma \propto e^{-\frac{2\pi\alpha Z_1 Z_2}{v}},$$

или, с учётом предэкспоненты,

$$\sigma v = \sigma_0 \cdot \frac{2\pi\alpha Z_1 Z_2}{v} \cdot e^{-\frac{2\pi\alpha Z_1 Z_2}{v}}, \quad (8.28)$$

где  $\sigma_0$  — геометрическое сечение реакции в отсутствие кулоновского подавления.

Выражение (8.28) необходимо усреднить с учётом разброса скоростей в первичной плазме:

$$\langle \sigma v \rangle = \sigma_0 \cdot 2\pi\alpha Z_1 Z_2 \cdot \frac{\int_0^\infty e^{-\frac{Mv^2}{2T} - \frac{2\pi\alpha Z_1 Z_2}{v}} v dv}{\int_0^\infty e^{-\frac{Mv^2}{2T}} v^2 dv}. \quad (8.29)$$

Нормировочный интеграл в знаменателе легко вычисляется и равен  $\sqrt{\pi/2}(T/M)^{3/2}$ . Интеграл в числителе возьмём методом перевала

$$\int_0^\infty e^{-\frac{Mv^2}{2T} - \frac{2\pi\alpha Z_1 Z_2}{v}} v dv \approx v_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{M}{T} + \frac{4\pi\alpha Z_1 Z_2}{v_0^3}}} e^{-\frac{Mv_0^2}{2T} - \frac{2\pi\alpha Z_1 Z_2}{v_0}},$$

где точка перевала  $v_0$  определена условием

$$\frac{Mv_0}{T} = \frac{2\pi\alpha Z_1 Z_2}{v_0^2}.$$

В результате (8.29) принимает вид

$$\langle \sigma v \rangle \approx \sigma_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (2\pi\alpha Z_1 Z_2)^{4/3} \cdot \left(\frac{M}{T}\right)^{2/3} \cdot e^{-\frac{3}{2}(2\pi\alpha Z_1 Z_2)^{2/3} \left(\frac{M}{T}\right)^{1/3}}.$$

Наконец, вводя вспомогательные величины: относительную приведённую массу ядер  $\bar{A} \equiv M/m_p$  и температуру, измеряемую в миллиардах градусов Кельвина,  $T_9 \equiv T/(10^9 \text{ K}) = T/(86 \text{ кэВ})$ , запишем окончательно

$$\langle \sigma v \rangle = 9.3 \cdot \sigma_0 \cdot (Z_1 Z_2)^{4/3} \bar{A}^{2/3} T_9^{-2/3} \cdot e^{-4.26 \cdot (Z_1 Z_2)^{2/3} \bar{A}^{1/3} T_9^{-1/3}}. \quad (8.30)$$

Отметим, что в полученной нами оценке для  $\langle \sigma v \rangle$  заложено предположение, что  $\sigma_0$  не зависит от импульсов сталкивающихся частиц в интересующем нас интервале энергий  $E \sim 10 - 100 \text{ кэВ}$ . На самом деле это не так, и учёт нетривиальной зависимости предэкспоненциального фактора в (8.28) от импульсов (т.е. от скоростей) часто приводит вместо (8.30) к более громоздким выражениям. В частности, для многих реакций лидирующий вклад в предэкспоненте в окончательном ответе, заменяющем собой выражение (8.30), имеет иную степенную зависимость от энергии.

В ряде случаев выражение (8.30) вообще не работает, что связано с вкладами в сечение промежуточных резонансных состояний. Наконец, рождение новых ядер может происходить не только в  $s$ -волне, — нетривиальный угловой момент даёт вклад в эффективный потенциал, стоящий в туннельной экспоненте. Это часто приводит к дополнительным вкладам в полное сечение, имеющим иную степенную зависимость показателя экспоненты от температуры, чем в (8.30). Мы опускаем все эти подробности, и в соответствующих местах для получения численных оценок будем корректировать формулу (8.30), подставляя взамен неё основной вклад в скорость конкретной реакции.

Возвращаясь к вопросу о горении дейтерия и рассматривая реакции слияния двух ядер дейтерия,  $D(D, p)T$  и  $D(D, n)^3\text{He}$ , оценим  $\sigma_0$  грубо, используя характерный пространственный масштаб ядерных сил:

$$\sigma_0 \sim m_\pi^{-2} \sim 10^{-26} \text{ см}^2 \sim 3 \cdot 10^{-16} \frac{\text{см}^2}{\text{с}}.$$

В результате для горения дейтерия ( $\bar{A} = Z_1 = Z_2 = 1$ ) получим

$$\langle \sigma v \rangle_{DD} = 3 \cdot 10^{-15} \frac{\text{см}^3}{\text{с}} \cdot T_9^{-2/3} \cdot e^{-4.26 \cdot T_9^{-1/3}}. \quad (8.31)$$

Дейтерий перестаёт гореть при условии

$$\Gamma_{DD} = n_D(T) \cdot \langle \sigma v \rangle_{DD}(T) \sim H(T). \quad (8.32)$$

Этим условием можно воспользоваться, чтобы определить концентрацию дейтерия на момент прекращения реакции горения. При  $T = T_{NS}$  ( $T_9 \approx 0.75$ ) получим:

$$n_D = \frac{H(T_{NS})}{\langle \sigma v \rangle_{DD}(T_{NS})} = 10^{14} \text{ см}^{-3}. \quad (8.33)$$

Отметим, что эта концентрация довольно слабо зависит от параметра  $\eta_B$ , поскольку  $\eta_B$  входит в выражение для  $n_D$  через температуру  $T_{NS}$ , а  $T_{NS}$  зависит от  $\eta_B$  логарифмически. Сравнивая  $n_D$  с концентрацией протонов, оценим распространённость первичного дейтерия во Вселенной:

$$\frac{n_D}{n_p} = \frac{1}{0.75\eta_B} \cdot \frac{n_D}{n_\gamma(T_{NS})} = 0.3 \cdot 10^{-4}, \quad \text{при } \eta_B = 6.1 \cdot 10^{-10}. \quad (8.34)$$

Это отношение не изменяется со времени нуклеосинтеза и может быть проверено при изучении облаков первичного газа путём сравнения интенсивности линий излучения (или поглощения), отвечающих дейтерию и водороду.

Существенно, что из-за слабой зависимости  $n_D$  от  $\eta_B$  отношение концентраций дейтерия и протонов (8.34) обратно пропорционально  $\eta_B$ , поэтому экспериментальное измерение распространённости первичного дейтерия позволяет определить плотность барионов.

Перейдём к рассмотрению ещё одной реакции с участием дейтерия:  $D + p \longrightarrow \gamma + ^3\text{He}$ . Сечение этой реакции заметно меньше сечения других реакций с участием дейтерия, рассмотренных выше. Это связано с необходимостью испускания дополнительного фотона. Поэтому  $\sigma_0 \sim 10^{-21} \text{ см}^2/\text{с}$  и

$$\langle \sigma v \rangle_{D(p,\gamma)^3\text{He}} = 8 \cdot 10^{-21} \frac{\text{см}^2}{\text{с}} \cdot T_9^{-2/3} \cdot e^{-3.7 \cdot T_9^{-1/3}},$$

где мы применили общую формулу (8.30) и учли, что для рассматриваемой реакции  $\bar{A} = 2/3$ ,  $Z_1 = Z_2 = 1$ .

Скорость этой реакции горения дейтерия пропорциональна концентрации протонов в плазме

$$\Gamma = n_p \cdot \langle \sigma v \rangle_{D(p,\gamma)^3\text{He}} ,$$

и для  $\eta_B = 6.1 \cdot 10^{-10}$  при  $T \simeq T_{NS}$  уступает темпу расширения Вселенной. Эта реакция становится существенной при достаточно больших  $\eta_B$  (в этом разделе мы изучаем зависимость наблюдаемых величин от этого параметра): чем больше концентрация барионов<sup>5</sup>, тем больше дейтерия “вымывается”. При этом его остаточная концентрация уменьшается, а остаточная концентрация  $^3\text{He}$ , наоборот, увеличивается.

### 8.3.3 \*Образование первичных $^3\text{He}$ и $^3\text{H}$

Гелий-3 и тритий, образованные в столкновениях ядер дейтерия, сами перегорают в гелий-4.

Для горения гелия-3 в реакции  $^3\text{He} + D \rightarrow p + ^4\text{He}$  простая оценка (8.30) не работает. Вместо неё скорость реакции имеет вид:

$$\langle \sigma v \rangle_{^3\text{He}(D,p)^4\text{He}} = 10^{-15} \frac{\text{см}^3}{\text{с}} \cdot T_9^{-1/2} e^{-1.8T_9^{-1}} . \quad (8.35)$$

При  $T_9 \simeq 0.75$  ( $T = 65$  кэВ) эта скорость превышает скорость горения дейтерия (8.31); когда основные реакции горения дейтерия в значительной степени прекращаются, гелий-3 продолжает активно выгорать. Горение гелия-3 прекращается тогда, когда концентрация дейтерия уменьшится за счёт расширения Вселенной настолько, что темп реакции  $^3\text{He} + D \rightarrow p + ^4\text{He}$  сравнится с темпом расширения Вселенной. Это произойдёт в момент времени  $t_{3\text{He}}$ , такой что

$$\frac{\langle \sigma v \rangle_{^3\text{He}(D,p)^4\text{He}} \cdot n_D}{H} \sim 1 , \quad t = t_{3\text{He}} . \quad (8.36)$$

К этому моменту во Вселенной всё ещё имеется небольшое количество гелия-3, поскольку реакция  $D + D \rightarrow ^3\text{He} + n$  с малой вероятностью продолжает идти. Концентрация гелия-3, которая нарабатывается за хаббловское время при  $t \simeq t_{3\text{He}}$ , оценивается величиной

$$n_{3\text{He}} \sim \langle \sigma v \rangle_{D(D,n)^3\text{He}} \cdot n_D^2 \cdot \frac{1}{H} , \quad t = t_{3\text{He}} . \quad (8.37)$$

Это выражение и даёт оценку остаточной концентрации гелия-3, поскольку при  $t \gg t_{3\text{He}}$  плотность дейтерия очень мала, и образования гелия-3 не происходит. Из (8.36) и (8.37) видно, что отношение остаточных концентраций гелия-3 и дейтерия оценивается величиной

$$\frac{n_{3\text{He}}}{n_D} \simeq \frac{\langle \sigma v \rangle_{D(D,n)^3\text{He}}}{\langle \sigma v \rangle_{^3\text{He}(D,p)^4\text{He}}} , \quad (8.38)$$

причём правую часть нужно вычислять в момент времени  $t_{3\text{He}}$ . Температура в этот момент определяется соотношением (8.36), и она мало отличается от температуры

---

<sup>5</sup>В этом разделе мы специальное внимание уделяем зависимости наблюдаемых величин от параметра  $\eta_B$  и поэтому позволяем себе рассматривать его в качестве свободного. Отметим, однако, что он весьма жёстко фиксирован, безотносительно к нуклеосинтезу, имеющимися экспериментальными данными по анизотропии реликтового излучения.

нуклеосинтеза  $T_{NS} = 65$  кэВ. Действительно, левая часть в (8.36) сильно зависит от температуры, поскольку  $n_D \propto T^{-3}$  и  $H^{-1} \propto T^{-2}$ , а скорости реакций  $D + D \rightarrow {}^3\text{He} + p$  и  ${}^3\text{He} + D \rightarrow {}^4\text{He} + p$  отличаются всего на порядок при  $T = T_{NS}$ . Сравнивая (8.36) с соотношением (8.32), выполняющимся при  $T = T_{NS}$ , мы видим, что горение  ${}^3\text{He}$  прекращается при  $T_{{}^3\text{He}} \simeq 0.6 T_{NS}$ . Используя (8.31) и (8.35) и учитывая (8.34), получаем отсюда оценку распространённости первичного гелия-3 во Вселенной:

$$\frac{n_{{}^3\text{He}}}{n_p} \simeq 0.9 \cdot 10^{-5}.$$

Аналогичным образом рассматривается горение трития,  $T + D \rightarrow {}^4\text{He} + n$ . Сечение образования трития — такое же, как для  ${}^3\text{He}$ , а скорость горения равна

$$\langle \sigma v \rangle_{T(D,n){}^4\text{He}} = 10^{-15} \frac{\text{см}^3}{\text{с}} \cdot T_9^{-2/3} e^{-0.5 T_9^{-1}}.$$

Стоит отметить слабую зависимость этой скорости от температуры в интересной области  $T_g \sim 1$ . Скорость горения трития больше, чем гелия-3, поэтому его горение прекращается ещё позже, чем горение  ${}^3\text{He}$ , а остаётся его ещё меньше. Оценка отношения закалочных концентраций трития и дейтерия производится так же, как для  ${}^3\text{He}$  (см. (8.38)) и даёт в конечном итоге

$$\frac{n_T}{n_p} \simeq 3 \cdot 10^{-6}, \quad \text{при } \eta_B = 6.1 \cdot 10^{-9}. \quad (8.39)$$

Как отношение  $n_{{}^3\text{He}}/n_p$ , так и отношение  $n_T/n_p$  обратно пропорциональны  $\eta_B$ .

Отметим в заключение, что неоднократно упоминавшийся нами факт, что в процессе первичного нуклеосинтеза практически все свободные нейтроны связываются в ядра  ${}^4\text{He}$ , напрямую связан с тем, что реакции горения гелия-3 и трития при  $T \simeq T_{NS}$  идут быстрее, чем реакции их образования из дейтерия. Если бы это было не так, дейтерий бы выгорел быстрее всего, и реакции  ${}^3\text{He} + D \rightarrow {}^4\text{He} + p$ ,  $T + D \rightarrow {}^4\text{He} + n$  прекратились бы на этапе, когда нейтроны были бы в основном связаны в ядрах гелия-3 и трития, а не в ядрах  ${}^4\text{He}$ . С другой стороны, не слишком малые значения закалочных концентраций  ${}^3\text{He}$  и  $T$  связаны с тем, что скорости их горения сравнимы со скоростью горения дейтерия при  $T \simeq T_{NS}$ , хотя и несколько выше её. Определённое разнообразие лёгких элементов, образующихся в результате первичного нуклеосинтеза, обусловлено довольно случайными совпадениями сечений термоядерных реакций при низких энергиях.

### 8.3.4 \*Образование и горение наиболее тяжёлых ядер первичной плазмы

В качестве примера реакций с участием наиболее тяжёлых элементов первичного нуклеосинтеза рассмотрим образование и горение  ${}^7\text{Li}$  в реакциях  $T(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$  и  ${}^7\text{Li}(p, \alpha){}^4\text{He}$ , соответственно.

Для реакции образования неплохо работает формула (8.30), в которой  $\sigma_0 \propto m_\pi^{-2} \cdot \alpha$  (фактор  $\alpha$  обусловлен испусканием фотона). Численно

$$\langle \sigma v \rangle_{T(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}} \sim 10^{-18} \frac{\text{см}^3}{\text{с}} \cdot T_9^{-2/3} e^{-8.0 T_9^{-1/3}}. \quad (8.40)$$

Темп выгорания трития по этому каналу

$$\langle \sigma v \rangle_{T(\alpha, \gamma)^7\text{Li}} \cdot n_\alpha \simeq 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \quad T_9 = 0.75$$

мал по сравнению с параметром Хаббла. Для реакции горения  $^7\text{Li}$  формула (8.30) также работает, и с её помощью можно получить

$$\langle \sigma v \rangle_{^7\text{Li}(p, \alpha)^4\text{He}} \sim 10^{-15} \frac{\text{см}^3}{\text{с}} \cdot T_9^{-2/3} e^{-8.5 T_9^{-1/3}}.$$

В этой реакции  $\sigma_0$  обусловлено целиком сильными взаимодействиями, поэтому её скорость гораздо выше скорости образования (8.40). Численно темп выгорания лития-7 равен

$$\langle \sigma v \rangle_{^7\text{Li}(p, \alpha)^4\text{He}} \cdot n_p \simeq 0.7 \text{ с}^{-1}, \quad T_9 = 0.75, \quad \eta_B = 6.1 \cdot 10^{-10},$$

что превышает параметр Хаббла. Поэтому горение  $^7\text{Li}$  прекращается довольно поздно, когда плотность протонов существенно уменьшится вследствие расширения Вселенной. В этот момент отношение концентраций лития-7 и трития замораживается на уровне (ср. (8.37))

$$\frac{n_{^7\text{Li}}}{n_T} \simeq \frac{\langle \sigma v \rangle_{T(\alpha, \gamma)^7\text{Li}}}{\langle \sigma v \rangle_{^7\text{Li}(p, \alpha)^4\text{He}}} \cdot \frac{n_\alpha}{n_p} \sim 2 \cdot 10^{-5},$$

поэтому, с учётом (8.39), распространённость первичного лития-7 мала,

$$\frac{n_{^7\text{Li}}}{n_p} \sim 10^{-10}.$$

В заключение отметим, что образование  $^7\text{Be}$ , переходящего затем в  $^7\text{Li}$ , скольконибудь существенно лишь при больших  $\eta_B \gtrsim 10^{-9}$ , когда в плазме относительно мало  $^3\text{He}$ .

## 8.4 Наблюдаемая распространённость первичных элементов

Теория первичного нуклеосинтеза хорошо разработана. На основе численных расчётов с высокой точностью получены предсказания распространённостей всех лёгких элементов, образованных в первичной плазме. Эти предсказания проверяются в результате наблюдений за областями Вселенной, химический состав которых по тем или иным причинам не изменился, несмотря на эволюцию Вселенной.

Как мы уже отмечали, более тяжёлые ядра образуются в основном в термоядерных реакциях внутри звёзд, т.е., грубо говоря, уже в нашу эпоху,  $z \sim 1 - 10$ . Первичные ядра служат при этом строительным материалом для более сложных химических элементов. Таким образом, в результате звёздной эволюции часть первичных лёгких ядер трансформируется в более тяжёлые ядра, часть, наоборот, трансформируется в более простые — разрушается под воздействием жёсткого  $\gamma$ -излучения, сопровождающего процессы звездообразования. В то же время, термоядерные процессы рождения более тяжёлых ядер часто в качестве побочных продуктов реакций содержат и лёгкие ядра. Кроме того, состав лёгких ядер пополняется продуктами диссоциации тяжёлых ядер под воздействием тех же энергичных  $\gamma$ -квантов. Все



эти процессы приводят к изменению локальной распространённости лёгких ядер по сравнению с их первичной концентрацией.

Лишь в определённых областях Вселенной локальная распространённость некоторых лёгких ядер не изменялась. Это области, где процессы звёздообразования протекали слабо: например, наиболее удалённые области (области с наибольшим красным смещением) и/или области с малой распространённостью металлов (что можно выяснить, изучая спектр поглощения света от далёких квазаров).

Дейтерий занимает в ряду лёгких ядер особую роль: вследствие очень низкой энергии связи он не образуется в процессах звёздного нуклеосинтеза, а наоборот, только разрушается. Поскольку неизвестно никаких существенных астрофизических источников дейтерия<sup>6</sup>, то любое измерение его локальной распространённости даёт ограничение снизу на концентрацию первичного дейтерия. Отметим, что в последнее время распространённость дейтерия измеряется по спектроскопии расположенных на космологических расстояниях облаков обеднённого металлами газа, поглощающего свет от далёких квазаров.

Распространённость гелия-4 изучается по обеднённым металлами облакам ионизованного водорода в карликовых галактиках (рождение гелия-4 в звёздах сопровождается рождением тяжёлых элементов, поэтому отсутствие последних в облаках — свидетельство того, что гелий-4 там в основном первичный).

Для измерения распространённости лития-7 используют результаты спектроскопии обеднённых металлами старых звёзд (звёзды второго поколения) в шаровых скоплениях нашей Галактики.

Для остальных элементов ( $^3\text{He}$ ,  $^7\text{Be}$ , ...) пока не найдено областей во Вселенной, для которых можно было бы уверенно заключить, что основная доля содержащихся там соответствующих лёгких ядер сохранилась со времён первичного нуклеосинтеза. Кроме того, довольно распространённый  $^3\text{He}$ , например, менее чувствителен к концентрации барионов  $\eta_B$ , чем дейтерий, и измерение его современной распространённости больше говорит о процессах звёздообразования и эволюции Галактики, чем о деталях первичного нуклеосинтеза.

Сами по себе измерения относительных локальных распространённостей химических элементов основаны на спектроскопии и поэтому весьма точны. Основная ошибка в измерении первичной концентрации лёгких элементов систематическая и, грубо говоря, обусловлена неуверенностью в “первичности” состава наблюдаемых облаков или звёзд. Предсказания нуклеосинтеза для распространённостей первичных элементов вместе с результатами наблюдений приведены на рис. 8.3.

В целом эти результаты неплохо согласуются друг с другом и с величиной  $\eta_B = 6.1 \cdot 10^{-10}$ , полученной из измерений анизотропии реликтового излучения. Указывать на некоторое противоречие между распространённостями гелия-4 и лития-7 с одной стороны, и распространённостью дейтерия и данными по анизотропии реликтового излучения с другой стороны, конечно, рано — систематические неопределённости в измерении распространённости первичных элементов ещё весьма велики. В то же время, они достаточны для того, чтобы получить важную информацию о составе первичной плазмы в эпоху нуклеосинтеза. Этой информацией можно воспользоваться для получения результатов, интересных для физики частиц.

Действительно, с точки зрения Стандартной модели физики частиц первичный нуклеосинтез в расширяющейся Вселенной позволяет определить только один но-

<sup>6</sup>Вообще говоря, известны довольно редкие астрофизические явления, где в сильно неравновесных условиях может образоваться малое количество дейтерия.

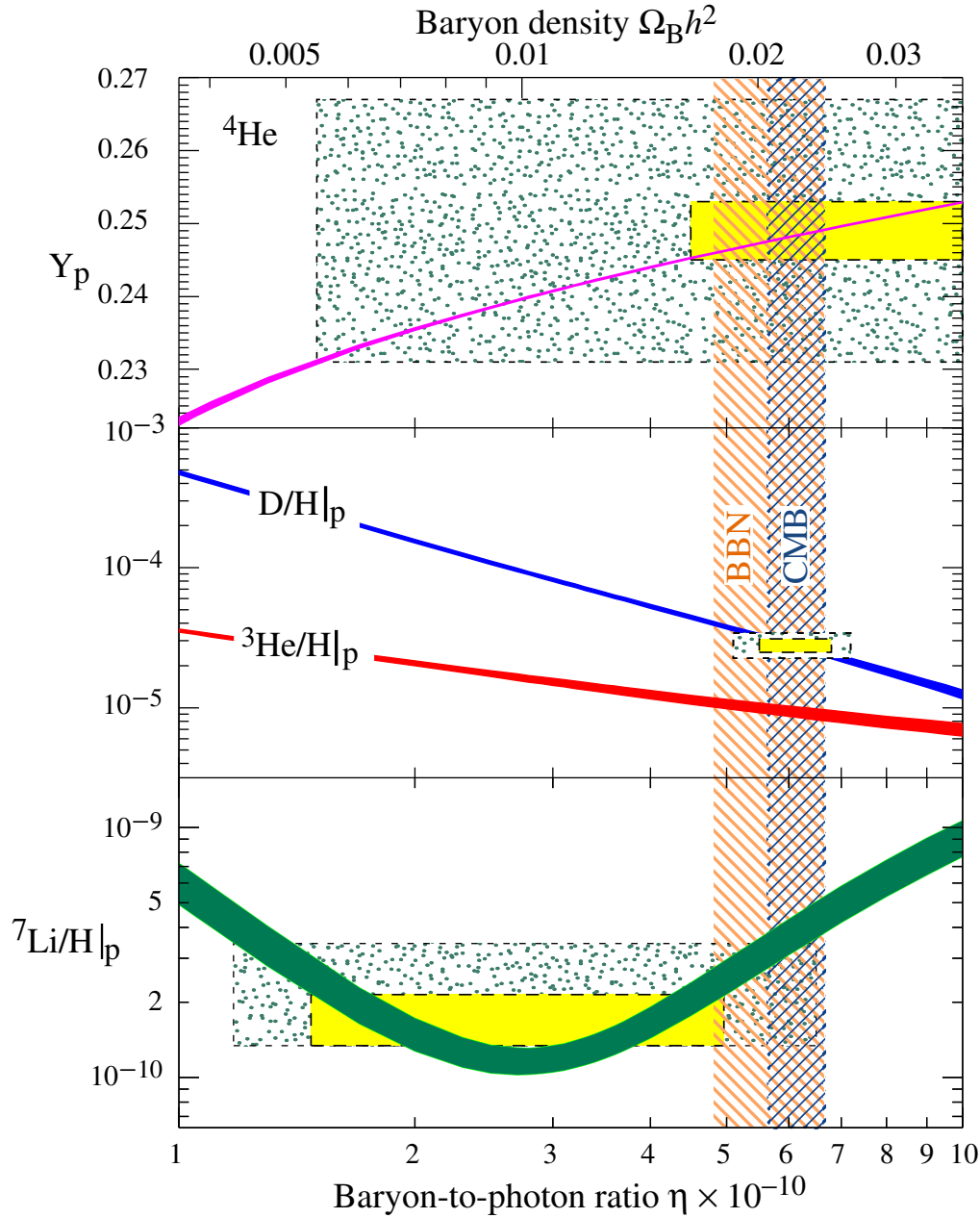


Рис. 8.3: Предсказания нуклеосинтеза для распространённости первичных  ${}^4\text{He}$ ,  $\text{D}$ ,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$  вместе с результатами наблюдений [4] ( $2\sigma$  неопределённости: статистические — длинный пунктир, статистические и систематические — короткий пунктир; неопределённости в вычислении распространённости соответствуют толщине линий). Вертикальная полоса “CMB” — результат для  $\eta_B$ , следующий из анализа анизотропии реликтового излучения. По оси абсцисс отложено  $\eta_{10} = \eta_B \cdot 10^{10}$ , по оси ординат:  $Y = \frac{n_{{}^4\text{He}} \cdot m_{{}^4\text{He}}}{n_p \cdot m_p}$  — массовая концентрация  ${}^4\text{He}$ ,  $n_{\text{D}}/n_p$ ,  $n_{{}^3\text{He}}/n_p$  и  $n_{{}^7\text{Li}}/n_p$  — распространённости остальных элементов.

вый космологический параметр — барионную асимметрию  $\eta_B$ . Если же рассматривать обобщения Стандартной модели физики частиц, то первичный нуклеосинтез становится источником важных ограничений на параметры таких теорий. А именно, хорошее согласие предсказаний с наблюдениями позволяет сделать несколько

заклучений.

Во-первых, как мы уже отмечали, нуклеосинтез накладывает ограничение на концентрацию новых релятивистских частиц при  $T \sim 1$  МэВ, см. (8.26).

Во-вторых, в эпоху нуклеосинтеза не могло происходить распада (или аннигиляции) каких-либо новых частиц, сопровождающегося рождением большого числа энергичных фотонов. Дело в том, что последние неминуемо разрушили бы часть образовавшихся ядер. Отсюда следуют ограничения на модели с тяжёлыми долгоживущими частицами. Если основной канал распада такой частицы  $X$  — это распад

$$X \rightarrow \gamma Y ,$$

где  $Y$  — слабовзаимодействующая частица с  $m_Y \ll m_X$ , то в распадах таких частиц образуются жёсткие фотоны с  $E_\gamma \approx m_X/2$ , опасные с точки зрения нуклеосинтеза. Соответствующие ограничения в пространстве параметров  $\tau_X$  и  $\zeta_X$ , где  $\tau_X$  — время жизни  $X$ -частицы, а

$$\zeta_X = m_X \frac{n_X}{n_\gamma}$$

представлены на рис. 8.4. Примерами моделей с такими  $X$ - и  $Y$ -частицами служат некоторые суперсимметричные расширения Стандартной модели физики частиц, причём в качестве распадающихся  $X$ -частиц может выступать нейтрино, а в качестве стабильной  $Y$ -частицы — гравитино (см. раздел 9.7.1).

Ещё одним источником ограничений на параметры моделей, расширяющих Стандартную модель, служит тот факт, что в эпоху нуклеосинтеза невозможно дополнительное производство энтропии — например, за счёт распада каких-либо частиц (или конденсатов) в мягкие фотоны. В противном случае изменилась бы температура нуклеосинтеза, а значит и количество нераспавшихся нейтронов, и как следствие — распространённость образовавшегося гелия-4 (см. (8.25)).

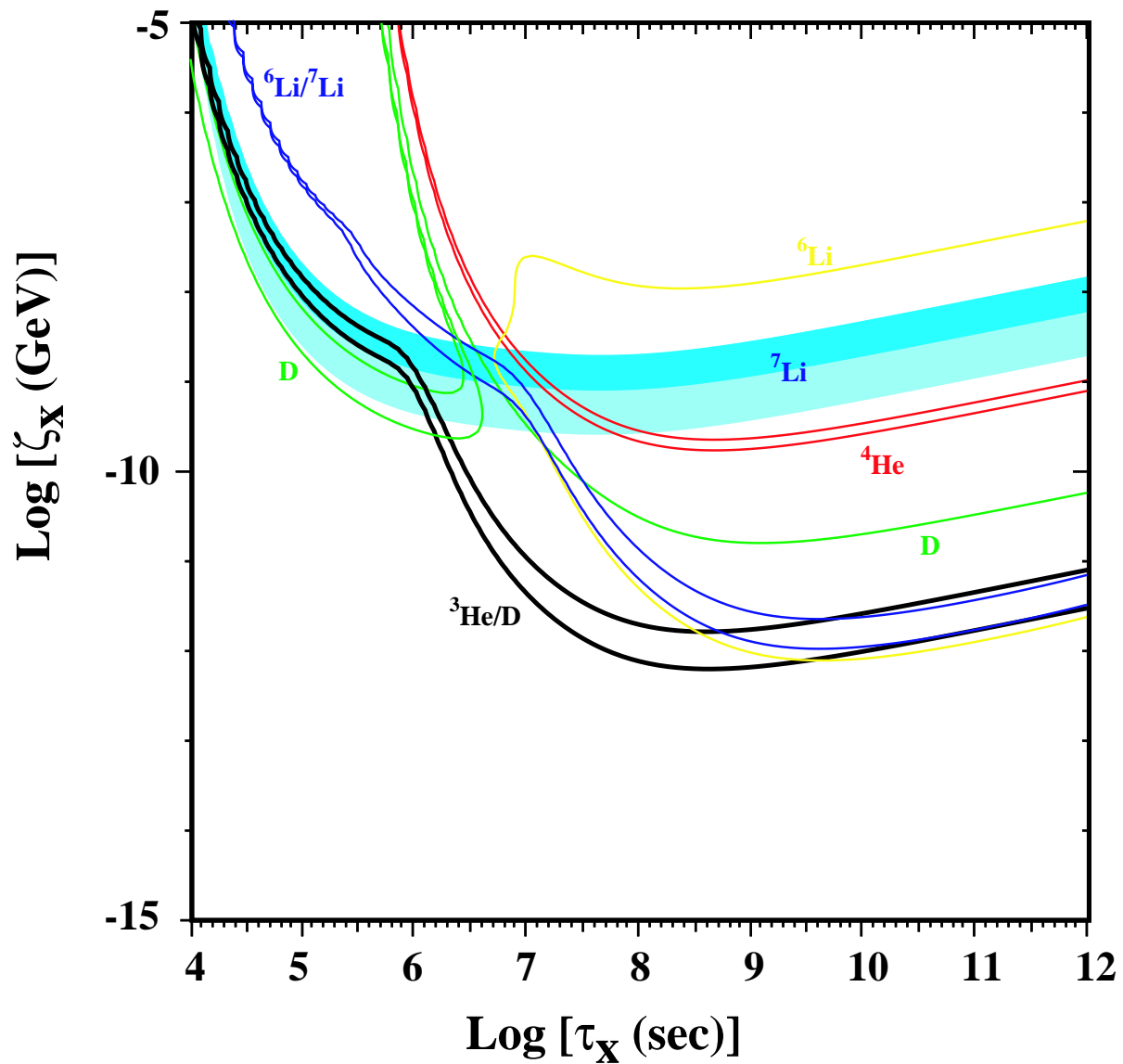


Рис. 8.4: Модельно-независимые ограничения из первичного нуклеосинтеза на модели с долгоживущими нестабильными частицами, распадающимися в высокоэнергичные фотоны [28]. Модели с параметрами выше сплошных линий исключены из результатов наблюдения распространённости соответствующих элементов. Верхние линии соответствуют наиболее консервативным оценкам.

# Глава 9

## Тёмная материя

Мы уже упоминали, что заметный вклад в полную плотность энергии в современной Вселенной (около 20%) вносит тёмная материя, которая, по-видимому, состоит из новых массивных частиц, отсутствующих в Стандартной модели физики частиц. Эти частицы должны быть нерелятивистскими, почти не взаимодействовать между собой<sup>1</sup> и не взаимодействовать (или если взаимодействовать, то очень слабо) с фотонами. Последнее означает, что в галактиках газ частиц тёмной материи не может остывать, испуская фотоны подобно барионам, а значит перепад плотности между центром галактики и её периферией будет не такой большой, как у барионов. Это в конечном итоге и позволяет объяснить распределение пекулярных скоростей светящегося вещества в галактиках, погруженных в гало из частиц тёмной материи (см. рис. 1.7 во Введении).

В этой Главе мы рассмотрим некоторые механизмы генерации тёмной материи во Вселенной и некоторые расширения Стандартной модели, в которых имеются частицы — кандидаты на роль частиц тёмной материи. Сразу сделаем одно важное замечание: ни один из излагаемых ниже механизмов не объясняет приближённого (с точностью до фактора 5) соотношения

$$\rho_{B,0} \sim \rho_{DM,0}, \quad (9.1)$$

где  $\rho_{B,0}$  и  $\rho_{DM,0}$  — плотность энергии (массы) барионов и частиц тёмной материи в современной Вселенной. Это приближённое равенство выполнялось и в прошлом, на достаточно поздних этапах расширения Вселенной. В литературе было предложено несколько возможных механизмов генерации тёмной материи и барионной асимметрии, приводящих к соотношению (9.1), однако убедительного и естественного объяснения приближённого совпадения  $\rho_B$  и  $\rho_{DM}$  до сих пор не найдено. Возможно, это — действительно случайное совпадение.

---

<sup>1</sup>Тёмная материя из взаимодействующих частиц привела бы среди прочего к формированию в основном шарообразных гало, что противоречит наблюдениям (в частности, наблюдения галактик в скоплениях показывают, что подавляющее большинство гало скоплений существенно эллипсоидальны). В то же время стоит отметить, что ненулевое сечение упругого рассеяния частиц тёмной материи самих на себе позволило бы избежать проблем с распределением тёмной материи в центрах галактик, где компьютерные вычисления в модели с невзаимодействующей холодной тёмной материей предсказывают слишком резкое увеличение плотности её массы.

## 9.1 Холодная, горячая и тёплая тёмная материя

Сделаем довольно естественное предположение о том, что частицы тёмной материи  $X$  находились в термодинамическом равновесии с обычным веществом в ранней Вселенной.<sup>2</sup> В какой-то момент эти частицы вышли из равновесия, и с тех пор распространяются свободно. Если соответствующая температура  $T_f$  (freeze-out) заметно меньше массы частиц тёмной материи  $M_X$ , то эти частицы отщепляются, будучи нерелятивистскими. В этом случае говорят о холодной тёмной материи. В противоположном случае  $T_f \gtrsim M_X$  рассматривают два варианта:  $M_X \lesssim 1$  эВ и  $M_X \gtrsim 1$  эВ. Первый случай соответствует горячей тёмной материи; именно он реализуется для нейтрино, как мы обсуждали в Главе 7. Во втором случае говорят о тёплой тёмной материи. Разница между этими случаями состоит в том, что горячая тёмная материя является релятивистской к моменту перехода от радиационно-доминированной к пылевидной стадии (напомним, что этот переход происходит при  $T_{eq} \sim 1$  эВ, см. раздел 4.4), а тёплая тёмная материя является уже нерелятивистской к этому моменту. Мы увидим во второй части книги, что рост возмущений плотности происходит существенно по-разному на радиационно-доминированной и пылевидной стадиях, и что этот рост существенно зависит от того, является ли тёмная материя релятивистской или нет на пылевидной стадии. Отсюда и различие между горячей и тёплой тёмной материей.

Один их эффектов, специфических для горячей или тёплой тёмной материи, состоит в следующем. Пусть во Вселенной изначально имелись малые неоднородности их плотности, и был период, когда частицы тёмной материи являлись релятивистскими и распространялись свободно (это происходило в интервале температур  $T_f \gtrsim T \gtrsim M_X$ ). В этот период частицы тёмной материи двигались во Вселенной почти со скоростью света, они быстро покидали области с повышенной плотностью и заполняли области с пониженной плотностью — разумеется в пределах текущего космологического горизонта. В результате этого процесса свободного перемешивания (free streaming) неоднородности плотности тёмной материи с размерами меньше текущего горизонта замывались. Таким образом, для горячей и тёплой тёмной материи характерны малые амплитуды возмущений плотности на относительно малых пространственных масштабах.

Свободное перемешивание прекратилось при  $T \sim M_X$ . Размер горизонта на этот момент, растянутый в  $(1+z) = T/T_0$  раз, и определяет максимальный современный размер областей, в которых возмущения плотности подавлены. В случае тёплой тёмной материи момент  $T \sim M_X$  имеет место на радиационно-доминированной стадии, и размер горизонта на этот момент равен

$$l_H \sim \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X^2}.$$

Соответствующий современный размер имеет порядок величины

$$l_{X,0} = l_H \frac{T}{T_0} \sim \frac{M_{Pl}^*}{T_0 M_X}. \quad (9.2)$$

Таким образом, в моделях с тёплой тёмной материей неоднородности с современными размерами  $l_0 < l_{X,0}$  подавлены по сравнению с моделями с холодной тёмной

---

<sup>2</sup>Это предположение, впрочем, может не выполняться, как мы увидим в некоторых примерах в разделе 9.5.

материей. Для  $M_X \sim 1$  кэВ учтём, что  $g_* = 3.36$  при  $T \sim 1$  кэВ (см. (4.23)), так что  $M_{Pl}^* = M_{Pl}/(1.66\sqrt{g_*}) = 4 \cdot 10^{18}$  ГэВ. Получим из (9.2)

$$l_{X,0} \sim 3 \cdot 10^{23} \text{ см} = 0.1 \text{ Мпк}, \quad M_X \sim 1 \text{ кэВ}.$$

В случае  $M_X \sim 1$  эВ соответствующий размер имеет порядок

$$l_{X,0} \sim 100 \text{ Мпк}, \quad M_X \sim 1 \text{ эВ}. \quad (9.3)$$

Возмущения на масштабах, меньших 100 Мпк, подавлены и в моделях с горячей тёмной материей.

Наиболее приемлемым вариантом считается холодная тёмная материя. Частицы горячей тёмной материи (например, нейтрино Стандартной модели) могут составлять лишь небольшую часть тёмной материи. Действительно, как видно из (9.3), возмущения плотности не слишком больших пространственных размеров подавлены в моделях с горячей тёплой материей. Поэтому в таких моделях сначала формируются самые крупные структуры — сверхскопления, которые потом распадаются на более мелкие структуры — скопления. Галактики формируются в последнюю очередь, и этот процесс должен был начаться не так давно. Такая последовательность формирования структур противоречит наблюдениям.

Пространственные размеры порядка 0.1 Мпк характерны для начальных возмущений, из которых в конечном итоге образовывались структуры галактических масштабов (в том числе карликовые галактики) и меньше.<sup>3</sup> Изучение структур таких масштабов приводит к ограничению снизу на массу частиц тёмной материи

$$M_X \gtrsim 1 \text{ кэВ}. \quad (9.4)$$

Как видно, возможность тёплой тёмной материи до сих пор не исключена. Подчеркнём, что это ограничение относится к тёмной материи, когда-то находившейся в термодинамическом равновесии с обычным веществом<sup>4</sup>. Для случая частиц тёмной материи с произвольной функцией распределения по импульсам оценку (9.4) следует модифицировать, умножив правую часть на отношение среднего импульса частиц к среднему импульсу равновесного (теплого) распределения,  $\langle |\mathbf{p}| \rangle / \langle \mathbf{p} \rangle_T$ .

Для частиц тёмной материи, не находившихся в термодинамическом равновесии с частицами первичной плазмы, модельно-независимое ограничение снизу на их массу существенно слабее. Это ограничение следует из необходимости “заключить” частицы тёмной материи в галактики. Для частицы тёмной материи — *бозона* — это означает, что её волна де Бройля  $\lambda = 2\pi/(M_X v_X)$  должна быть меньше размеров галактик, т.е. меньше 1 кпк (типичный размер карликовой галактики). Отсюда получим (учитывая, что скорость частиц тёмной материи в галактике  $v_X \sim 10^{-3}$ ),

$$M_X \gtrsim 3 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}.$$

Для фермионов ограничение значительно сильнее, что связано с принципом Паули. Предположив, что частицы тёмной материи в гало — фермионы — имеют максвелловское распределение по скоростям (что ожидается для частиц холодной тёмной материи), получим для их плотности распределения в фазовом пространстве

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{\rho_X(\mathbf{x})}{M_X} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi} M_X v_X)^3} \cdot e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{2M_X^2 v_X^2}},$$

<sup>3</sup>Плотность материи в галактиках по порядку величины составляет  $10^5$  средней плотности материи во Вселенной. Это означает, что материя в галактике собралась из окружающей области с размером, в 50 раз превышающим размер галактики. Отсюда и следует приведённая оценка.

<sup>4</sup>Точнее, в кинетическом равновесии, при котором функции распределения по импульсам являются равновесными; при этом концентрации частиц не обязаны быть равновесными, т.е. химическое равновесие может не иметь места.

где  $\rho_X(\mathbf{x})/M_X$  и  $v_X^2$  — плотность числа и дисперсия скоростей частиц тёмной материи в гало. Как функция импульса  $f(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  принимает наибольшее значение при  $\mathbf{p} = 0$ ,

$$f^{max}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{\rho_X(\mathbf{x})}{M_X^4} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_X^3}.$$

Это наибольшее значение не может превысить максимально возможную плотность распределения фермионов, допустимую принципом Паули (см. (5.4)),

$$f_f = \frac{g_X}{(2\pi)^3}.$$

Полагая  $g_X = 2$ ,  $v_X \sim 10^{-3}$  и  $\rho(\mathbf{x}) \sim 0.5 \text{ ГэВ/см}^3$  (характерная плотность массы в гало Галактики), получим ограничение снизу на массу фермионов, составляющих всю тёмную материю в Галактике,

$$M_X \gtrsim 25 \text{ эВ}.$$

Более сильное ограничение следует из существования гало карликовых галактик. Здесь плотность энергии в центре может достигать  $\sim 15 \text{ ГэВ/см}^3$ , что даёт для массы фермионов, составляющих всю тёмную материю в карликовых галактиках, следующую оценку

$$M_X \gtrsim 750 \text{ эВ}.$$

Отметим, что формально ограничение *сверху* на массу частицы тёмной материи составляет около тысячи масс Солнца,

$$M_X \lesssim 10^3 M_\odot \sim 10^{61} \text{ ГэВ}.$$

Оно следует из стабильности звёздных скоплений в Галактике, которые разрушались бы наводимым гравитационным полем пролетающих мимо более тяжёлых “частиц” тёмной материи.

## 9.2 Закалка тяжёлых реликтовых частиц

Перейдём к обсуждению одного из наиболее привлекательных космологических сценариев генерации холодной тёмной материи. В следующих разделах этой Главы мы обсудим несколько конкретных примеров, но сначала проведём вычисление остаточной концентрации тяжёлых реликтовых частиц в общем виде.

Итак, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть имеются некоторые стабильные тяжёлые частицы  $X$ , находившиеся в термодинамическом равновесии с остальным веществом во Вселенной при достаточно высоких температурах. Пусть взаимодействия  $X$ -частиц с остальным веществом достаточно интенсивны, так что они продолжали находиться в термодинамическом равновесии и при температурах, несколько меньших их массы  $M_X$ . Это предположение, разумеется, нужно будет обосновать результатом вычисления температуры закалки. Предположим также, что во Вселенной нет асимметрии между частицами  $X$  и античастицами  $\bar{X}$ , то есть их плотности равны между собой:

$$n_X - n_{\bar{X}} = 0. \quad (9.5)$$

Это предположение весьма существенно: результаты этого раздела не применимы ко Вселенной, асимметричной по отношению к  $X$ -частицам.<sup>5</sup> Нашей задачей является вычисление современной плотности массы  $\Omega_X$  частиц  $X$  и  $\bar{X}$ .

При температуре  $T < M_X$  в термодинамическом равновесии имеем

$$n_X = n_{\bar{X}} = g_X \left( \frac{M_X T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-M_X/T}. \quad (9.6)$$

<sup>5</sup>Другая возможность, приводящая по-существу к тем же результатам, состоит в том, что  $X$  — истинно нейтральная частица (т.е.  $\bar{X}$  совпадает с  $X$ ), но  $X$ -частицы рождаются и уничтожаются только парами. В этом случае условие (9.5) выполняется автоматически.



Здесь мы учли соотношение (9.5), положив химический потенциал  $X$ -частиц равным нулю. Из-за стабильности частиц  $X$  и  $\bar{X}$  уменьшение их количества в сопутствующем объёме происходит за счёт реакции аннигиляции

$$X\bar{X} \rightarrow \text{лёгкие частицы}.$$

Пока скорость реакции аннигиляции выше темпа расширения Вселенной, концентрация частиц  $X$  даётся равновесной формулой (9.6). В какой-то момент плотность  $X$ -частиц падает так сильно, что аннигиляция прекращается. После этого число частиц в единице сопутствующего объема остаётся постоянным. Таким образом, для того чтобы найти остаточную плотность  $X$ -частиц, прежде всего надо определить температуру, при которой прекращает идти реакция аннигиляции.

Рассмотрим одну  $\bar{X}$ -частицу. Среднее время пробега этой частицы до аннигиляции с какой-нибудь частицей  $X$  равно

$$\tau = \frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{\text{анн}} v \rangle}, \quad (9.7)$$

где  $\sigma_{\text{анн}}$  — сечение аннигиляции, а  $v$  — относительная скорость частиц  $X$  и  $\bar{X}$ . Момент прекращения (“вымораживания”) реакции аннигиляции можно найти, приравняв время пробега  $\tau$  и время жизни Вселенной  $t \sim H^{-1}$ ,

$$\frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{\text{анн}} v \rangle} = H^{-1}(T_f), \quad (9.8)$$

где  $T_f$  обозначает температуру вымораживания реакции аннигиляции (“freeze-out temperature”).

Как правило,  $X\bar{X}$ -аннигиляция происходит в  $s$ -волне. В этом случае для нерелятивистских частиц зависимость сечения аннигиляции от относительной скорости определяется законом Бете:

$$\sigma_{\text{анн}} = \frac{\sigma_0}{v}, \quad (9.9)$$

где  $\sigma_0$  — не зависящая от относительной скорости постоянная, определяемая взаимодействиями, ответственными за аннигиляцию.

Кратко напомним как возникает закон (9.9) (более подробное обсуждение можно найти, например, в книге [24]). Он применим не только к реакции аннигиляции, но и к любой неупругой  $s$ -волновой реакции с участием нерелятивистских частиц, и основан на предположении, что взаимодействия, отвечающие за реакцию, являются короткодействующими и происходят в области некоторого характерного размера  $a$ . Как обычно, рассмотрим поток нерелятивистских частиц  $X$ , налетающий на покоящуюся частицу  $\bar{X}$ . Тогда вероятность реакции в единицу времени равна

$$P \sim Ca^3 |\psi(a)|^2,$$

где  $\psi(a)$  — волновая функция частиц  $X$  в области размера  $a$  вблизи частицы  $\bar{X}$ , а постоянная  $C$  определяется деталями взаимодействия. Чтобы получить сечение, нужно поделить вероятность  $P$  на абсолютную величину потока частиц  $X$ , налетающих на покоящуюся частицу  $\bar{X}$ ,

$$\mathbf{j} = \frac{i}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi).$$

Вдали от области взаимодействия волновую функцию можно взять в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$  с импульсом  $p$ ,

$$\psi = e^{ipz},$$

при этом абсолютное значение потока равно скорости  $v$ . Кроме того, в силу короткодействия, квадрат модуля волновой функции в зоне реакции  $|\psi(a)|^2$  равен квадрату модуля волновой функции на бесконечности, то есть для плоской волны имеем  $|\psi(a)|^2 = 1$ . В итоге для сечения получаем

$$\sigma = \frac{P}{|\mathbf{j}|} = \frac{Ca^3}{v} ,$$

в согласии с (9.9). Реакция аннигиляции тяжёлых частиц  $X$  неизбежно связана с большой передачей энергии  $\Delta E \sim M_X$ , поэтому характерный размер области, где происходит аннигиляция, мал,

$$a \sim \frac{1}{M_X} ,$$

и условие короткодействия выполнено.

Отметим, что для очень медленных частиц с ненулевыми противоположными электрическими зарядами значение волновой функции в зоне реакции может сильно отличаться от асимптотического значения на пространственной бесконечности за счёт дальнегодействующего кулоновского потенциала (подробности см. в книге [24]). Этот эффект существенен при энергиях частиц, меньших энергии связи “атома”, состоящего из  $X$  и  $\bar{X}$ ,  $E < \alpha^2 M_X$ . В примерах, рассмотренных ниже, эта особенность играть роли не будет.

Пользуясь законом Бете и подставляя равновесное значение (9.6) плотности числа частиц в уравнение (9.8), получаем следующее уравнение, определяющее температуру  $T_f$ ,

$$\frac{1}{g_X \sigma_0} \left( \frac{2\pi}{M_X T_f} \right)^{3/2} e^{\frac{M_X}{T_f}} = H^{-1}(T_f) \equiv \frac{M_{Pl}^*}{T_f^2} , \quad (9.10)$$

где мы считаем, что закалка  $X$ -частиц происходит на радиационно-доминированной стадии. В дальнейшем мы будем считать, что масса  $X$ -частицы мала по сравнению с  $M_{Pl}^*$ . Тогда правая часть уравнения (9.10) содержит большой фактор, и поэтому температура заковки заметно меньше  $M_X$ .

Взяв логарифм от обеих частей уравнения (9.10) приведём его к виду (6.18):

$$x = \ln(Ax^\alpha) ,$$

где

$$\begin{aligned} x &= \frac{M_X}{T_f} , \\ A &= \frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_{Pl}^* M_X \end{aligned} \quad (9.11)$$

и

$$\alpha = \frac{1}{2} .$$

Будем считать, что постоянную  $\sigma_0$  для сечения аннигиляции можно совсем грубо оценить из размерных соображений как

$$\sigma_0 \sim M_X^{-2} .$$

Этой оценки достаточно, чтобы понять, что для частиц с массами  $M_X \ll M_{Pl}^*$  выполнено условие логарифмического приближения,  $\ln A \gg 1$ . Тогда с логарифмической точностью получаем,

$$x = \ln A ,$$

то есть

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left( \frac{g_X M_X M_{Pl}^* \sigma_0}{(2\pi)^{3/2}} \right)} . \quad (9.12)$$

Видно, что температура закалки  $T_f$  слабо (логарифмически) зависит от сечения аннигиляции. Эта температура отличается от  $M_X$  малым фактором  $\left[ \ln \frac{g_X M_X M_{Pl}^* \sigma_0}{(2\pi)^{3/2}} \right]^{-1}$ , что оправдывает сделанное в самом начале предположение, что  $X$ -частицы отщепляются, будучи нерелятивистскими.

Плотность  $X$ -частиц в момент закалки  $n_X(t_f)$  можно определить<sup>6</sup> из уравнения (9.8)

$$n_X(t_f) = \frac{T_f^2}{M_{Pl}^* \sigma_0} . \quad (9.13)$$

После закалки плотность  $n_X$  меняется лишь за счёт расширения Вселенной и в настоящий момент равна

$$n_X(t_0) = \left( \frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right)^3 n_X(t_f) . \quad (9.14)$$

Пользуясь законом сохранения энтропии в сопутствующем объёме (см. уравнение (5.36)) можно переписать (9.14) в следующем виде:

$$n_X(t_0) = \left( \frac{s_0}{s(t_f)} \right) n_X(t_f) , \quad (9.15)$$

где  $s(t_f)$  и  $s_0$  — плотности энтропии на момент закалки и в настоящее время, при этом современная плотность энтропии равна (см. (5.40)),

$$s_0 = 2 \cdot \frac{4\pi^2}{90} (T_\gamma^3 + 3 \cdot \frac{7}{8} T_\nu^3) = 2.8 \cdot 10^3 \text{см}^{-3} . \quad (9.16)$$

Следовательно, современная плотность числа  $X$ -частиц даётся соотношением

$$n_X(t_0) = \frac{s_0 T_f^2}{s(t_f) M_{Pl}^* \sigma_0} = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} , \quad (9.17)$$

где мы воспользовались тем, что

$$M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66 g_*^{1/2}} , \quad \text{и} \quad s(t_f) = g_*(t_f) \cdot \frac{4\pi^2}{90} T_f^3 .$$

Наконец, пользуясь выражением (9.12) для температуры закалки, получаем следующее выражение для современной относительной плотности массы частиц  $X$  и  $\bar{X}$ :

$$\Omega_X = 2 \frac{M_X n_X(t_0)}{\rho_c} = 7.6 \frac{s_0 \ln \left( \frac{g_X M_{Pl}^* M_X \sigma_0}{(2\pi)^{3/2}} \right)}{\rho_c \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} . \quad (9.18)$$

Подставляя численные значения  $s_0$ ,  $\rho_c$  и  $M_{Pl}$ , имеем окончательно

$$\Omega_X = 3 \cdot 10^{-10} \left( \frac{\Gamma \text{ЭВ}^{-2}}{\sigma_0} \right) \frac{1}{\sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left( \frac{g_X M_{Pl}^* M_X \sigma_0}{(2\pi)^{3/2}} \right) \cdot \frac{1}{2h^2} . \quad (9.19)$$

Видно, что параметр, от которого  $\Omega_X$  зависит наиболее существенным образом — это сечение аннигиляции  $\sigma_0$ . Зависимость от массы частицы лишь логарифмическая,

---

<sup>6</sup>Подчеркнём, что подстановка температуры (9.12) в выражение (9.6) для плотности привела бы к большой погрешности, поскольку температура входит экспоненциально в (9.6), а выражение (9.12) имеет лишь логарифмическую точность.

а эффективное число степеней свободы  $g_*$  слабо меняется на протяжении большей части расширения Вселенной.

Отметим, что в этом разделе мы обсуждаем условия нарушения *химического* равновесия в космической плазме. Вообще говоря, представляет интерес и вопрос о кинетическом равновесии, т.е. вопрос о том, являются ли равновесными функции распределения  $X$ -частиц по импульсам. Кинетическое равновесие имеет место благодаря рассеянию  $X$ -частиц на обычных частицах, поэтому время между столкновениями не зависит от концентрации  $X$ -частиц и является коротким по сравнению со временем пробега до аннигиляции (9.7). Это означает, что кинетическое равновесие поддерживается гораздо дольше, чем химическое, т.е. оно нарушается при температуре  $T_{kin} \ll T_f$ . Например, если  $X$ -частицы участвуют в слабых взаимодействиях, то сечение их упругого рассеяния, скажем, на электронах при энергии электронов  $E \ll 100$  ГэВ по размерности оценивается величиной

$$\sigma_{el} \sim G_F^2 E^2 . \quad (9.20)$$

Время свободного пробега  $X$ -частиц равно по порядку величины  $\tau_{el} \sim (n_e \cdot \sigma_{el} \cdot v)^{-1}$ , где  $n_e$  — концентрация электронов, а  $v$  — относительная скорость  $X$ -частиц и электронов,  $v \simeq 1$  при  $T \gg 1$  МэВ. Для грубой оценки температуры нарушения кинетического равновесия приравняем  $\tau_{el}$  времени жизни Вселенной  $H^{-1}(T)$  и получим (соответствующая выкладка повторяет сделанную в разделе 7.1)  $T_{kin} \sim 1$  МэВ. В действительности эта оценка — довольно грубая, но она показывает, что кинетическое равновесие нарушается для  $X$ -частиц весьма поздно.

▷ *Задача 1. Уточнить приведённую оценку для  $T_{kin}$  в случае, когда сечение упругого рассеяния  $X$ -частиц на электронах имеет вид (9.20). Указание: воспользоваться соображениями, приведёнными в начале раздела 6.3.*

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров применения формулы (9.19).

### 9.3 Слабовзаимодействующие массивные частицы (WIMPs)

В качестве основного применения формулы (9.19) обсудим возможность того, что неизвестные пока стабильные тяжёлые частицы составляют холодную тёмную материю. Формула (9.19) тогда позволяет оценить параметры (в первую очередь сечение аннигиляции) этих частиц. Плотность холодной тёмной материи в современной Вселенной составляет

$$\Omega_{CDM} \approx 0.2 \div 0.3 .$$

где мы используем консервативный диапазон значений (в действительности, как мы неоднократно упоминали,  $\Omega_{CDM}$  известна сегодня с лучшей точностью). Чтобы получить оценку для сечения аннигиляции, можно положить из размерных соображений  $\sigma_0 \sim 1/M_X^2$  в выражении под логарифмом в формуле (9.19). Взяв для оценки значения  $M_X = 100$  ГэВ и  $g_* = 100$ , получим для логарифмического множителя в (9.19)

$$\ln \frac{g_X M_{Pl}^* M_X \sigma_0}{(2\pi)^{3/2}} \sim \ln \frac{g_X M_{Pl}^*}{(2\pi)^{3/2} M_X} \sim 30 . \quad (9.21)$$

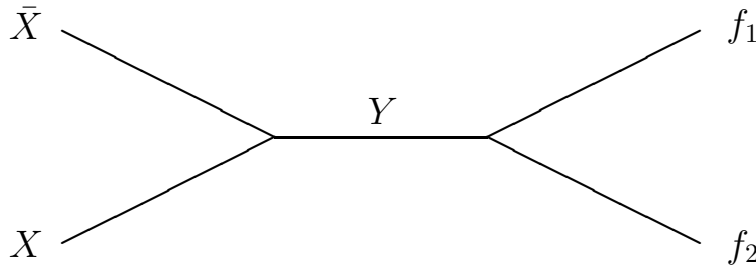


Рис. 9.1: Аннигиляция гипотетических стабильных частиц  $X$  в частицы Стандартной модели  $f_1$  и  $f_2$ .

Эта оценка справедлива в широком диапазоне значений массы  $M_X$  и сечения  $\sigma_0$  из-за того, что логарифм является медленно меняющейся функцией. Корень из эффективного числа степеней свободы  $\sqrt{g_*(t_f)}$ , также меняется незначительно: при  $T \gtrsim 100$  ГэВ он принимает значение  $\sqrt{g_*(T)} \sim 10$ , а при  $T \sim 100$  МэВ имеем  $\sqrt{g_*(T)} \sim 3$  (см. Приложение В). Таким образом, из выражения (9.19) получаем следующую оценку для сечения аннигиляции частиц, составляющих холодную тёмную материю:

$$\sigma_0 \sim \frac{3 \cdot 10^{-10} \cdot 30 \text{ ГэВ}^{-2}}{(3 \div 10) \cdot (0.2 \div 0.3)} = (0.3 - 1.5) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (9.22)$$

Замечательно, что эта величина сравнима с сечениями, характерными для слабых взаимодействий при энергиях порядка 100 ГэВ,  $\sigma_w \sim \alpha_w^2/M_W^2 \sim 10^{-7} \text{ ГэВ}^{-2}$ .

Из результата (9.22) следует сразу несколько важных выводов. Во-первых, его можно рассматривать как космологическое ограничение снизу на сечение аннигиляции гипотетических стабильных частиц, которые могут появляться в расширениях Стандартной модели физики частиц. Действительно, если сечение аннигиляции меньше, чем приведённое в оценке (9.22), то плотность массы таких частиц в настоящее время превышает наблюдаемое значение плотности энергии нерелятивистского вещества во Вселенной. Основным предположением, заложенным в это ограничение, является допущение, что  $X$ -частицы когда-либо находились в термодинамическом равновесии. Заметим, что для сечения аннигиляции частиц массы  $M_X$  можно дать ограничение сверху

$$\sigma_0 \lesssim \frac{4\pi}{M_X^2}. \quad (9.23)$$

В случае, когда работает теория возмущений, это ограничение связано с тем, что аннигиляция описывается диаграммами типа изображённой на рис. 9.1. Предполагается, что виртуальная частица  $Y$ , изображённая горизонтальной линией, для медленных  $X$ -частиц имеет энергию  $E = 2E_X = 2M_X$  в системе центра масс. Пропагатор этой частицы приводит к появлению размерного множителя  $1/M_X^2$  в выражении для сечения.<sup>7</sup> Кроме того, в общем случае есть дополнительное подавление сечения, связанное с малостью константы взаимодействия.

Ограничение (9.23) может не выполняться в теориях с сильной связью. Грубо говоря это означает, что  $X$ -частица является “рыхлым” объектом, состоящим из элементарных частиц (примером такой частицы является протон). Трудно, однако,

<sup>7</sup>Если  $M_Y > M_X$ , то пропагатор  $Y$ -частицы подавлен как  $M_Y^{-2}$ , что только усиливает ограничение (9.23).

придумать пример ситуации, когда сечение аннигиляции на много порядков превышает ограничение (9.23).

Со сделанной оговоркой можно использовать выражения (9.22) и (9.23) для получения космологического ограничения сверху на массу стабильных частиц

$$M_X \lesssim 100 \text{ ТэВ} . \quad (9.24)$$

Ещё раз подчеркнем, что это ограничение получается в предположении о том, что  $X$ -частицы находились в термодинамическом равновесии в ранней Вселенной. Если взаимодействия  $X$ -частиц не слишком слабы, для этого достаточно, чтобы в ранней Вселенной реализовывались температуры порядка  $(1/30)M_X$ , см. (9.12) и (9.21).

▷ *Задача 2.* Добавим к составу полей Стандартной модели новое вещественное скалярное поле  $X$ , взаимодействующее только с хиггсовским дублетом  $H$ . К лагранжиану Стандартной модели добавим выражение

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu X \partial^\mu X - \frac{\kappa}{2}H^\dagger H X^2 - \frac{\nu}{4}X^4 .$$

Дискретная симметрия ( $X \rightarrow -X$ ) обеспечивает стабильность скаляра  $X$ , который будет кандидатом на роль тёмной материи.

Пусть в получившейся теории вакуумное среднее поля  $X$  равно нулю. Рассматривая массу хиггсовского бозона  $m_h$  в феноменологически приемлемом интервале  $115 \text{ ГэВ} < m_h \lesssim 300 \text{ ГэВ}$ , найти область значений массы скаляра  $X$ , в которой реликтовые  $X$ -частицы полностью сформируют тёмную материю во Вселенной.

Отметим, что в последнее время активно обсуждается возможность того, что часть тёмной материи (или даже вся она) состоит из более тяжёлых частиц. Чтобы такой сценарий работал, необходимо, чтобы эти частицы никогда не были в термодинамическом равновесии и рождались в ранней Вселенной нетепловым образом (например, за счет эффекта рождения частиц зависящим от времени гравитационным полем). Возможные механизмы рождения сверхтяжёлых частиц в ранней Вселенной кратко рассмотрены в разделе 9.7.2.

Оценка (9.22) представляет основной интерес с иной точки зрения. В предположении, что изложенный здесь простой механизм ответственен за образование холодной тёмной материи, она прямо указывает на энергетический масштаб взаимодействий гипотетических  $X$ -частиц,  $\sigma_0^{-1/2} \sim 10 \text{ ТэВ}$ . В действительности этот масштаб несколько ниже, поскольку в реалистических теориях со слабой связью сечение аннигиляции содержит подавление малой константой связи, которую мы обозначим  $\alpha_X$ . Полагая, что энергетический масштаб взаимодействий  $X$ -частиц не превышает по порядку величины их массу, имеем

$$\sigma_0 \sim \frac{\alpha_X^2}{M_X^2} . \quad (9.25)$$

Взяв в качестве примера  $\alpha_X \sim 1/30$  (константа связи  $W$ -бозона в Стандартной модели), получим из (9.12) и (9.22)

$$T_f \simeq M_X/20 , \quad (9.26)$$

$$M_X \sim 200 - 600 \text{ ГэВ} . \quad (9.27)$$

Такая оценка означает, что имеются реальные шансы обнаружить частицы, составляющие холодную тёмную материю, на новом поколении ускорителей. Стоит отметить, что наша оценка (9.27) для массы является весьма грубой. Аккуратные вычисления в конкретных моделях показывают, что масса частиц тёмной материи может оказаться даже ниже 100 ГэВ, что ещё более перспективно с точки зрения обнаружения этих частиц на ускорителях. Отметим ещё, что эта оценка особенно интересна в свете того, что стабильные частицы с массой в области 100 ГэВ — 1 ТэВ, участвующие в слабых взаимодействиях, предсказываются в одном из самых перспективных расширений Стандартной модели — теориях с низкоэнергетической суперсимметрией, см. раздел 9.5.

Таким образом, имеются основания ожидать, что новые стабильные частицы, составляющие холодную тёмную материю, будут в обозримое время экспериментально обнаружены. Экспериментальное исследование их свойств, вычисление на этой основе их концентрации в современной Вселенной и сравнение её с наблюдательными данными позволят тогда подтвердить картину эволюции Вселенной при температурах порядка десятков ГэВ. Для сравнения, как мы уже указывали во Введении, самая ранняя стадия эволюции горячей Вселенной, для которой сегодня возможно прямое сопоставление теории с наблюдениями — это стадия первичного нуклеосинтеза, происходившего при температурах порядка МэВ и ниже (см. Главу 8). Мы заключаем, что исследование частиц тёмной материи позволит продвинуться на четыре порядка по температуре (на восемь порядков по времени) к моменту Большого взрыва.

Поиск частиц тёмной материи интенсивно проводится, однако пока без положительных результатов. Прямой поиск слабовзаимодействующих реликтовых тяжёлых частиц (WIMPs — weakly interacting massive particles) ведётся в экспериментах, нацеленных на регистрацию энерговыделения в детекторе, вызванного возможным рассеянием тяжёлой реликтовой частицы на ядре вещества детектора. Тёмная материя, как и обычное вещество, имеет повышенную плотность в галактиках, при этом ожидается, что в окрестности Земли плотность массы тёмной материи сравнима с плотностью обычного вещества и составляет

$$\rho_{CDM} \simeq 0.3 \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3}.$$

Принимая во внимание, что ожидаемая скорость частиц тёмной материи в Галактике  $v_x \sim 10^{-3}$  (скорость орбитального вращения вокруг центра Галактики), для энергии, переданной ядру массы  $M_A$ , будем иметь оценку

$$\Delta E \lesssim \frac{1}{2M_A} \cdot \left( \frac{v_x M_A M_X}{M_A + M_X} \right)^2 \simeq 50 \cdot \left( \left( \frac{\min(M_A, M_X)}{100 \text{ ГэВ}} \right)^2 \frac{100 \text{ ГэВ}}{M_A} \right) \text{ кэВ}.$$

Видно, что передача энергии составляет десятки кэВ, т.е. весьма мала. Тем не менее, в экспериментах ведётся поиск энерговыделений такой величины. Они должны происходить с частотой

$$\nu \simeq v_x n_x \cdot N_A \cdot \sigma_{NX},$$

определяемой сечением упругого рассеяния реликтовой частицы на ядре  $\sigma_{AX}$ , скоростью  $v_x$  и локальной плотностью числа частиц тёмной материи  $n_x = \rho_{CDM}/M_X$ , а также количеством ядер в детекторе  $N_A$ . В качестве примера, при сечении упругого





- ▷ *Задача 3. Найти плотность реликтовых массивных нейтрино четвёртого гипотетического поколения Стандартной модели, считая основным каналом аннигиляции этих нейтрино  $s$ -канальную аннигиляцию в виртуальный  $Z$ -бозон. Полагать, что масса новых нейтрино удовлетворяет неравенству  $m_\nu > M_Z/2$ . Оценить сечение их рассеяния на ядрах и получить ограничение на их массу из данных, приведённых на рис. 9.2. Указание: считать, что концентрация новых нейтрино в галактиках усилена по сравнению с их средней концентрацией во Вселенной фактором  $10^5$ , как для обычного вещества.*

Помимо прямого поиска частиц тёмной материи, ведутся эксперименты по их косвенному обнаружению. Это, в частности, эксперименты, направленные на поиск продуктов аннигиляции этих частиц, происходящей в современной Галактике.

Наиболее перспективными для поиска аннигиляции тёмной материи в гало Галактики представляются монохроматические фотоны, появляющиеся в процессах  $2 \rightarrow 2$ ,

$$XX \rightarrow \gamma\gamma, \quad XX \rightarrow Z\gamma,$$

а также рождающиеся при аннигиляции античастицы, такие как позитроны и антипротоны. Для фотонов соответствующий сигнал должен быть усилен в некоторых направлениях (например, из центра Галактики, из центров карликовых галактик и галактики Андромеда и т.д.), где ожидается повышенная концентрация частиц тёмной материи.

Тяжёлые реликтовые частицы также могут скапливаться в астрофизических объектах (для такой возможности существенно, чтобы частицы тёмной материи могли хоть и редко, но всё же рассеиваться на обычных частицах, чтобы уменьшить свой импульс и под действием гравитационного притяжения остаться внутри астрофизического объекта). С течением времени концентрация частиц тёмной материи внутри астрофизических объектов будет повышаться. В результате интенсивность аннигиляции частиц тёмной материи в обычные частицы увеличится (число актов аннигиляции в единичном объёме в единицу времени пропорционально квадрату плотности аннигилирующих частиц). Если среди аннигиляционных каналов есть аннигиляция в энергичные нейтрино, например, в процессе

$$XX \rightarrow \bar{\nu}\nu,$$

то рождённые нейтрино могут без потери энергии покинуть источник, и поток таких нейтрино может быть зарегистрирован на специальных детекторах — нейтринных телескопах. В качестве астрофизических объектов, накапливающих частицы тёмной материи, наиболее перспективными для наблюдения являются Земля и Солнце; поиск потоков монохроматичных нейтрино высоких энергий из центра Земли и Солнца интенсивно ведётся на подземных, глубоководных и подлёдных нейтринных телескопах. Непрямые поиски частиц тёмной материи также пока не увенчались успехом.

- ▷ *Задача 4. Предположим, что в природе имеются стабильные электрически заряженные  $X^\pm$ -частицы с массой, много большей массы протона. Будем считать, что все барионы в ранней Вселенной состоят из протонов и  $\alpha$ -частиц (ядер  ${}^4\text{He}$ ). Плотность числа  $\alpha$ -частиц по отношению к протонам равна 6%.*

- 1) Найдите энергию связи “атома”, состоящего из  $X^-$ -частицы и протона ( $\alpha$ -частицы).
- 2) Считая концентрацию  $X^-$ -частиц малой по сравнению с концентрацией барионов, найдите, в каком виде они преимущественно доживут до настоящего времени — в виде связанного состояния с  $\alpha$ -частицей, с протоном или в свободном состоянии.
- 3) Предположив, что в ранней Вселенной  $X^\pm$ -частицы находились в состоянии равновесия с частицами первичной плазмы, и асимметрия между  $X^-$ - и  $X^+$ -частицами равна  $\eta_X$ , найти плотность числа реликтовых  $X$ -частиц в зависимости от их массы  $M_X$  и величины асимметрии  $\eta_X$ .
- 4) Используя результаты, полученные в предыдущих пунктах задачи, найти ограничение на величину асимметрии  $\eta_X$ , исходя из того, что безрезультатные поиски тяжёлых аномальных изотопов (“дикий водород”), образованных гипотетическими  $X$ -частицами, дают ограничение не слабее чем  $\Omega_X < 10^{-6}$  на их долю в современной плотности энергии Вселенной для  $M_X < 20$  ТэВ.

## 9.4 Другие применения результатов раздела 9.2

Прежде чем переходить к обсуждению конкретных моделей, в которых имеются кандидаты на роль частиц тёмной материи, приведём два примера применения результатов раздела 9.2.

### 9.4.1 Остаточная плотность барионов в барион-симметричной Вселенной

Найдём плотность протонов, остающихся после аннигиляции протон-антипротонных пар в гипотетической ситуации, когда во Вселенной нет барионной асимметрии, т.е. плотности протонов и антипротонов равны друг другу<sup>10</sup>. Подставляя массу протона

$$m_p \approx 1 \text{ ГэВ}$$

и сечение аннигиляции протон-антипротонной пары, по порядку величины равное<sup>11</sup>

$$\sigma_0 \approx 100 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad (9.28)$$

в соотношение (9.12), получаем следующее значение температуры заалки

$$T_f \approx 20 \text{ МэВ}, \quad (9.29)$$

где при вычислении  $M_{Pl}^*$  мы учли, что при таких температурах

$$g_* = 2 + \frac{7}{8}(2 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = \frac{43}{4},$$

<sup>10</sup>Кроме протонов во Вселенной имелись также и нейтроны. Для наших целей в этом разделе отличие их массы и сечения аннигиляции от массы и сечения аннигиляции протонов несущественно. Поэтому мы будем говорить о протонах, имея в виду все барионы.

<sup>11</sup>Заметим, что сечение (9.28) на два порядка превышает ограничение (9.23). Это связано с тем, что протон является “рыхлым” объектом, состоящим из кварков и глюонов.

что соответствует вкладам фотонов, электрон-позитронных пар и трёх типов нейтрино. Из формулы (9.19) получаем следующее значение барионной плотности в барион-симметричной Вселенной

$$\Omega_B \approx 5 \cdot 10^{-11}.$$

Это примерно на девять порядков ниже реальной плотности барионов во Вселенной. Барионного вещества в нашей Вселенной сравнительно много только благодаря тому, что она является барион-асимметричной.

### 9.4.2 \*Тяжёлые нейтрино

В качестве ещё одного примера найдём космологическое ограничение на массу гипотетического тяжёлого нейтрино 4-го поколения, не взаимодействующего с лептонами через заряженные токи, но участвующего во взаимодействиях с нейтральными токами. Будем считать, что его масса невелика,  $m_\nu \ll M_{Z,W}$ . Анализ, приведённый в Главе 7, применим к случаю малой массы, когда  $T_f \gg m_\nu$ . В обратной ситуации, когда нейтрино аннигилирует будучи нерелятивистским, сечение аннигиляции по порядку величины равно

$$\sigma_0 \sim G_F^2 m_\nu^2 \quad (9.30)$$

и не зависит от температуры. Подставляя это сечение в формулу (9.19), получаем для плотности таких нейтрино следующую оценку

$$\Omega_\nu \approx 0.55 \left( \frac{3 \text{ ГэВ}}{m_\nu} \right)^2, \quad (9.31)$$

где под логарифмом мы положили  $m_\nu = 3 \text{ ГэВ}$  и эффективное число степеней свободы взяли равным

$$g_* = 2 \cdot (1 + 8) + \frac{7}{8} \cdot (2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3) = 61 \frac{3}{4},$$

что соответствует учёту фотона, глюонов, двух типов заряженных лептонов и нейтрино и трёх типов кварков<sup>12</sup>  $u$ ,  $d$  и  $s$ .

Таким образом мы видим, что существование тяжёлых стабильных нейтрино с массой  $m_\nu \lesssim 3 \text{ ГэВ}$  противоречит космологическим данным. В течение долгого времени это было самым сильным ограничением на массу тяжёлого нейтрино. Сегодня из ускорительных экспериментов запрещена вся область масс  $m_\nu < M_Z/2$ . Этот результат следует из измерения ширины распада  $Z$ -бозона в недетектируемые частицы.

▷ *Задача 5. Проверьте, что для нейтрино с массой  $m_\nu = 3 \text{ ГэВ}$  действительно выполнено предположение, что отщепление происходит в нерелятивистском режиме,  $T_f < m_\nu$ . Найдите массу нейтрино, при которой это предположение перестаёт выполняться. Покажите, тем не менее, что космологически исключена вся область масс стабильных нейтрино*

$$20 \text{ эВ} \lesssim m_\nu \lesssim 3 \text{ ГэВ},$$

где нижнее ограничение было получено в Главе 7, формула (7.10).

<sup>12</sup>При  $m_\nu > 20 \text{ ГэВ}$  температура закалки превышает  $1 \text{ ГэВ}$ , и вклад в  $g_*$  дают  $\tau$ -лептон и более тяжёлые кварки. Это, однако, не сильно меняет оценку (9.31).

## 9.5 Новые частицы — кандидаты на роль тёмной материи

В следующих разделах мы рассмотрим некоторые популярные модели физики частиц, в которых имеются кандидаты на роль частиц тёмной материи. В Стандартной модели таких кандидатов нет, поэтому космологические данные о тёмной материи свидетельствуют о необходимости выхода за рамки Стандартной модели. Это весьма важное для физики частиц утверждение.

С точки зрения прямой экспериментальной регистрации частиц тёмной материи всех кандидатов можно расклассифицировать, используя всего два параметра — массу частицы  $M_\chi$  и сечение её рассеяния<sup>13</sup> на ядрах  $\sigma_{\text{AX}}$ . Для наиболее популярных кандидатов результат представлен на рис. 9.3. Из этой диаграммы видно, насколько сильно отличаются между собой кандидаты. Поиск кандидатов, занимающих области в разных частях этой диаграммы, проводится, как правило, с использованием разных методов детектирования. В ряде случаев, особенно для очень тяжёлых и для очень слабо взаимодействующих частиц (wimpzilla и гравитино, соответственно) реалистичный способ детектирования реликтовых частиц пока вообще неизвестен.

## 9.6 \*Стабильные частицы в суперсимметричных теориях

Суперсимметрия — это симметрия между бозонами и фермионами. В (3+1)-мерных простейших (так называемых  $N = 1$ ) суперсимметричных моделях для всякой частицы имеется *суперпартнёр* — частица с другой статистикой (и спином, отличающимся на  $1/2$ ), но теми же самыми взаимодействиями. Иными словами, суперпартнёры имеют те же квантовые числа по отношению к калибровочной группе теории, что и сами частицы, а константы других взаимодействий (например, юкавских) жёстко связаны. При этом суперпартнёром векторной частицы (например, глюона) является частица со спином  $1/2$  (глюино), а суперпартнёром фермиона со спином  $1/2$  (например, кварка) служит скаляр (скварк). Более точно, число спиновых степеней свободы для частицы и суперпартнёра должно совпадать; так, кварку (две спиновые степени свободы) соответствуют две скалярные частицы (по одной спиновой степени свободы на каждую).

Поясним сделанные утверждения на примере суперсимметричного обобщения квантовой электродинамики — теории массивного дираковского фермиона  $\psi$  (электрон), взаимодействующего с абелевым калибровочным полем  $A_\mu$  (фотон). Лагранжиан КЭД имеет вид

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi + m\bar{\psi}\psi.$$

Суперсимметризация электродинамики приводит к появлению в теории четырёх скалярных степеней свободы (по числу фермионных степеней свободы в электродинамике: два для электрона и два для позитрона) — двух комплексных скалярных полей  $\phi_+$  и  $\phi_-$ , несущих относительно калибровочной группы  $U(1)$  заряды  $+1$  и  $-1$ , соответственно. Очевидный вклад в лагранжиан для них имеет вид

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{D}_\mu\phi_+^*\mathcal{D}^\mu\phi_+ + m_+^2\phi_+^*\phi_+ + \mathcal{D}_\mu\phi_-^*\mathcal{D}^\mu\phi_- + m_-^2\phi_-^*\phi_- , \\ \mathcal{D}_\mu\phi_\pm = (\partial_\mu \mp ieA_\mu)\phi_\pm ,$$

<sup>13</sup>Для аксиона и аксино — сечение конверсии в другие частицы, поскольку для этих кандидатов оно существенно больше упругого сечения.

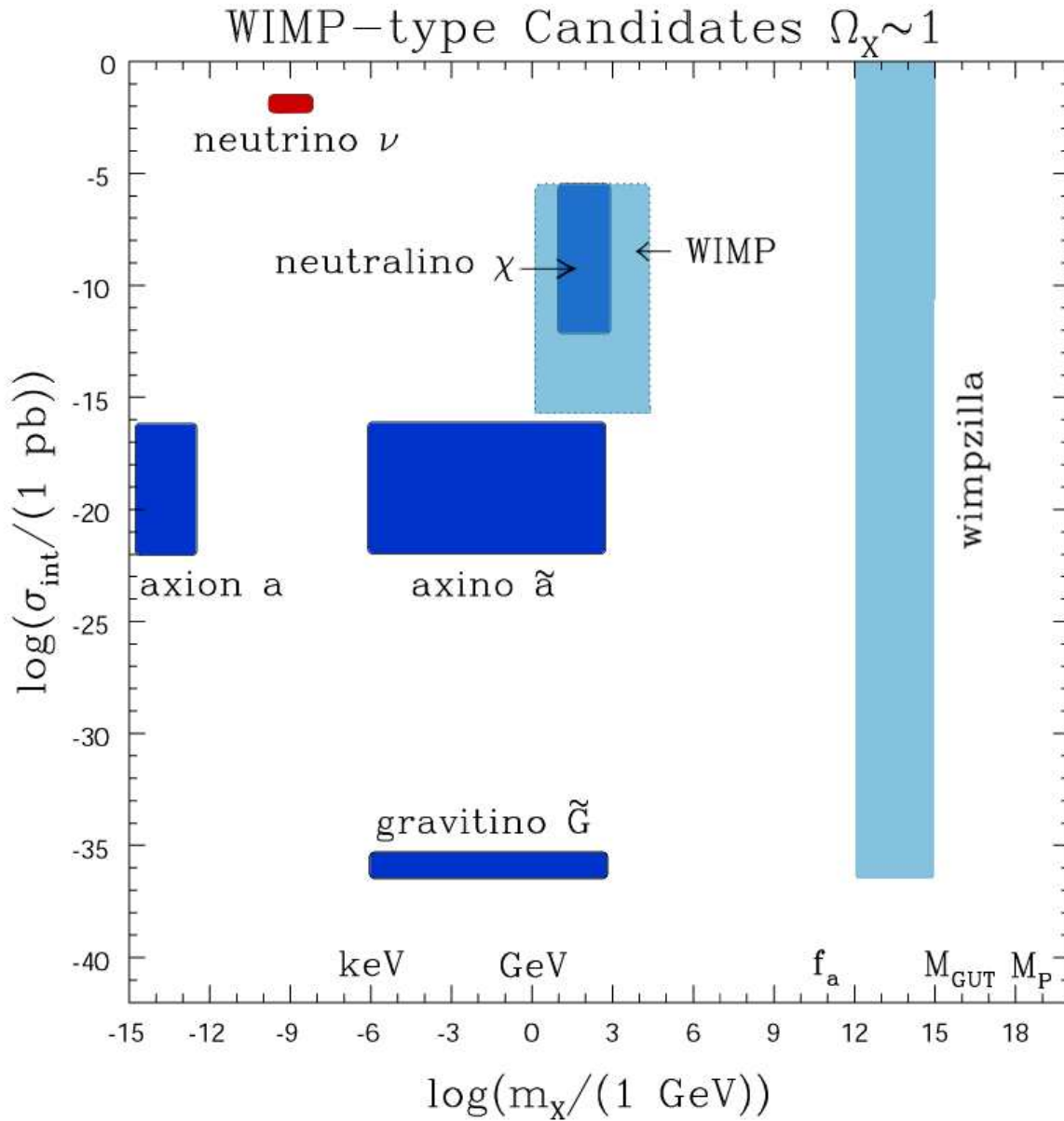


Рис. 9.3: Области, занимаемые различными кандидатами на роль частиц тёмной материи [26]. Пространство параметров образуют масса частицы  $M_X$  и сечение её упругого рассеяния (конверсии для аксиона и аксино) на ядрах  $\sigma_{AX}$ .

где  $m_+ = m_- = m$  — массы скалярных полей, в случае ненарушенной суперсимметрии совпадающие с массой электрона (для случая спонтанно нарушенной суперсимметрии массы партнёров и суперпартнёров могут отличаться — см. ниже). Кроме того, появляется электрически нейтральный безмассовый майорановский фермион  $\lambda_L$  (две степени свободы) — фотино, суперпартнёр фотона, свободный лагранжиан которого имеет вид

$$\mathcal{L}_2 = i\bar{\lambda}_L \gamma^\mu \partial_\mu \lambda_L .$$

Помимо обычных калибровочных взаимодействий, имеющих место в  $U(1)$ -калибровочной теории с фермионами и скалярами, в модели есть их суперсимметричные “дополнения” — калибровочно-инвариантное юкавское взаимодействие между фотино, электроном и скалярами,

$$\mathcal{L}_3 = i\sqrt{2}e\bar{\lambda}_L \psi \cdot \phi_- - i\sqrt{2}e\bar{\psi} \lambda_L \cdot \phi_+ + h.c. ,$$

и самодействие в скалярном секторе,

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{e^2}{2} (\phi_+^* \phi_+ - \phi_-^* \phi_-)^2 .$$

Величины констант связи “дополнительных” взаимодействий однозначно фиксированы величиной калибровочной константы связи. Жёсткая связь между константами связи для разных секторов модели — общее свойство лагранжианов суперсимметричных теорий.

Аналогичным образом выглядят  $N = 1$  суперсимметричные обобщения и других  $(3 + 1)$ -мерных моделей. В частности, суперсимметризация обычного юкавского взаимодействия приводит к появлению скалярного самодействия и наоборот.

В моделях с ненарушенной суперсимметрией массы частиц и их суперпартнёров совпадают. Эта особенность сразу делает такие суперсимметричные обобщения Стандартной модели феноменологически неприемлемыми: ни один суперпартнёр частиц Стандартной модели не был до сих пор обнаружен. В феноменологически приемлемых обобщениях Стандартной модели суперсимметрия должна быть спонтанно нарушена. В этом случае спектр масс будет существенно другим: массы частиц и их суперпартнёров не будут совпадать. Многочисленные и пока безрезультатные поиски суперпартнёров дают на их массы ограничения снизу; грубо говоря,  $M_S \gtrsim 100$  ГэВ. Отметим, что для моделей со спонтанным нарушением суперсимметрии теоретические соображения<sup>14</sup> указывают на диапазон масс суперпартнёров 30 ГэВ – 3 ТэВ как на наиболее предпочтительный. Поиск суперпартнёров является одной из основных задач экспериментов в области физики высоких энергий. В частности, большие надежды возлагаются на поиски суперпартнёров на протон-протонном коллайдере LHC в CERN с энергией 14 ТэВ в системе центра масс.

Суперсимметричные обобщения Стандартной модели в общем случае содержат взаимодействия, приводящие к процессам с нарушением барионного и/или лептонных чисел. Многолетние поиски такого рода процессов (в частности, поиски распада протона) не принесли пока положительных результатов, однако существенно сузили класс феноменологически приемлемых теорий, обобщающих Стандартную модель физики частиц. В частности, в феноменологически приемлемых суперсимметричных обобщениях константы взаимодействий, приводящих к процессам с нарушением барионного и лептонных чисел, обязаны быть нулевыми или крайне малыми. Поэтому наиболее реалистичными представляются суперсимметричные модели с так называемой  $R$ -чётностью, которая, среди прочего, запрещает появление при низких энергиях взаимодействий, нарушающих барионное или лептонные числа.

$R$ -чётность — дополнительная дискретная симметрия, которая делит все частицы в модели на два класса: чётные и нечётные (положительная и отрицательная  $R$ -чётность). Все известные частицы Стандартной модели, а также хиггсовские бозоны, считаются чётными, а их суперпартнёры — нечётными. Чётность состояния с несколькими частицами равна произведению чётностей всех частиц, поэтому состояние с одним суперпартнёром и любым количеством обычных частиц имеет отрицательную  $R$ -чётность, а состояние с двумя суперпартнёрами — положительную. Предполагается, что все взаимодействия сохраняют  $R$ -чётность. Как результат, в столкновении обычных частиц суперпартнёры рождаются парами (конечно, пара не обязательно должна состоять из частицы и её же античастицы). Отсюда же следует, что в суперсимметричных обобщениях Стандартной модели с сохраняющейся  $R$ -чётностью существует по крайней мере одна стабильная частица — это легчайшая среди  $R$ -нечётных частиц. Именно она — легчайшая среди суперпартнёров частиц Стандартной модели (LSP — the lightest superpartner) — и является кандидатом на

<sup>14</sup> Среди таких соображений наиболее важные — сокращение квадратичных расходимостей при вычислении квантовых поправок в суперсимметричных моделях, и, как следствие, ослабление проблемы иерархии калибровочных масштабов ( $M_W \ll M_{Pl}$ ), а также объединение калибровочных констант связи при высоких энергиях.

роль тёмной материи. Поскольку электрически заряженные стабильные частицы с массой 30 ГэВ – 20 ТэВ не могут составлять тёмную материю (см. задачу 4), то потенциально интересными кандидатами в суперсимметричных моделях являются нейтралино, снеитрино и гравитино<sup>15</sup>. Рассмотрим их по порядку.

### 9.6.1 Нейтралино

Наиболее популярным кандидатом на роль частиц тёмной материи являются нейтралино: большинство экспериментов по поиску тёмной материи так или иначе ориентированы именно на поиск слабо взаимодействующих тяжёлых частиц, WIMПов, каковыми и являются, в частности, нейтралино. Причин такой популярности три. Во-первых, нейтралино предсказываются в суперсимметричном обобщении Стандартной модели физики частиц. Во-вторых, в теоретически привлекательных моделях массы нейтралино и их константы связи автоматически лежат в той области, которую мы рассматривали в разделе 9.3, т.е. плотность массы реликтовых нейтралино, находившихся в равновесии в ранней Вселенной, без точной подстройки параметров может составлять необходимую величину  $\rho_{CDM} \sim 0.2\rho_c$ . Наконец, нейтралино принимают участие в слабых взаимодействиях, что даёт надежду обнаружить их в экспериментах по прямому и косвенному поиску частиц тёмной материи: сечения упругого рассеяния нейтралино на частицах Стандартной модели и аннигиляции нейтралино хоть и малы, но находятся в экспериментально доступной области (см. рис. 9.3).

Нейтралино — общее название для электрически нейтральных фермионов, являющихся линейными комбинациями суперпартнёров  $Z$ -бозона, фотона и нейтральных хиггсовских бозонов в суперсимметричных расширениях Стандартной модели. В минимальном суперсимметричном расширении нейтралино — четыре майорановских фермиона. Дело в том, что суперсимметричные расширения Стандартной модели с необходимостью содержат не менее двух хиггсовских дублетов, поэтому суперпартнёров хиггсовских бозонов — хиггсино — как минимум два. Ещё два нейтральных фермиона — это фотино и суперпартнёр  $Z$ -бозона, которые объединяют термином *калибрино* (*gaugino* в англоязычной литературе).

Нейтралино участвуют в калибровочных взаимодействиях Стандартной модели наравне со своими партнёрами. Поэтому если в ранней Вселенной реализовывались температуры выше энергетического масштаба масс суперпартнёров,  $T \gtrsim M_S$ , то нейтралино, наряду с другими суперпартнёрами частиц Стандартной модели, находились в тепловом равновесии в первичной плазме.

Если легчайшее из массовых состояний нейтралино является легчайшим и среди всех суперпартнёров, т.е. является LSP, то такие нейтралино образуют по крайней мере одну из компонент тёмной материи. Эффективно взаимодействуя в первичной плазме, нейтралино с массой  $M_N \sim 30 \text{ ГэВ} - 3 \text{ ТэВ}$  хорошо подходят под рассмотренный в разделе 9.2 общий случай холодной тёмной материи. Вклад нейтралино в современную плотность энергии Вселенной можно грубо оценить, воспользовавшись формулой (9.19), где следует положить  $g_X = 2$ ,  $g_*(t_f) \simeq 100$ , а для сечения анниги-

<sup>15</sup>Мы рассматриваем здесь только минимальное суперсимметричное расширение Стандартной модели, оставляя без обсуждения такие кандидаты на роль тёмной материи, как синглино, аксино и др.

ляции воспользовавшись оценкой (9.25). В результате будем иметь

$$T_f \simeq \frac{M_N}{20}, \quad (9.32)$$

$$\Omega_N = 3 \cdot 10^{-4} \frac{10^{-3}}{\alpha_W^2} \left( \frac{M_N}{100 \text{ ГэВ}} \right)^2 \ln \left( 10^{12} \cdot \frac{100 \text{ ГэВ}}{M_N} \right) \quad (9.33)$$

$$\approx 0.8 \cdot 10^{-2} \cdot \left( \frac{M_N}{100 \text{ ГэВ}} \right)^2, \quad (9.34)$$

где  $\alpha_W$  — калибровочная константа слабого взаимодействия. Для наиболее интересного диапазона масс нейтрино

$$100 \text{ ГэВ} < M_N < 3 \text{ ТэВ}$$

будем иметь

$$0.01 \lesssim \Omega_N \lesssim 10,$$

т.е. плотность энергии реликтовых нейтрино достаточно велика, чтобы полностью объяснить тёмную материю.

В этом разделе мы уточним оценку (9.34), рассматривая случай, когда нейтрино является единственной существенной новой частицей, присутствующей в космической плазме при интересных температурах. Перед этим, однако, отметим, что в общем случае точная оценка реликтовой плотности нейтрино требует аккуратного описания многочисленных процессов, происходящих в эпоху заковки нейтрино. Поскольку при суперсимметризации Стандартной модели каждая частица получает своего суперпартнёра, то при температурах выше масс суперпартнёров число релятивистских степеней свободы в плазме удваивается по сравнению с обычным случаем Стандартной модели; добавляется около сотни дополнительных степеней свободы. Поскольку суперпартнёры участвуют в тех же калибровочных и юкавских взаимодействиях, что и обычные частицы, и массы их в пределах порядка величины одинаковы между собой и в этом смысле совпадают с массой LSP, то процесс заковки LSP сопровождается одновременным замораживанием большого количества реакций рассеяния суперпартнёров, их аннигиляции и процессов распада суперпартнёров, чьи времена жизни  $\tau_s$  обычно существенно меньше характерного хаббловского времени при температурах  $T \lesssim 100 \text{ ГэВ}$ ,

$$\tau_s \lesssim \frac{8\pi}{\alpha M_s} \ll t_H = \frac{M_{Pl}^*}{T^2}.$$

Будучи LSP, нейтрино будет рождаться не только при рассеянии суперпартнёров на (супер)партнёрах, но и в двухчастичных распадах суперпартнёров, например в распаде слептона в лептон и нейтрино. Кроме того, необходимо учесть существование нескольких каналов аннигиляции нейтрино, часть из которых, в зависимости от параметров модели (а в общем случае таких параметров около сотни), может быть резонансно усилена. В ряде случаев (например, если масса некоторого суперпартнёра оказывается достаточно близка к массе LSP) распад некоторых суперпартнёров оказывается сильно подавленным. Тогда оказывается важным оценить их концентрации сразу после заковки (замораживания аннигиляционных процессов), поскольку распад каждого отщепившегося суперпартнёра даст в конце концов по крайней мере одну частицу LSP, т.е. дополнительно увеличит плотность реликтовых нейтрино.



Эволюцию плотности числа взаимодействующих частиц в плазме получают из решения системы уравнений Больцмана, учитывающих доминирующие процессы распада и двухчастичные процессы (процессы перерасеяния и аннигиляции с двумя частицами в начальном состоянии). Рассмотрим простой случай, когда закалка нейтралино происходит позже отщепления и последующего быстрого распада других суперпартнёров, и существенными являются только процессы аннигиляции нейтралино в частицы Стандартной модели. Этот случай реализуется, если масса нейтралино заметно меньше масс остальных суперпартнёров, а в спектре масс суперпартнёров нет сколько-нибудь значительного вырождения. Обозначая полное сечение аннигиляции нейтралино как  $\sigma_{NN}^{ann}$ , запишем в этой ситуации уравнение Больцмана для плотности нейтралино  $n_N$  в расширяющейся Вселенной (ср. с разделом 5.3),

$$\frac{dn_N}{dt} + 3Hn_N = -\langle \sigma_{NN}^{ann} \cdot v \rangle \cdot (n_N^2 - n_N^{eq\ 2}) , \quad (9.35)$$

здесь  $n_N^{eq}$  — равновесная плотность нейтралино при данной температуре,  $\langle \sigma_{NN}^{ann} \cdot v \rangle$  — усреднённое по импульсам с равновесными функциями распределения произведение сечения аннигиляции и относительной скорости аннигилирующих частиц  $v$ .

Простой способ получить уравнение (9.35) состоит в следующем. Вероятность аннигиляции какого-то фиксированного нейтралино в единицу времени в среде с плотностью нейтралино  $n_N$  равна

$$\Gamma_{ann} = \langle \sigma_{NN}^{ann} \cdot v \rangle \cdot n_N .$$

Отсюда изменение числа нейтралино в сопутствующем объёме  $a^3$  за счёт их аннигиляции равно

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d(n_N a^3)}{dt} \right]_{ann} &= -\Gamma_{ann} \cdot n_N a^3 \\ &= -\langle \sigma_{NN}^{ann} \cdot v \rangle \cdot n_N^2 a^3 . \end{aligned} \quad (9.36)$$

В термодинамическом равновесии, т.е. при  $n_N = n_N^{eq}$  это изменение числа нейтралино должно компенсироваться процессами их парного рождения, т.е. увеличение числа нейтралино за счёт процессов рождения равно

$$\left[ \frac{d(n_N a^3)}{dt} \right]_{creation} = +\langle \sigma_{NN}^{ann} \cdot v \rangle \cdot n_N^{eq\ 2} \cdot a^3 . \quad (9.37)$$

Сумма (9.36) и (9.37) и даёт полное изменение числа нейтралино в сопутствующем объёме, что приводит к уравнению (9.35).

В общем случае система уравнений Больцмана описывает баланс взаимодействующих частиц в системе. Уравнение (9.35) является примером уравнения Больцмана, записанного для одного типа частиц с учётом процессов аннигиляции и парного рождения. Более аккуратно это уравнение можно получить из следующих рассуждений. Рассмотрим процесс двухчастичной аннигиляции частиц в пространстве Минковского. Пусть  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  — 3-импульсы частиц в начальном состоянии. Число частиц с импульсами между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$  в элементе объёма плазмы  $d\mathbf{x}$  равно

$$dN = n(t, \mathbf{x}) F(t, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} ,$$

где  $n(t, \mathbf{x})$  — плотность числа частиц, а функция  $F(t, \mathbf{p})$  описывает распределение частиц по 3-импульсам и нормирована условием

$$\int F(t, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = 1 ,$$

выполненным в каждый момент времени. Рассмотрим некоторую частицу с импульсом  $\mathbf{p}_1$ . В единицу времени с ней аннигилирует

$$\sigma \cdot v \cdot n(t, \mathbf{x}) F(t, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 \quad (9.38)$$

частиц того же типа с импульсами между  $\mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{p}_2 + d\mathbf{p}_2$ , где  $v$  — относительная скорость фиксированной и рассеивающихся частиц, и введено сечение аннигиляции частиц (по предположению, важны только аннигиляционные процессы)

$$\sigma = \sigma(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) ,$$

характеризующее вероятность аннигиляции пары сталкивающихся частиц с импульсами  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ . Отсюда среднее число приводящих к аннигиляции столкновений частиц, заключённых в объёме  $d\mathbf{x}$ , с импульсами, заключёнными между  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_1 + d\mathbf{p}_1$ , равно

$$\frac{1}{2} dN(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}) \cdot \sigma \cdot v \cdot n(t, \mathbf{x}) F(t, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 = \frac{1}{2} n(t, \mathbf{x}) F(t, \mathbf{p}_1) d\mathbf{x} d\mathbf{p}_1 \cdot \sigma \cdot v \cdot n(t, \mathbf{x}) F(t, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 , \quad (9.39)$$

фактор  $1/2$  в выражении (9.39) учитывает тот факт, что частицы одинаковы (иначе дважды учитывался бы вклад одинаковых начальных состояний,  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  и  $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)$ ).

Поскольку в результате каждого столкновения из объёма  $d\mathbf{x}$  убывает пара частиц, то удвоенное выражение (9.39) является скоростью уменьшения числа частиц в этом объёме из-за двухчастичных аннигиляций,

$$n^2(t, \mathbf{x}) F(t, \mathbf{p}_1) d\mathbf{x} d\mathbf{p}_1 \cdot \sigma \cdot v \cdot F(t, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 . \quad (9.40)$$

Для не очень плотных сред именно двухчастичная аннигиляция является основной причиной уменьшения числа частиц.

Существует и обратный процесс, в результате которого число частиц в объёме  $d\mathbf{x}$  увеличивается. Это — парное рождение частиц, происходящее вследствие всевозможных столкновений других частиц в плазме. По условию, эти частицы интенсивно взаимодействуют между собой и поэтому находятся в состоянии кинетического равновесия. В равновесной ситуации скорости прямых и обратных процессов совпадают, поэтому скорость увеличения числа частиц в объёме  $d\mathbf{x}$  в результате их парного рождения в равновесной плазме в точности совпадала бы с величиной, получаемой по формуле (9.40), в которой все функции распределения следует считать равновесными. В данном случае интересующая нас аннигилирующая компонента выходит из равновесия с плазмой, однако частицы, в которые происходит аннигиляция, принадлежат к равновесным компонентам плазмы, а значит для скорости парного рождения можно использовать равновесный ответ. Таким образом, скорость увеличения числа частиц в объёме  $d\mathbf{x}$  вследствие парных рождений равна

$$n^{eq\ 2}(t, \mathbf{x}) F^{eq}(t, \mathbf{p}_1) d\mathbf{x} d\mathbf{p}_1 \cdot \sigma \cdot v \cdot F^{eq}(t, \mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 ,$$

где  $n^{eq}$ ,  $f^{eq}$  — равновесные распределения. Окончательно, проинтегрировав по всем импульсам  $\mathbf{p}_2$ , получим для баланса частиц в элементе фазового объёма  $d\mathbf{p} d\mathbf{x}$  в единицу времени,

$$\left[ \frac{\partial (n(t, \mathbf{x}) F(t, \mathbf{p}_1))}{\partial t} \right] d\mathbf{p}_1 d\mathbf{x} = - \left[ \int (n^2(t, \mathbf{x}) F(t, \mathbf{p}_1) F(t, \mathbf{p}_2) - n^{eq\ 2}(t, \mathbf{x}) F^{eq}(t, \mathbf{p}_1) F^{eq}(t, \mathbf{p}_2)) \cdot v \cdot \sigma d\mathbf{p}_2 \right] d\mathbf{p}_1 d\mathbf{x} . \quad (9.41)$$

Правая часть здесь называется интегралом столкновений.

Мы будем интересоваться ситуацией, когда пространственное распределение частиц однородно и изотропно, т.е. плотность распределения числа частиц  $n(t, \mathbf{x})$  не зависит от точки пространства, но зависит от времени,

$$n(t, \mathbf{x}) \equiv n(t) , \quad n^{eq}(t, \mathbf{x}) \equiv n^{eq}(t) ,$$

а распределение частиц по импульсам, наоборот, соответствует кинетическому равновесию и от времени явно не зависит,

$$F(t, \mathbf{p}) \equiv F(\mathbf{p}) , \quad F^{eq}(t, \mathbf{p}) \equiv F^{eq}(\mathbf{p}) .$$

Тогда соотношение (9.41) после интегрирования по импульсу  $\mathbf{p}_1$  даёт уравнение Больцмана

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = - \langle \sigma v \rangle (n^2 - n^{eq\ 2}) , \quad (9.42)$$

где правая часть также называется интегралом столкновений. При получении фактора  $\langle \sigma v \rangle$  мы пренебрегли под знаком интеграла в (9.41) различием равновесных и неравновесных функций распределения по импульсам, т.е. положили  $F(\mathbf{p}) = F^{eq}(\mathbf{p})$ . Это соотношение выполняется, если в среде есть быстрые процессы (рассеяние нейтрально на частицах среды) без изменения числа нейтрально, см. конец раздела 9.2. Таким образом, мы считаем, что имеем дело со случаем, рассмотренным в разделе 5.3. В (9.42) мы ввели обозначение

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \frac{\int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 F^{eq}(\mathbf{p}_1) F^{eq}(\mathbf{p}_2) \cdot v \cdot \sigma}{\int F^{eq}(\mathbf{p}_1) d\mathbf{p}_1 \cdot \int F^{eq}(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2} = \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 F^{eq}(\mathbf{p}_1) F^{eq}(\mathbf{p}_2) \cdot v \cdot \sigma ,$$

— усреднённое с функциями распределением частиц по импульсам произведение относительной скорости частиц на сечение их аннигиляции (для равновесных функций распределения  $F^{eq}(\mathbf{p})$ , характеризующихся температурой — “температурное среднее”).

Обратим внимание, что в выражении (9.42)  $n^{eq}$  — равновесная плотность числа частиц в системе, а  $n$  — собственно плотность числа частиц — однородная, но вообще говоря, отличная от равновесной. Правая часть уравнения квадратично зависит от плотностей частиц, что обеспечивает устойчивость системы: любое отклонение плотности от равновесной приводит к такому воздействию на систему, что плотность числа частиц приближается к равновесной величине.

Для описания процессов, протекающих в расширяющейся Вселенной, уравнение Больцмана (9.42) требуется модифицировать, чтобы учесть изменение физического объёма системы. Эта модификация и приводит к уравнению (9.35), используемому для анализа процессов в первичной плазме, см. также раздел 5.3.

Найдём приближённое решение уравнения Больцмана (9.35) для случая заковки нерелятивистских частиц. Для этого оказывается удобным переписать уравнение (9.35) как уравнение на отношение плотности нейтралينو к плотности энтропии. Итак, введём переменные

$$\Delta_N \equiv \frac{n_N}{s} \quad \Delta_N^{eq} \equiv \frac{n_N^{eq}}{s} ,$$

где

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_* T^3 , \quad (9.43)$$

— плотность энтропии при температуре  $T$ , а  $g_*$  — число релятивистских степеней свободы. На интересующий нас момент в плазме были только релятивистские частицы Стандартной модели, поэтому для реалистичных масс нейтралино

$$M_N \gtrsim 50 \text{ ГэВ}$$

будем иметь (см. рис. В.4)

$$70 \lesssim g_* \leq 106.75 .$$

Используя закон изменения плотности энтропии в сопутствующем объёме (5.35),

$$\frac{ds}{dt} + 3Hs = 0 ,$$

найдем, что

$$\frac{dn_N}{dt} = s \cdot \frac{d\Delta_N}{dt} - 3Hn_N .$$

Это позволяет записать уравнение на  $\Delta_N$  в виде

$$\frac{d\Delta_N}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \cdot s \cdot (\Delta_N^2 - \Delta_N^{eq\,2}) . \quad (9.44)$$

Для дальнейшего удобно перейти от переменной  $t$  к переменной

$$x \equiv \frac{T}{M_N} ,$$

которая с учётом связи средней кинетической энергии нерелятивистских частиц и их температуры,

$$\langle E_k \rangle = \frac{M_N \langle v_N^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} T = \frac{3}{2} x M_N , \quad (9.45)$$

показывает, насколько аннигилирующие частицы являются нерелятивистскими. Поскольку в пренебрежении слабой зависимостью величины  $g_*$  от температуры имеет место равенство (см. (3.31)),

$$\frac{dT}{dt} = -HT , \quad (9.46)$$

то уравнение (9.44) в терминах переменной  $x$  будет иметь вид

$$\frac{d\Delta_N}{dx} = \frac{\langle\sigma v\rangle}{Hx} \cdot s \cdot (\Delta_N^2 - \Delta_N^{eq\,2}) ,$$

или после подстановки явных выражений для  $s = s(T)$  и  $H = H(T)$  (см. (9.43) и (3.28)),

$$\frac{d\Delta_N}{dx} = \langle\sigma v\rangle \cdot \frac{\sqrt{\pi g_*}}{3\sqrt{5}} \cdot M_N \cdot M_{Pl} \cdot (\Delta_N^2 - \Delta_N^{eq\,2}) . \quad (9.47)$$

Для случая аннигиляции нерелятивистских частиц, который мы и рассматриваем, величину  $\langle\sigma v\rangle$  можно разложить в ряд по степеням отношения температуры к массе частицы,  $x = T/M_N$ , что эквивалентно разложению в ряд по отношению средней кинетической энергии частиц к массе (см. (9.45)) или разложению в ряд по среднему от квадрата относительной скорости сталкивающихся частиц<sup>16</sup>,  $\langle v^2 \rangle = 2\langle v_N^2 \rangle$ ,

$$\langle\sigma v\rangle \equiv a_0 + a_1 \cdot v^2 + \dots \approx a_0 + 6a_1 \cdot x , \quad (9.48)$$

где мы оборвали ряд на двух первых членах, поскольку для интересующих нас температур порядка температуры закалки справедливо  $x \ll 1$ . Подставляя разложение (9.48) в (9.47), получим окончательно

$$\frac{d\Delta_N}{dx} = (a_0 + 6a_1 \cdot x) \cdot \frac{\sqrt{\pi g_*}}{3\sqrt{5}} \cdot M_N \cdot M_{Pl} \cdot (\Delta_N^2 - \Delta_N^{eq\,2}) . \quad (9.49)$$

Это уравнение можно было бы решить точно. Мы вместо этого качественно проанализируем поведение решения уравнения (9.49). При температуре закалки  $T_f$  (т.е. при малых  $x_f \equiv T_f/M_N$ ) величина  $\Delta_N(T_f)$  примерно совпадает с равновесным значением  $\Delta_N^{eq}(T_f)$ , а при малых температурах  $T \ll T_f$  (т.е. при  $x \ll x_f$ )  $\Delta_N^{eq}(T)$  экспоненциально подавлена по сравнению с  $\Delta_N(T)$ . Такое поведение позволяет для получения приближённого решения пренебречь при  $T \lesssim T_f$  в правой части уравнения (9.49) величиной  $\Delta_N^{eq\,2}$ . Упрощённое таким образом уравнение легко проинтегрировать и, воспользовавшись тем, что  $\Delta_N(T=0) \ll \Delta_N^{eq}(T_f)$ , получить

$$\Delta_N^{-1}(T=0) = (a_0 x_f + 3a_1 x_f^2) \cdot \frac{\sqrt{\pi g_*}}{3\sqrt{5}} \cdot M_N \cdot M_{Pl} . \quad (9.50)$$

Отсюда для вклада реликтовых нейтрино в современную плотность энергии Вселенной будем иметь

$$\Omega_N h^2 \approx 0.9 \cdot 10^{-10} \frac{1}{x_f \sqrt{g_*}} \frac{\text{ГэВ}^{-2}}{a_0 + 3a_1 x_f} , \quad (9.51)$$

где параметры  $a_0$  и  $a_1$  имеют размерность  $\text{ГэВ}^{-2}$  и определены соотношением (9.48) при температуре закалки нейтрино  $T_f = M_N \cdot x_f$ . Сама эта температура закалки определяется в результате итеративного решения уравнения (9.10), где в качестве сечения следует подставить

$$\langle\sigma v\rangle_0 = a_0 + 6 \frac{T_f}{M_N} ,$$

---

<sup>16</sup>Учитываем, что  $v^2 = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = \mathbf{v}_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^2$ , и перекрёстный член выпадает при усреднении.

В итоге получим<sup>17</sup>

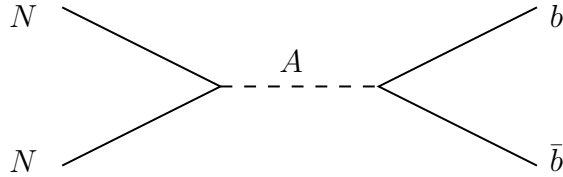
$$x_f^{-1} = \ln \left[ \frac{3 \cdot \sqrt{10}}{8\pi^3} \frac{g_N}{\sqrt{g_*} x_f} \cdot M_N \cdot M_{Pl} \cdot (a_0 + 6a_1 x_f) \right]. \quad (9.52)$$

Оценки (9.51), (9.52) уточняют сделанную выше оценку (9.19).

Теперь найдём коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$ , связав их с константами взаимодействия нейтралينو и другими параметрами суперсимметричной теории. При этом в качестве первого примера рассмотрим лёгкие нейтралино,  $M_N \lesssim M_Z$ .

Сначала рассмотрим совсем лёгкие LSP,  $M_N \ll M_Z$ . При этом основной вклад в LSP должно давать бино — суперпартнёр калибровочного бозона группы гиперзаряда  $U(1)_Y$ : тогда связь LSP с  $Z$ -бозоном будет достаточно слабой, чтобы кинематически разрешённый распад  $Z \rightarrow NN$  не давал заметного вклада в хорошо измеренную ширину  $Z$ -бозона. Для случая легчайших феноменологически приемлемых нейтралино доминирующим каналом их аннигиляции в ранней Вселенной является  $s$ -канальное рождение лёгкого виртуального аксиального хиггсовского бозона  $A$ , распадающегося затем в пару  $b$ -кварков, рис. 9.4. Для сечения этого процесса аннигиляции справедлива оценка

$$\langle \sigma v \rangle_0 \sim \xi^2 y_b^2 \frac{\alpha_2 M_N^2}{m_A^4},$$



где  $m_A$  — масса аксиального хиггсовского бозона  $A$ ,  $y_b$  — юкавская константа связи  $b$ -кварков с бозоном  $A$ , параметр  $\xi$  определяется углами смешивания массовой матрицы нейтралино; для обеспечения эффективной аннигиляции LSP существенна примесь хиггсина.

Рис. 9.4: Аннигиляция лёгких нейтралино через виртуальный аксиальный хиггсовский бозон.

Ограничения снизу на массу легчайшего нейтралино составляют около 5 ГэВ [27], а на массу аксиального хиггсовского бозона — около 100 ГэВ [4]. Рассматривая модели с большой константой связи<sup>18</sup>  $y_b \sim 1$ , получим

$$\langle \sigma v \rangle_0 \approx a_0 \sim \left( \frac{\xi^2}{0.1} \right) \cdot \left( \frac{M_N}{10 \text{ ГэВ}} \right)^2 \cdot \left( \frac{100 \text{ ГэВ}}{m_A} \right)^4 \cdot 2 \cdot 10^{-10} \text{ ГэВ}^{-2}.$$

Тогда, оценивая температуру закалки LSP из (9.52), получим  $x_f \sim 1/20$ , и для доли лёгких реликтовых нейтралино в современной плотности энергии Вселенной (9.51) будем иметь

$$\Omega_N \sim 0.2 \cdot \left( \frac{0.1}{\xi^2} \right) \cdot \left( \frac{10 \text{ ГэВ}}{M_N} \right)^2 \cdot \left( \frac{m_A}{100 \text{ ГэВ}} \right)^4,$$

т.е. как раз нужную для объяснения тёмной материи величину при реалистических значениях  $M_N \simeq 10 \text{ ГэВ}$ ,  $\xi \simeq 0.1$ .

Другая интересная возможность — лёгкие нейтралино с массами  $M_N \lesssim M_Z$ . Класс моделей, интересных с точки зрения космологии, здесь шире, что связано

<sup>17</sup>Выражения (9.50) и (9.52) всё ещё справедливы лишь с логарифмической точностью. Для получения точного выражения для  $\Delta_N(T=0)$  необходимо найти точное решение уравнения (9.49). В дальнейшем нам это не понадобится.

<sup>18</sup>Это условие реализуется в моделях с большой иерархией между вакуумными средними двух хиггсовских дублетов.

во многом с новыми каналами аннигиляции, эффективными для этой области масс. Оценим сечение аннигиляции нейтралино в моделях с тяжёлыми новыми хиггсовскими бозонами,<sup>19</sup>  $M_{H,A} \gg M_Z$ . Для наиболее интересных с точки зрения космологии случаев оно оказывается существенно подавленным по сравнению с оценкой, фигурирующей в (9.33). Действительно, рассмотрим доминирующий для лёгких нейтралино канал аннигиляции в фермионы Стандартной модели,<sup>20</sup>

$$NN \rightarrow \bar{f}f. \quad (9.53)$$

Эти процессы идут через  $s$ -канальный обмен  $Z$ -бозоном, а также посредством  $t$ -канального обмена виртуальными суперпартнёрами  $\tilde{f}$  рождающихся фермионов<sup>21</sup>, см. рис. 9.5. Поскольку мы интересуемся сечением аннигиляции в эпоху, когда анни-

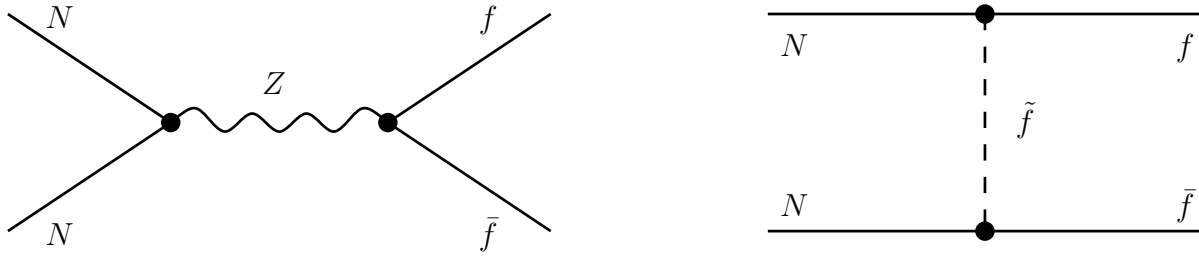


Рис. 9.5: Диаграммы, дающие вклад в аннигиляцию лёгких нейтралино в пару фермионов.

гилирующие частицы являются существенно нерелятивистскими ( $v \sim T/M_N \lesssim 0.1$ ), а нейтралино считается легчайшим суперпартнёром, то протекающими в  $s$ - и  $t$ -каналах 3-импульсами можно пренебречь по сравнению с массой соответствующей виртуальной частицы. Иными словами, аннигиляция (9.53) в нашем случае эффективно описывается контактным 4-фермионным взаимодействием,

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{N} \gamma^\mu \gamma_5 N \cdot \bar{f} \gamma_\mu (a_f + b_f \gamma^5) f, \quad (9.54)$$

где параметры  $a_f$  и  $b_f$  имеют размерность  $\text{ГэВ}^{-2}$ . Эти параметры — эффективные константы связи — определяются суммой вкладов виртуального  $Z$ -бозона и вкладов виртуальных суперпартнёров фермионов. Вклады виртуального  $Z$ -бозона зависят только от элементов матрицы смешивания нейтралино (напомним, что здесь нейтралино  $N$  — легчайшее массовое состояние в секторе из четырёх нейтральных майорановских фермионов), массы  $Z$ -бозона и слабых констант связи соответствующих фермионов. Вклады виртуальных суперпартнёров зависят от элементов матрицы смешивания в секторе нейтралино, слабых констант связи соответствующих фермионов, масс суперпартнёров фермионов Стандартной модели и углов смешивания

<sup>19</sup>Этот случай является довольно характерным для феноменологически приемлемых суперсимметричных моделей; отметим, что в минимальных суперсимметричных обобщениях Стандартной модели масса легчайшего хиггсовского бозона ограничена *сверху* величиной около 140 ГэВ, однако вклад этого легчайшего хиггсовского бозона в аннигиляцию нейтралино пренебрежимо мал.

<sup>20</sup>В ряде случаев этот канал является основным и для аннигиляции тяжёлых нейтралино. К таким случаям относятся, например, модели, где основной вклад в LSP даёт бино.

<sup>21</sup>Для более тяжёлых нейтралино существенным оказывается  $s$ -канальный обмен тяжёлыми нейтральными хиггсовскими бозонами. В резонансной области этот вклад будет доминировать, что позволяет существенно увеличить сечение аннигиляции тяжёлых нейтралино, тем самым уменьшив плотность энергии реликтовых нейтралино до космологически приемлемых значений.

в соответствующих секторах слептонов и скварков. По порядку величины можно считать, что в моделях с  $2M_N \sim M_Z$  учёт обмена  $Z$ -бозоном приводит к вкладу в параметры  $a_f$  и  $b_f$  порядка фермиевской константы связи (см. раздел В.5),

$$a_f, b_f \sim G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (9.55)$$

Вклад более тяжёлых суперпартнёров, а также вклад  $Z$ -бозона в моделях с  $M_N > M_Z/2$  меньше по сравнению с оценкой (9.55) за счёт факторов подавления  $M_Z^2/M_S^2$  и  $M_Z^2/4M_N^2$ , соответственно (заметим в связи с этим, что при  $M_N > M_Z/2$  обмен  $Z$ -бозоном действительно доминирует для  $M_S \gg M_Z$ ).

Взаимодействие (9.54) даёт для аннигиляции нейтралينو (майорановский фермион,  $N = N^c$ ) в нерелятивистском пределе  $v \ll 1$  (где  $v$  — величина относительной скорости аннигилирующих частиц),

$$\sigma v \approx \frac{1}{2\pi} \sum_f \left[ a_f^2 \cdot m_f^2 + \frac{1}{3} ((a_f^2 + b_f^2) M_N^2 + (a_f^2 - 2b_f^2) m_f^2) \cdot v^2 \right], \quad (9.56)$$

откуда для параметров  $a_0$  и  $a_1$ , определённых соотношением (9.48), получим

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_f a_f^2 \cdot m_f^2, \quad a_1 = \frac{1}{6\pi} \sum_f ((a_f^2 + b_f^2) M_N^2 + (a_f^2 - 2b_f^2) m_f^2).$$

Сечение аннигиляции в  $s$ -волне подавлено массой фермиона: в пределе  $m_f \rightarrow 0$  имеем  $a_0 = 0$ , т.е. аннигиляция нейтралино в безмассовые фермионы происходит только в  $p$ -волне. Это связано с тем, что левые безмассовые фермионы Стандартной модели рождаются “ток-токовым” взаимодействием (9.54) только в состоянии с полным моментом  $J = 1$ . Нерелятивистские майорановские фермионы — нейтралино — должны быть в состоянии с угловым моментом 1 ( $p$ -волна) и полным спином 0, чтобы перейти в пару частиц с  $J = 1$ . Состояние с угловым моментом 0 ( $s$ -волна) и полным спином 1 запрещено для майорановских частиц принципом Паули. Этим объясняется  $p$ -волновой характер подавления сечения (9.56) при малых  $m_f$ . Для приведённых оценок параметров  $a_0$  и  $a_1$  будем иметь из (9.51),

$$\Omega_N \sim 0.2$$

для

$$M_N \simeq 60 \text{ ГэВ}.$$

Такие нейтралино являются вполне приемлемыми кандидатами на роль частиц тёмной материи.

Обсудим, наконец, возможность того, что  $M_N < M_Z/2$ . Напомним, что для лёгких нейтралино с массами  $M_N < M_Z/2$ , константа связи нейтралино с  $Z$ -бозонами должна быть достаточно мала, чтобы подавить вклад нейтралино в ширину  $Z$ -бозона. В моделях, где (некоторые) суперпартнёры фермионов Стандартной модели являются достаточно лёгкими,  $M_S \lesssim M_Z$  основные каналы аннигиляции лёгких нейтралино в ранней Вселенной будут связаны с  $t$ -канальными обменами этих частиц. Именно они обеспечивают необходимое количество тёмной материи в моделях с  $M_N < M_Z/2$ . В частности, положив  $M_S \sim M_Z$  и взяв для величин  $a_f, b_f$  оценку (9.55), получим из (9.51), что нейтралино с массой  $M_N \simeq 30 \text{ ГэВ}$  может объяснить тёмную материю во Вселенной.

Трудность описанных сценариев с  $M_N \ll M_Z$  и  $M_N \lesssim M_Z$  состоит, однако, в том, что в большинстве простейших конкретных суперсимметричных моделей области параметров, в которых имеются лёгкие нейтралино, исключены многочисленными экспериментальными поисками проявлений суперсимметрии.

Перейдём теперь к случаю более тяжёлых нейтралино,  $M_N \gtrsim M_Z$  (всюду речь идёт о нейтралино, являющихся LSP). В этом случае вклад  $Z$ -бозона в константы  $a_f$  и  $b_f$  подавлен фактором  $M_Z^2/4M_N^2$ ; вклад более тяжёлых суперпартнёров (правая диаграмма на рис. 9.5) также, вообще говоря, мал. С учётом подавления сечения аннигиляции нейтралино в фермионы по сравнению с оценкой (9.25) мы заключаем, что предсказываемая плотность массы реликтовых нейтралино с  $M_N \gtrsim M_Z$  как правило превышает требуемое значение  $\rho_{CDM} \simeq 0.3\rho_c$ , т.е. для таких масс имеет место проблема перепроизводства нейтралино.

Относительно тяжёлые нейтралино,  $M_N \gtrsim M_Z$ , всё же могут обеспечить необходимую плотность массы тёмной материи, однако это возможно только при определённых соотношениях между параметрами модели, подразумевающих обычно специальные соотношения между массой нейтралино и массами некоторых суперпартнёров (например, вырождение в спектре масс калибрино). Такое решение проблемы перепроизводства тёмной материи вполне возможно, однако возникает вопрос о степени натуральности соответствующих соотношений между параметрами модели.

▷ *Задача 6. Рассмотреть минимальное суперсимметричное расширение Стандартной модели, в котором все суперпартнёры, кроме слептонов и фотино, очень тяжёлые, а потому распадаются на обычные частицы и фотино или слептоны задолго до достижения во Вселенной температур порядка 100 ГэВ. Пусть массы слептонов и фотино порядка 100 ГэВ, а фотино является LSP. Пренебрегая смешиванием слептонов, найти плотность реликтовых фотино. Указание: лагранжиан взаимодействия между фотино, лептоном и слептоном можно найти в самом начале раздела 9.6.*

В качестве примера самосогласованного и феноменологически приемлемого суперсимметричного обобщения Стандартной модели, где многочисленные массы и константы связи в низкоэнергетической теории определяются лишь несколькими параметрами, рассмотрим модели mSUGRA (minimal Supergravity). В этих моделях предполагается, что суперсимметрия нарушается спонтанно в специальном “скрытом” секторе, и это нарушение передаётся в сектор полей Стандартной модели благодаря гравитационным взаимодействиям. При этом на некотором энергетическом масштабе  $M$ , вне зависимости от аромата и заряда по калибровочной группе Стандартной модели, все скаляры — суперпартнёры фермионов Стандартной модели и хиггсовские дублеты — приобретают одинаковые массы  $m_0$ , а все суперпартнёры калибровочных бозонов — калибрино — приобретают одинаковые массы  $M_{1/2}$ . Кроме того, появляются нарушающие суперсимметрию трilinearные константы связи хиггсовских дублетов (а их в минимальном суперсимметричном обобщении два — один,  $H_U$ , взаимодействует с верхними кварками, а другой,  $H_D$  — с нижними кварками и с лептонами) с другими скалярными полями. Эти константы имеют размерность массы и полагаются пропорциональными соответствующим юкавским константам связи с общим размерным коэффициентом  $A$ .

Отметим, что в простейших (однако реалистичных) моделях масштаб  $M$  полагается равным масштабу теории большого объединения  $M_{GUT} \sim 10^{16}$  ГэВ. Это обусловлено тем обстоятельством, что калибровочные константы связи Стандартной модели (чьи величины из-за квантовых эффектов изменяются с энергетическим масштабом) приближаются друг к другу с ростом энергетического масштаба. В минимальных суперсимметричных обобщениях Стандартной модели все три калибровочные константы связи объединяются на масштабе  $M_{GUT}$ , т.е. становятся равными друг другу. Это является сильным доводом в пользу суперсимметричных моделей Большого объединения, происходящего как раз на масштабе  $M_{GUT}$ .

Помимо трёх размерных параметров  $m_0, M_{1/2}, A$ , есть ещё безразмерный параметр,  $\tan \beta \equiv \langle H_U \rangle / \langle H_D \rangle$ . Массы хиггсино на масштабе  $M$  полагаются равными ещё одному размерному параметру  $\mu$ , величина которого оказывается зафиксированной величиной массы  $Z$ -бозона  $M_Z$ , однако знак  $\mu$  остаётся ещё одним (дискретным) свободным параметром<sup>22</sup>.

<sup>22</sup>В общем случае параметр  $\mu$  может быть комплексным, что служит дополнительным источником  $CP$ -нарушения в хиггсовском секторе.



С учётом квантовых поправок все массовые параметры  $\{m_{0i}, A_{ij}^U, A_{ij}^D, M_i\}$  и константы связи  $\{\alpha_i, Y_{ij}^U, Y_{ij}^D\}$  mSUGRA изменяются при понижении энергетического масштаба  $Q$  от  $M$  до  $M_Z$ . Окончательный набор масс и констант связи на электрослабом масштабе можно получить из решения ренормгрупповых уравнений, описывающих эволюцию констант связи и масс. Заданные на масштабе  $M$  величины констант связи и масс через четыре параметра (и знак) являются начальными условиями для уравнений ренормгруппы. Описанный нами набор начальных условий называют *универсальным*, и с феноменологической точки зрения его выбор обусловлен необходимостью подавать взаимодействия, приводящие при низких энергиях к процессам с нарушением ароматов в кварковом и лептонном секторах.

Учёт квантовых поправок приводит к важным результатам. При низких энергиях константы связи и массовые параметры перестают удовлетворять условиям универсальности. В частности, массы частиц с разными квантовыми числами существенно различаются. Массы калибрино — суперпартнёров калибровочных бозонов — при учёте лидирующих квантовых поправок эволюционируют с энергетическим масштабом пропорционально соответствующим калибровочным константам связи. В минимальных суперсимметричных расширениях Стандартной модели калибровочная константа сильных взаимодействий растёт с понижением энергетического масштаба, а калибровочные константы электрослабого сектора, наоборот, падают. Таким образом, имея на масштабе  $M$  универсальные начальные условия для уравнений ренормгруппы, на электрослабом масштабе получим глюино в качестве самого тяжёлого калибрино, а бино — суперпартнёр калибровочного бозона группы  $U(1)_Y$  — будет легчайшим. Для массовых параметров скалярного сектора  $m_i^2$  ситуация сложнее, поскольку вклад в ренормгрупповую эволюцию уже в лидирующем порядке теории возмущений дают и калибровочные, и юкавские константы взаимодействия. При понижении энергии квантовые поправки, обусловленные калибровочными взаимодействиями, приводят к увеличению массовых параметров, а поправки, обусловленные юкавским взаимодействием, наоборот, уменьшают их. Чем больше величина константы связи, тем больше эффект. В результате самыми тяжёлыми оказываются левые скварки, а самым лёгким — один из слептонов — суперпартнёр правого  $\tau$ -лептона. Ренормгрупповая эволюция масс суперпартнёров проиллюстрирована на рис. 9.6.

В хиггсовском секторе квантовые поправки, обусловленные взаимодействиями с тяжёлыми кварками третьего поколения ( $t$ - и  $b$ -кварками), приводят в конечном итоге к спонтанному нарушению электрослабой симметрии на масштабе порядка 100 ГэВ (см. рис. 9.6, где выражение  $\sqrt{m_0^2 + \mu^2}$ , являющееся массой хиггсовского поля, становится отрицательным при  $Q \sim 100$  ГэВ): у хиггсовских дублетов появляются отличные от нуля вакуумные средние. Слабые калибровочные бозоны становятся массивными благодаря механизму Хиггса, а фермионы Стандартной модели получают массы посредством юкавских взаимодействий. Суперпартнёры, взаимодействующие с хиггсовскими бозонами, также получают дополнительные вклады в массовые матрицы. В ряде случаев эти вклады существенно изменяют иерархию массовых состояний в секторе суперпартнёров.

Отметим, что в mSUGRA на масштабе энергии  $M$  вакуум  $\langle H_U \rangle = 0$ ,  $\langle H_D \rangle = 0$  является истинным вакуумом скалярного потенциала. Спонтанное нарушение происходит на масштабе энергии  $\sim 100$  ГэВ лишь благодаря появлению квантовых поправок к эффективному (с точки зрения высокоэнергетичной теории) скалярному потенциалу. Такой механизм нарушения электрослабой симметрии является ещё одной привлекательной чертой суперсимметричных обобщений Стандартной модели.

С учётом современных жёстких ограничений на параметры mSUGRA, следующих из многочисленных безрезультатных поисков её проявлений, в пространстве параметров имеется лишь три узкие области, для которых реликтовое нейтрино будет полностью обеспечивать всё необходимое количество тёмной материи во Вселенной, см. рис. 9.7. Это связано с тем обстоятельством, что существующие экспериментальные данные оказываются несовместны с существованием лёгких стабильных нейтрино в количестве, необходимом для объяснения тёмной материи. Более тяжёлые нейтрино, приемлемые с точки зрения эксперимента, для большей части пространства параметров неприемлемы из-за космологического ограничения: как следует из сделанных выше оценок, тяжёлые реликтовые нейтрино будут давать слишком большой вклад в плотность энергии Вселенной. Космологически приемлемые области в пространстве параметров  $(M_{1/2}, m_0)$ , представленные на рис. 9.7, отвечают ситуациям, когда сечение аннигиляции нейтрино тем или иным способом существенно увеличено, что приводит к уменьшению плотности энергии реликтовых нейтрино по сравнению с оценкой (9.33). Вообще говоря, такое решение проблемы тёмной материи с точки зрения низкоэнергетических параметров mSUGRA уже не выглядит естественным. Тем не менее, с точки зрения начальных значений параметров это решение ещё не выглядит вычурно, если не уходить в область слишком больших величин  $M_{1/2}, m_0$ , см. диаграмму справа на рис. 9.8.

Итак, в модели mSUGRA все интересные для космологии области относятся к случаю тяжёлых нейтрино, при этом требуется увеличить сечение аннигиляции нейтрино, чтобы они не давали избыточного вклада в плотность энергии Вселенной.

Одна из областей, где этого удаётся достигнуть, появляется только в моделях с большим  $\tan \beta$  (нижние диаграммы на рис. 9.7). В этой области пространства параметров массы тяжёлых нейтральных хиггсовских бозонов (их два для двухдублетного хиггсовского сектора — скалярный  $H$  и псевдоскалярный  $A$ , и их массы близки,  $m_H \approx m_A$ ) оказываются почти совпадающими с массой пары нейтрино,  $2M_N \approx m_H \approx m_A$ . Поскольку в нерелятивистском пределе энергия нейтрино почти совпадает с их массой, то для вырожденного случая нейтрино резонансно аннигилируют в  $s$ -канале в слабовиртуальные хиггсовские бозоны, распадающиеся затем в частицы Стандартной модели,

$$NN \rightarrow A^*, H^* \rightarrow \text{частицы Стандартной модели},$$

в результате чего сечение аннигиляции возрастает в несколько раз.<sup>23</sup> Ясно, что такого рода решение про-

<sup>23</sup>Как всегда, рост сечения прекращается, когда разница между суммой масс пары нейтрино и

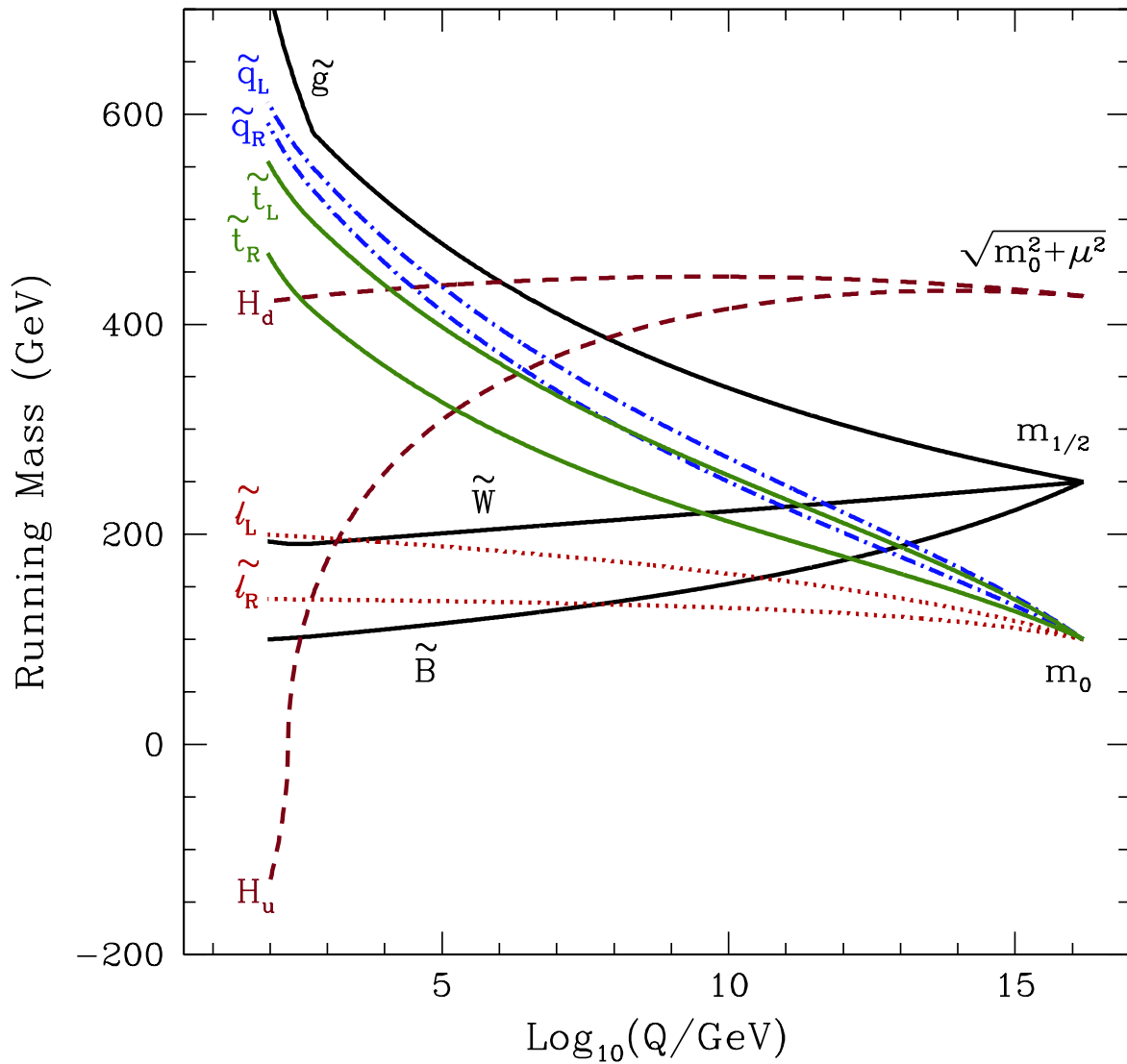


Рис. 9.6: Пример ренормгрупповой эволюции для массовых параметров mSUGRA [28]. В качестве начальных данных на масштабе  $M_{GUT} \approx 10^{16}$  ГэВ выбрано:  $M_{1/2} = 250$  ГэВ,  $m_0 = 100$  ГэВ,  $A = 0$ ,  $\tan \beta = 3$  и  $\mu < 0$ .

блемы перепроизводства нейтралино требует достаточно специального подбора параметров, и хотя соответствующие области в центрах правых диаграмм на рис. 9.7 не кажутся чрезвычайно узкими, с точки зрения иерархии масс в хиггсовском секторе они являются не совсем естественными.

Две другие области отвечают моделям с так называемыми co-LSP. Это модели, в которых массы LSP и ближайшего к нему по массе суперпартнёра, NLSP (the next-to-lightest superpartner), почти вырождены. В данном случае в качестве co-LSP для одной области (узкая полоса на рис. 9.7 вдоль границы космологически запрещённой области, поскольку там LSP является заряженным скаляром) выступает легчайший слептон — смешанное состояние, доминированное суперпартнёром правого  $\tau$ -лептона, а для другой области (узкая полоса на левой диаграмме рис. 9.8 вдоль области, запрещённой из требования спонтанного нарушения электрослабой симметрии) — легчайшее массовое состояние сектора заряженных хиггсино и электрически заряженных калибрино — суперпартнёров  $W^\pm$ -бозонов. В последнем случае тяжёлые нейтралино распадаются в основном в пару  $W^+W^-$  посредством  $t$ -канального обмена калибрино. Сечение этого процесса при  $M_N^2 \gg M_W^2$  не зависит от массы нейтралино, определяется величиной электрослабого масштаба и подавлено отношением квадратов масс нейтралино и калибрино. Чем меньше это отношение, тем больше сечение, достигающее максимального значения при почти вырожденных по массе калибрино и

---

массой соответствующего хиггсовского бозона в  $s$ -канале станет равной ширине соответствующего хиггсовского бозона.

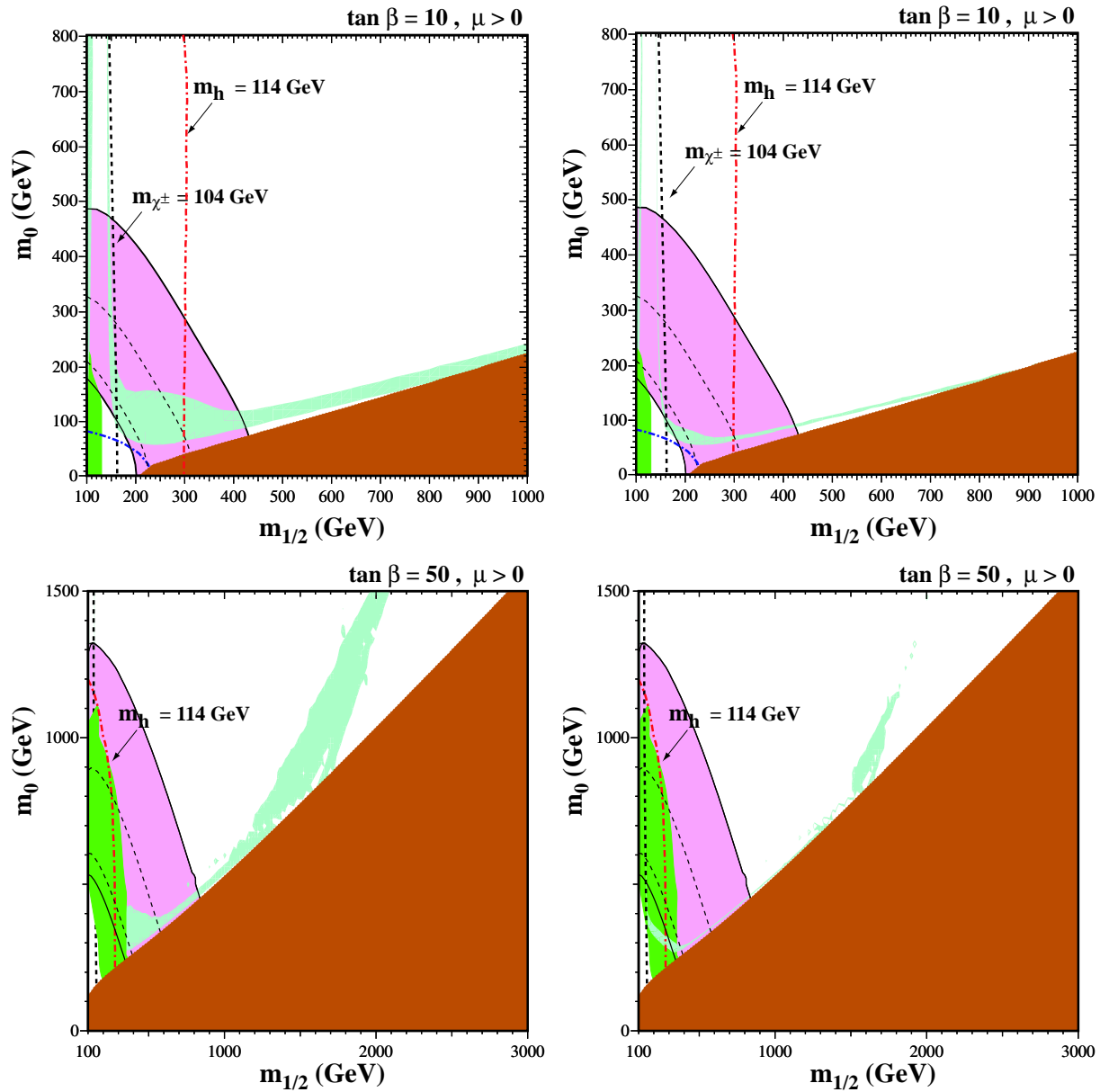


Рис. 9.7: Феноменологически неприемлемые области и космологически предпочтительные области в пространстве  $(M_{1/2}, m_0)$  для модели mSUGRA [28] с  $\tan \beta = 10$  и  $\tan \beta = 50$  (на масштабе  $M_{GUT} \approx 10^{16}$  ГэВ  $A = 0$ ; массы кварков третьего поколения приняты равными  $m_t = 175$  ГэВ,  $m_b = 4.25$  ГэВ). Исклѳенные области для каждого рисунка: область левее толстой синей пунктирной линии исключена ограничением снизу на массу лёгкого чарджино  $m_{\chi^\pm} > 104$  ГэВ, область в левом нижнем углу за синей штрих-пунктирной линией исключена ограничением снизу на массу лёгкого слептона  $m_{\tilde{e}} > 99$  ГэВ, область левее красной штрих-пунктирной линии исключена из ограничения на массу легчайшего хиггсовского бозона, закрашенная зелёным область в левом нижнем углу исключена из измерения ширины инклюзивного распада  $b \rightarrow s\gamma$ , область в левом нижнем углу, окаймлённая широкой розовой полосой, ограниченной толстыми сплошными линиями, исключена из измерения аномального магнитного момента мюона. Окрашенная коричневым область в правом нижнем углу каждого рисунка исключена из космологии, поскольку для таких параметров легчайшим суперпартнёром (LSP) будет легчайшее массовое состояние заряженных слептонов (в основном, суперпартнѳр  $\tau_R$ ). Для параметров из закрашенных голубым областей реликтовые нейтралино будут LSP, и их вклад в плотность энергии Вселенной будет составлять: для левых рисунков — от 20% до 60% (консервативно), для правых рисунков —  $0.094 < \Omega_N h^2 < 0.129$ . В основной части экспериментально разрешѳнной области стабильное нейтралино космологически закрыто, поскольку реликтовые нейтралино давали бы слишком большой вклад в плотность энергии современной Вселенной.

нейтралино. Большое сечение аннигиляции позволяет решить проблему перепроизводства тѳмной материи для тяжѳлых нейтралино.

Частицы NLSP после закалки распадутся с образованием LSP, что служит дополнительным каналом

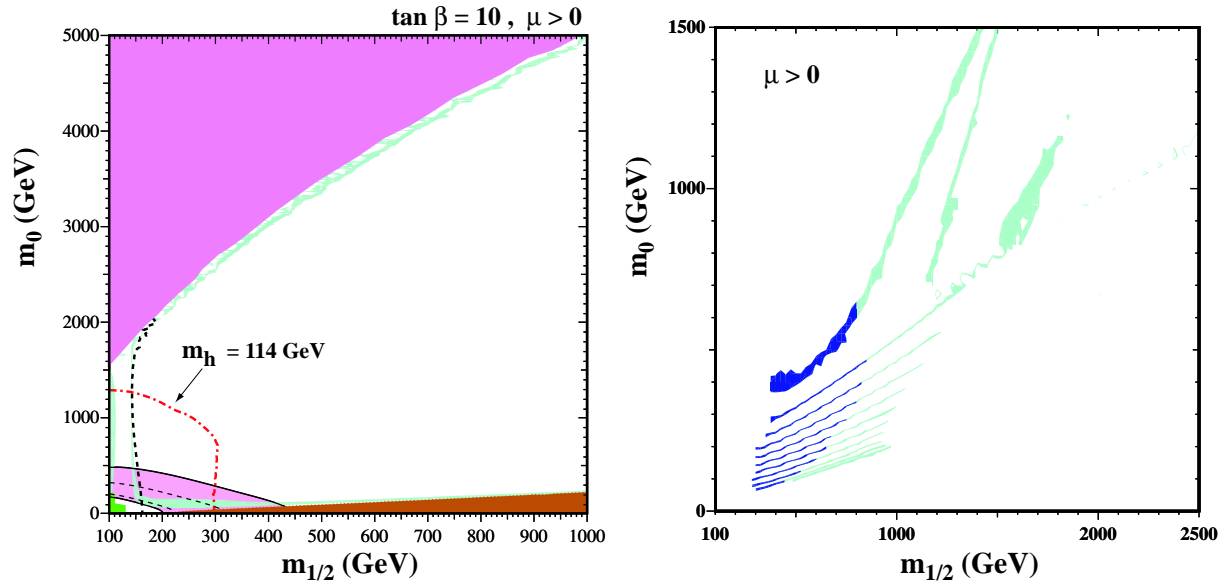


Рис. 9.8: Левый рисунок: то же, что и на верхнем рис. 9.7, но с учётом возможности больших значений  $m_0$ ; закрашенная розовым область в левом верхнем углу запрещена из условия существования спонтанного нарушения электрослабой симметрии. Правый рисунок: космологически предпочтительные области ( $0.094 < \Omega_N h^2 < 0.129$ ) для различных величин  $\tan \beta = 5, 10, \dots, 55$ ; нижние полосы отвечают меньшим величинам  $\tan \beta$  [28].

рождения реликтовых нейтрино. Поскольку массы LSP и co-LSP почти вырождены, а аннигиляция происходит по аналогичным каналам, закалка обеих компонент плазмы происходит практически одновременно,  $T_f^{LSP} \approx T_f^{co-LSP}$ . Поэтому для получения точной оценки остаточной плотности LSP оказывается важным учесть все аннигиляционные каналы

$$\begin{aligned} LSP + LSP &\rightarrow \text{частицы Стандартной модели} , \\ NLSP + LSP &\rightarrow \text{частицы Стандартной модели} , \\ NLSP + NLSP &\rightarrow \text{частицы Стандартной модели} . \end{aligned}$$

Увеличение количества аннигиляционных каналов позволяет сократить остаточное количество нейтрино. Роль этих каналов действительно важна для оценки остаточной плотности нейтрино лишь в узкой области пространства параметров модели, где

$$\frac{m_{NLSP} - m_{LSP}}{m_{LSP}} \equiv \frac{\Delta m}{m_{LSP}} \lesssim 0.1 . \quad (9.57)$$

Эта оценка следует из того факта, что плотность NLSP по отношению к плотности LSP подавлена бoльшммановским фактором

$$e^{-\frac{\Delta m}{T_f}} = e^{-20 \cdot \frac{\Delta m}{m_{LSP}} \cdot \left( \frac{m_{LSP}}{T_f} \right)^{20}} ,$$

который становится меньше 15%, если неравенство (9.57) не выполняется.

В завершение раздела отметим, что в ряде суперсимметричных моделей основная доля реликтовых нейтрино появляется не в результате отщепления от плазмы, а в результате распада более тяжёлых частиц, при этом количество рождённых нейтрино оказывается меньше, чем для теплового механизма. Есть и модели с обратной ситуацией, когда нейтрино — долгоживущая, но всё же нестабильная частица. Истинно стабильная частица — кандидат на роль тёмной материи — появляется в результате распада нейтрино. Этот последний вариант также позволяет решить проблему с перепроизводством тёмной материи в суперсимметричных моделях, поскольку плотность числа появляющихся частиц совпадает с плотностью числа нейтрино, а их масса меньше — в результате плотность энергии тёмной материи падает. Оба этих варианта обсуждаются в разделе, посвящённом гравитино — именно гравитино является интересным партнёром нейтрино в паре LSP-NLSP.

### 9.6.2 Снейтрино

Снейтрино является суперпартнёром нейтрино. Если обобщение Стандартной модели, приводящее в конечном итоге к наблюдаемым осцилляциям нейтрино, происходит на энергетическом масштабе, существенно превышающем масштаб масс суперпартнёров, то и в суперсимметричном обобщении Стандартной модели сектор нейтральных лептонов совпадает с сектором нейтрино Стандартной модели — три поколения по две степени свободы. Таким образом, в минимальном суперсимметричном обобщении Стандартной модели имеется три поколения снейтрино, описываемых тремя комплексными, но электрически нейтральными скалярными полями. Каждое поколение снейтрино состоит из одной скалярной и одной псевдоскалярной частицы — всего шесть бозонных степеней свободы.

Если в моделях с  $R$ -чётностью легчайшее снейтрино является LSP, то именно снейтрино будет давать вклад в тёмную материю Вселенной. Оценка реликтовой плотности снейтрино производится аналогично рассмотренному выше случаю LSP нейтралино. Как и нейтралино, снейтрино активно взаимодействует в первичной плазме. В отличие от случая нейтралино, где благодаря смешиванию четырёх различных состояний те или иные константы связи LSP-нейтралино с частицами Стандартной модели могут быть подавлены, взаимодействия снейтрино с  $W$ - и  $Z$ -бозонами являются прямым суперсимметричным обобщением соответствующих взаимодействий лептонов, что существенно сказывается как на интенсивности аннигиляции снейтрино-LSP в ранней Вселенной, так и на чувствительности к ним экспериментов по прямому поиску частиц тёмной материи.

Снейтрино аннигилируют в лептоны посредством  $t$ -канальных обменов виртуальными хиггсино, вино и зино или аннигилируют в  $s$ -канале в виртуальный  $Z$ -бозон, распадающийся потом в частицы Стандартной модели. По порядку величины численная оценка для плотности реликтовых снейтрино совпадает с оценкой (9.19) для плотности тяжёлых реликтовых частиц (дополнительного  $p$ -волнового подавления, имеющего место для аннигиляции нейтралино, здесь нет), так что реликтовая плотность массы снейтрино действительно может иметь необходимое значение. Из теоретических соображений снейтрино является, однако, менее естественным кандидатом на роль тёмной материи, чем нейтралино, поскольку снейтрино является LSP в заметно меньшем классе суперсимметричных обобщений Стандартной модели, чем нейтралино (в большинстве суперсимметричных обобщений легчайшей в секторе скаляров является линейная комбинация суперпартнёров правых заряженных лептонов). Что более существенно, снейтрино как реликтовые частицы, полностью составляющие тёмную материю, экспериментально закрыты. Действительно, как мы отмечали, взаимодействие снейтрино с  $Z$ -бозоном по силе не уступает взаимодействию  $Z$ -бозона с нейтрино, в результате типичное сечение упругого рассеяния снейтрино на ядрах оказывается на два-три порядка выше существующих ограничений на величину упругого сечения частиц тёмной материи, приведённых на рис. 9.2. Снейтрино с массами до нескольких ТэВ могут составлять лишь небольшую часть тёмной материи. Более перспективными в этой связи представляются так называемые правые снейтрино, появляющиеся в суперсимметричных обобщениях Стандартной модели с правыми нейтрино, имеющими массы порядка 100 ГэВ. Эти снейтрино очень слабо взаимодействуют с частицами Стандартной модели и сечение их упругого рассеяния на ядрах лежит заметно ниже существующих ограничений сверху на сечение рассеяния частиц тёмной материи, приведённых на рис. 9.2.

### 9.6.3 Гравитино

В моделях с локальной суперсимметрией, т.е. в моделях, где действие инвариантно относительно локальных (зависящих от точки пространства-времени) суперсимметричных преобразований, гравитон — переносчик гравитационного взаимодействия — также приобретает суперпартнёра —  $\tilde{G}_\mu$ , получившего название *гравитино*.<sup>24</sup> Если бы суперсимметрия была не нарушена, гравитино было бы безмассовым фермионом со спином 3/2. Теории с локальной суперсимметрией получили название *супергравитации* — действие преобразований суперсимметрии затрагивает все поля теории, включая гравитационное. В связи с этим теории с локальной суперсимметрией являются более фундаментальными. Супергравитационные модели получаются в некоторых низкоэнергетических пределах суперструнных теорий, являющихся сегодня наиболее перспективными кандидатами на роль теории, объединяющей все четыре известных взаимодействия.

Есть и феноменологическая причина, по которой локальная суперсимметрия предпочтительнее своего “глобального” аналога. Дело в том, что в феноменологически приемлемых моделях суперсимметрия должна быть спонтанно нарушена, а значит по теореме Голдстоуна в случае глобальной суперсимметрии в низкоэнергетическом спектре теории должны появиться безмассовые степени свободы — по одной на каждый нарушенный генератор преобразований суперсимметрии. В случае суперсимметрии нарушенные генераторы являются фермионными операторами (они и осуществляют преобразование бозон ↔ фермион, изменяя спин на 1/2, а потому и статистику), поэтому в низкоэнергетическом спектре появляется не безмассовый бозон, а *безмассовый майорановский фермион  $\psi$  — голдстино*. Как и положено голдстоуновскому полю, и в полной аналогии со случаем бозонов, голдстино взаимодействует с соответствующим током — в данном случае с супертоком,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{F} \partial^\mu \psi \cdot J_\mu^{SUSY} . \quad (9.58)$$

Это прямой аналог обобщённой формулы Голдбергера–Треймана, описывающей взаимодействие пионов — (псевдо)голдстоуновских бозонов, возникающих при нарушении киральной симметрии. Параметр  $F$ , входящий в формулу (9.58), имеет размерность квадрата массы и определяется вакуумным средним, появление которого привело к спонтанному нарушению суперсимметрии. По порядку величины  $\sqrt{F}$  совпадает с масштабом нарушения суперсимметрии в полной теории (так же, как в электрослабой модели величина  $v$  совпадает по порядку величины с масштабом нарушения электрослабой симметрии, или в киральной модели величина константы связи пионов  $f_\pi$  совпадает по порядку величины с масштабом нарушения киральной симметрии).

В моделях со спонтанным нарушением *локальной* суперсимметрии работает суперхиггсовский механизм: голдстино становится продольной компонентой гравитино,

$$\tilde{G}_\mu \rightarrow \tilde{G}_\mu + i\sqrt{4\pi} \frac{M_{Pl}}{F} \partial_\mu \psi , \quad (9.59)$$

которое в результате такого поглощения приобретает массу  $m_{3/2}$ , пропорциональную  $F$ . Из требования сокращения космологической постоянной на масштабе нарушения

<sup>24</sup>Как и у гравитона, у безмассового гравитино две степени свободы на массовой поверхности.

суперсимметрии<sup>25</sup> следует связь между массой гравитино  $m_{3/2}$ , нарушающим суперсимметрию вакуумным средним  $F$  и гравитационным масштабом  $M_{Pl}$ ,

$$m_{3/2} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{F}{M_{Pl}}. \quad (9.60)$$

Поскольку никаких проявлений суперсимметрии пока экспериментально не обнаружено, величина  $\sqrt{F}$  феноменологически может принимать любое значение в интервале

$$1 \text{ ТэВ} \lesssim \sqrt{F} \lesssim M_{Pl},$$

где нижняя граница определяет масштаб масс суперпартнёров частиц Стандартной модели. Отсюда и широкий разброс оценок для массы гравитино,

$$2 \cdot 10^{-4} \text{ эВ} \lesssim m_{3/2} \lesssim M_{Pl}.$$

Формула (9.58), где в качестве  $\psi$  выступает продольная компонента гравитино, показывает, что формально лагранжиан взаимодействия гравитино с полями материи имеет довольно простой вид. Взаимодействие “исходных” поперечных компонент гравитино с полями материи подавлено планковским масштабом, как и взаимодействие обычного гравитона. Для подавляющего большинства моделей нарушение суперсимметрии происходит на масштабе энергий ниже планковского,  $\sqrt{F} \ll M_{Pl}$ , поэтому массивное гравитино взаимодействует с полями материи в основном через поглощённое голдстино — взаимодействие продольной компоненты усилено фактором  $M_{Pl}^2/F \gg 1$ . Взаимодействие продольной компоненты гравитино по-прежнему описывается формулой (9.58). Для оценки величины эффективных констант связи гравитино с полями материи можно проинтегрировать действие по частям<sup>26</sup>, получив

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{F} \psi \cdot \partial^\mu J_\mu^{SUSY}.$$

В теориях со спонтанным нарушением суперсимметрии суперток перестаёт сохраняться на уравнениях поля, что с точки зрения низкоэнергетической теории, в частности, обусловлено появившимся различием между массами партнёров и суперпартнёров. Отсюда величину эффективной безразмерной константы связи гравитино с полями материи можно оценить как отношение квадрата масс суперпартнёров  $m_S^2$  к нарушающему суперсимметрию вакуумному среднему<sup>27</sup>  $F$ ,

$$\frac{m_S^2}{F} \quad (9.61)$$

Ясно, что в большинстве феноменологически приемлемых и интересных моделей, где

$$100 \text{ ГэВ} \lesssim m_S \lesssim 10 \text{ ТэВ}$$

<sup>25</sup>Что является просто требованием равенства нулю энергии вакуума в классической теории.

<sup>26</sup>Для нас достаточно рассмотреть случай пространства Минковского. В искривлённом пространстве многие формулы существенно усложняются, что связано в первую очередь с необходимостью более аккуратного описания фермионных полей.

<sup>27</sup>Может создаться ложное впечатление, что выражение (9.61) является некорректным, поскольку в нём нельзя перейти к пределу ненарушенной суперсимметрии  $F \rightarrow 0$ . Это не так. Массовые параметры суперпартнёров (порядка  $m_S^2$ ) также пропорциональны параметру  $F$ , и величина (9.61) определяется многочисленными юкавскими и калибровочными константами связи тех взаимодействий, посредством которых после спонтанного нарушения суперсимметрии в полной теории суперпартнёры частиц Стандартной модели приобрели массы.

и

$$1 \text{ ТэВ} \ll \sqrt{F} \ll M_{Pl} ,$$

величина эффективной константы связи (9.61) мала (как правило, очень мала), чем и обусловлено существенное отличие феноменологии и космологии гравитино по сравнению с феноменологией и космологией суперпартнёров частиц Стандартной модели. Но есть между ними и общее. Как видно из выражений (9.58), (9.59), в моделях с  $R$ -чётностью гравитино является нечётной частицей, а значит при рассеянии обычных частиц Стандартной модели гравитино, как и суперпартнёры, будут рождаться парами (“пару” может помочь составить и обычный суперпартнёр). Кроме того, гравитино в широком интервале своих масс,

$$2 \cdot 10^{-4} \text{ эВ} \lesssim m_{3/2} \lesssim 100 \text{ ГэВ} ,$$

будет являться легчайшим суперпартнёром, LSP, а значит стабильной частицей. Это происходит в теориях с относительно низким масштабом нарушения суперсимметрии, см. (9.60),

$$\sqrt{F} \lesssim 10^{10} \text{ ГэВ} .$$

В таких моделях реликтовые гравитино могут претендовать на роль частиц тёмной материи. Отметим однако, что если действительно тёмную материю образуют реликтовые гравитино, то возможность прямой регистрации частиц тёмной материи в экспериментах обозримого будущего вызывает сомнения — гравитино слишком слабо взаимодействует с другими частицами.

Обсудим возможную роль гравитино в космологии. Как мы видели, гравитино взаимодействует с остальными частицами очень слабо, поэтому в ранней Вселенной процессами с участием двух гравитино можно пренебречь. В частности, можно пренебречь двухчастичным рождением гравитино, а также аннигиляцией гравитино в обычные частицы.

▷ *Задача 7. Оценить, гравитино каких масс могут эффективно рождаться в первичной плазме при температуре  $T$  в результате рассеяния частиц Стандартной модели. Убедиться, что закалка гравитино феноменологически приемлемых масс  $m_{3/2} \gtrsim 10^{-4} \text{ эВ}$  происходит задолго до эпохи нуклеосинтеза, а значит присутствие лёгких стабильных гравитино заведомо не противоречит ограничениям на число релятивистских компонент в плазме в эпоху нуклеосинтеза.*

Начнём с моделей, где гравитино находилось в равновесии с частицами первичной плазмы (другие возможности будут рассмотрены ниже). Гравитино  $\tilde{G}$  будет находиться в равновесии до тех пор, пока скорости реакций

$$X_1 + \tilde{G} \leftrightarrow X_2 + X_3 \tag{9.62}$$

(где  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  — другие частицы плазмы) превышают темп расширения Вселенной. Процесс (9.62) происходит через  $s$ -,  $t$ - и  $u$ -канальные обмены виртуальными частицами  $Y = X_1, X_2, \dots$ : см. рис. 9.9. Каждая диаграмма включает вершину взаимодействия частиц  $X_1, X_2, \dots$ , пропорциональную, например, некоторой калибровочной константе связи  $g$ , и вершину взаимодействия этих частиц с гравитино, обратно пропорциональную вакуумному среднему  $F$  и прямо пропорциональную массам суперпартнёров. В результате для сечения рассеяния (9.62) получим оценку

$$\sigma_{\tilde{G}} \simeq \alpha \frac{m_S^2}{F^2} , \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{g^2}{4\pi} .$$



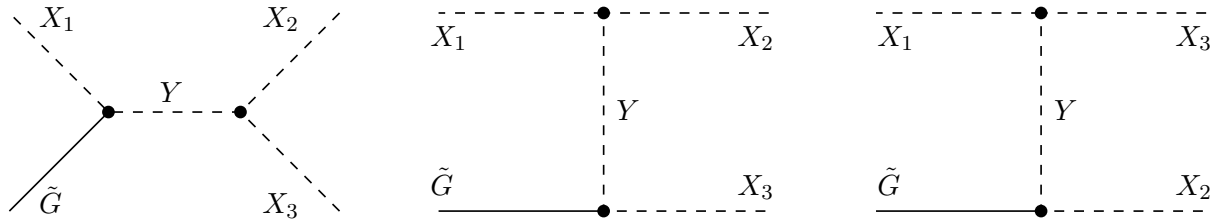


Рис. 9.9: Диаграммы, дающие вклад в  $2 \rightarrow 2$  процессы с рождением (поглощением) гравитино в первичной плазме,  $Y, X_i, i = 1, 2, 3$  — другие частицы, например, частицы Стандартной модели и их суперпартнёры (в модели с  $R$ -чётностью по крайней мере одна из частиц  $X_i, i = 1, 2, 3$  должна быть суперпартнёром).

Гравитино перестаёт взаимодействовать с плазмой при температуре  $T_f$ , определяемой условием остановки реакций (9.62),

$$\sum_x \sigma_{\tilde{G}} \cdot n_x \cdot v_{\tilde{G}} \simeq H(T_f) = \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*},$$

где  $n_x$  — равновесная плотность частиц, на которых рассеивается гравитино, а  $v_{\tilde{G}}$  — скорость гравитино. Предположим, что гравитино перестаёт взаимодействовать с частицами плазмы, когда гравитино и частицы  $X_{1,2,\dots}$  являются релятивистскими, тогда прямые и обратные процессы (9.62) замораживаются одновременно. Подставляя

$$n_x \sim T^3, \quad v_{\tilde{G}} = 1,$$

и учитывая, что имеется порядка  $g_*(T_f)$  отдельных реакций с разными частицами  $X$ , получим для температуры заделки

$$T_f \sim m_{3/2} \cdot \frac{\alpha\pi}{\sqrt{30g_*(T_f)}} \cdot \frac{F}{m_S^2}, \quad (9.63)$$

где мы выразили одно вакуумное среднее  $F$  через массу гравитино, воспользовавшись выражением (9.60), и подставили определение (3.29) для  $M_{Pl}^*$ .

Поскольку  $F \gg m_S^2$ , то ясно, что гравитино действительно отщепляется от первичной плазмы, будучи ультрарелятивистской частицей.<sup>28</sup> Таким образом, оценка современной плотности числа реликтовых гравитино производится аналогично оценке плотности числа нейтрино Стандартной модели. Соответствующее выражение для гравитино имеет вид

$$n_{3/2,0} = \frac{3}{4} \cdot \left( \frac{g_{3/2}}{2} \right) \cdot \frac{43}{11} \cdot \frac{1}{g_*(T_f)} \cdot n_{\gamma,0}, \quad (9.64)$$

<sup>28</sup>Для гравитино с  $m_{3/2} \lesssim 10$  кэВ оценка (9.63) даёт температуру его заделки меньше масштаба масс суперпартнёров,  $T_f \lesssim m_S$ . В этом случае процессы (9.62) перестают в действительности идти, грубо говоря, при  $T_f \sim m_S$ , поскольку по крайней мере одна из частиц  $X_1, X_2, X_3$  является суперпартнёром. Гравитино по-прежнему закаливается, будучи релятивистскими (см. также задачу 7), так что последующие рассуждения остаются справедливыми.

где было использовано явное выражение (5.40) для энтропии первичной плазмы при  $T < 1$  МэВ,  $n_{\gamma,0} = 410 \text{ см}^{-3}$  — современная плотность реликтовых фотонов, а  $g_{3/2}$  — число степеней свободы гравитино, причём поскольку взаимодействие поперечных степеней свободы подавлено величиной массы Планка  $M_{Pl}$ , то следует положить  $g_{3/2} = 2$ . Отщепление от плазмы поперечных степеней свободы гравитино (если они когда-либо были в равновесии с плазмой) происходит на существенно более ранних этапах эволюции Вселенной, чем закалка продольных степеней свободы, т.е. собственно голдстино.

▷ *Задача 8. Убедиться в справедливости формулы (9.64).*

▷ *Задача 9. Определить температуру отщепления от первичной плазмы поперечных степеней свободы гравитино.*

Из (9.64) следует, что доля гравитино в полной плотности энергии современной Вселенной равна

$$\Omega_{3/2} = \frac{m_{3/2} \cdot n_{3/2}}{\rho_c} = 0.2 \frac{m_{3/2}}{200 \text{ эВ}} \left( \frac{g_{3/2}}{2} \right) \cdot \left( \frac{210}{g_*(T_f)} \right) \cdot \frac{1}{2h^2} \quad (9.65)$$

Итак, стабильные гравитино с массами превышающими  $m_{3/2} \sim 1$  кэВ запрещены космологически, если в ранней Вселенной они находились в равновесии с частицами первичной плазмы. Температура заковки зависит от деталей конкретных моделей, однако в реалистичных моделях это утверждение всегда остаётся справедливым. С учётом связи между массой гравитино и нарушающим суперсимметрию вакуумным средним (9.60), получаем (почти) модельно-независимое ограничение на масштаб нарушения суперсимметрии в теории, где гравитино является LSP и находилось в равновесии в ранней Вселенной,

$$\sqrt{F} < 2 \cdot 10^3 \text{ ТэВ} .$$

В обсуждаемой ситуации гравитино в точности обеспечат нужный вклад в плотность энергии современной Вселенной, если их масса составляет

$$m_{3/2} \simeq 200 \text{ эВ} .$$

Эта величина меньше, чем ограничение снизу на массу частиц тёмной материи (9.4), следующее из изучения структур, поэтому реликтовые гравитино, находившиеся в равновесии в ранней Вселенной, не могут полностью составлять тёмную материю. Чтобы гравитино было кандидатом на роль частиц тёмной материи, требуется, чтобы максимальная температура во Вселенной была ниже  $T_f$ , а гравитино рождались неравновесным образом. К обсуждению неравновесных механизмов рождения гравитино мы и перейдём.

В ранней Вселенной гравитино могут появиться в результате распадов когерентных полевых конфигураций (например, конденсатов или  $Q$ -шаров) или “термально” при рассеянии и в распадах обычных частиц в первичной плазме. Остановимся на последнем механизме и рассмотрим суперсимметричные модели, в которых гравитино являются LSP (другой интересный случай гравитино NLSP мы обсудим ниже).

Итак, рассмотрим ситуацию, когда история горячей Вселенной начиналась с некоторой температуры  $T_{max}$  (т.е. плазмы с температурой выше  $T_{max}$  во Вселенной

никогда не было). Природа механизма, обеспечившего достаточную энергию для создания плазмы, нам здесь несущественна. Важно лишь, что начиная с некоторого момента Вселенную можно считать вышедшей на горячую стадию развития, так что в этот момент Вселенную можно считать заполненной только частицами Стандартной модели и их суперпартнёрами, имеющими равновесные функции распределения (как мы увидим ниже, добавление новых более тяжёлых частиц только усиливает космологические ограничения на модели с LSP гравитино). Никаких гравитино в плазме при температуре  $T_{max}$  нет по предположению.

На самом деле, это довольно реалистичная ситуация с точки зрения возможных вариантов начала эпохи горячей Вселенной, в частности, с точки зрения инфляционной теории. Первичный разогрев мог произойти, например, в результате распада некоторого скалярного конденсата, взаимодействующего с обычными частицами посредством юкавских, трилинейных или иных взаимодействий. В результате этого взаимодействия накопленная в конденсате энергия перейдёт другим полям, частицы которых, активно взаимодействуя друг с другом, образуют через некоторый промежуток времени горячую плазму. Величина этого промежутка времени определяется различными факторами, однако она тем больше, чем слабее взаимодействия. В момент, когда среду из обычных частиц можно уже считать термализованной плазмой (т.е. когда соответствующие релаксационные процессы завершились), температура этой плазмы равна  $T_{max}$ . Взаимодействия гравитино (голдстино) универсальны и определяются лишь величинами нарушающих суперсимметрию параметров (массами суперпартнёров и вакуумным средним  $F$ ). Предполагая, что и для конденсата соответствующие массовые параметры малы по сравнению с  $\sqrt{F}$ , так что гравитино взаимодействует с конденсатом очень слабо, получим, что в такой ситуации подавляющая доля первоначальной энергии конденсата перейдёт в энергию взаимодействующих с ним полей, а в гравитино энергия переходить не будет. Поэтому в образовавшейся плазме “первичных” гравитино будет действительно очень мало, как мы и предположили.

Гравитино могут появляться при  $T \lesssim T_{max}$  в результате распадов суперпартнёров (обычно доминируют двухчастичные распады)

$$\tilde{X}_i \rightarrow \tilde{G} + X_i, \quad i = 1, \dots \quad (9.66)$$

и в результате рассеяния частиц в плазме (доминируют процессы  $2 \rightarrow 2$ ),

$$X_i + X_j \rightarrow X_k + \tilde{G}, \quad i, j, k = 1, \dots \quad (9.67)$$

Учёт этих двух основных каналов рождения позволяет записать уравнение Больцмана для плотности числа стабильных гравитино  $n_{3/2}$  в ранней Вселенной,

$$\frac{dn_{3/2}}{dt} + 3Hn_{3/2} = \sum_i \Gamma_{\tilde{X}_i} \cdot \gamma_i^{-1} \cdot n_{\tilde{X}_i} + \langle \sigma_{tot} \rangle \cdot n_\gamma^2, \quad (9.68)$$

где  $\Gamma_{\tilde{X}_i}$  — ширина распада (9.66),  $\gamma_i$  — гамма-фактор частиц  $\tilde{X}_i$ , в релятивистском случае приводящий к уменьшению темпа их распадов,  $n_{\tilde{X}_i}$  — плотность числа распадающихся в гравитино частиц  $\tilde{X}_i$ ;  $n_\gamma = \zeta(3)T^3/\pi^2$  — плотность числа фотонов при температуре  $T = T(t)$ ,  $\langle \sigma_{tot} \rangle$  — усреднённое с равновесными функциями распределения полное сечение рождения гравитино в  $2 \rightarrow 2$  процессах (9.67). При записи последнего слагаемого в (9.68) было учтено, что эффективное рождение гравитино в  $2 \rightarrow 2$  процессах происходит при достаточно высоких концентрациях сталкивающихся частиц плазмы, то есть при высоких температурах, когда частицы можно считать релятивистскими. Плотности числа этих частиц мы оцениваем как  $n_\gamma$ . Мы пренебрегли процессами, приводящими к уменьшению плотности гравитино в результате процессов рассеяния, обратных (9.67),

$$X_k + \tilde{G} \rightarrow X_i + X_j,$$

и процессов слияния

$$X_i + \tilde{G} \rightarrow \tilde{X}_i.$$

Эти процессы несущественны,<sup>29</sup> пока плотность гравитино далека от равновесной,  $n_{3/2} \ll n_\gamma$ .

Учитывая особенности взаимодействия голдстино с другими полями, и исходя из соображений размерности, для параметров  $\Gamma_{\tilde{X}_i}$  и  $\langle \sigma_{tot} \rangle$  можно записать следующие оценки

$$\Gamma_{\tilde{X}_i} \sim \frac{M_{\tilde{X}_i}^5}{16\pi F^2} = \frac{M_{\tilde{X}_i}^5}{6m_{3/2}^2 M_{Pl}^2}, \quad (9.69)$$

$$\langle \sigma_{tot} \rangle = \text{const} \cdot \frac{m_S^2}{F^2} = \text{const} \cdot \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{m_S^2}{m_{3/2}^2 M_{Pl}^2}, \quad (9.70)$$

где фактор  $1/(16\pi)$  в формуле (9.69) появился из-за фазового объёма, а  $\text{const}$  — число, определяемое суммированием вкладов всех возможных каналов рождения гравитино, т.е. сумма численных коэффициентов, пропорциональных квадратам соответствующих калибровочных (и юкавских) констант связи. Вычисления показывают, что при высоких температурах основной вклад в минимальном суперсимметричном расширении Стандартной модели даёт рассеяние цветных частиц, при этом численно  $\text{const} \simeq 10$ .

Ни одна из величин  $\Gamma_{\tilde{X}_i}$ ,  $\langle \sigma_{tot} \rangle$  не зависит от температуры (если не учитывать уменьшения числа каналов с понижением температуры), и обе растут с уменьшением массы гравитино. Поэтому чем легче гравитино, тем быстрее идёт процесс их образования в первичной плазме. При высоких температурах  $n_{\tilde{X}_i} \sim n_\gamma \propto T^3$ ,  $\gamma_i^{-1} \propto T^{-1}$ . Отсюда ясно, что при достаточно высоких максимальных температурах  $T_{max}$  основным источником гравитино являются процессы рассеяния (9.67).

Найдём решение уравнения Больцмана (9.68), предварительно переписав его как уравнение на гравитино-энтропийное отношение  $\Delta_{3/2} = n_{3/2}/s$ . Для этого, по аналогии с решением уравнения Больцмана для случая LSP нейтралино, мы перейдём от переменной  $t$  к переменной  $T$  и воспользуемся соотношениями (5.35) и (9.46). Уравнение для  $\Delta_{3/2}$  будет иметь вид

$$\frac{d\Delta_{3/2}}{dT} = - \sum_i \frac{\Gamma_{\tilde{X}_i} \gamma_i^{-1}}{HT} \cdot \frac{n_{\tilde{X}_i}}{s} - \langle \sigma_{tot} \rangle \cdot \frac{n_\gamma}{s} \cdot \frac{n_\gamma}{HT}. \quad (9.71)$$

Заметим, что второе слагаемое справа в уравнении (9.71) почти не зависит от температуры (поскольку  $H \propto T^2$ ), а первое растёт с уменьшением температуры как  $\propto T^{-4}$  для релятивистских частиц  $X_i$ , откуда можно заключить, что распадные каналы рождения гравитино наибольший вклад дают на поздних этапах эволюции. Более того, при выполнении условия термализации для обычных частиц этот вклад практически перестаёт зависеть от величины максимальной температуры  $T_{max}$ .

---

<sup>29</sup>Учёт первых процессов привёл бы к модификации второго слагаемого в (9.68),  $\langle \sigma_{tot} \rangle n_\gamma^2 \rightarrow \langle \sigma_{tot} \rangle n_\gamma^2 \cdot \left(1 - \frac{n_{3/2}}{n_{3/2}^{eq}}\right)$ , которое учитывает “убыль” гравитино. Аналогично, процесс слияния приводит к модификации первого слагаемого  $\Gamma_{\tilde{X}} \gamma_i^{-1} n_{\tilde{X}_i} \rightarrow \Gamma_{\tilde{X}} \gamma_i^{-1} n_{\tilde{X}_i} \left(1 - \frac{n_{3/2}}{n_{3/2}^{eq}}\right)$ , где  $n_{3/2}^{eq}$  — равновесная плотность гравитино. Все эти модификации несущественны, пока  $n_{3/2} \ll n_\gamma$ .

Решение уравнения (9.71) для температур  $T \ll T_{max}$  и начального условия

$$\Delta(T_{max}) = 0 ,$$

имеет вид

$$\Delta_{3/2}(T) = \sum_i \int_T^{T_{max}} \frac{\Gamma_{\tilde{X}_i}}{\gamma_i} \cdot \frac{n_{\tilde{X}_i}}{s} \cdot \frac{dT'}{T' H(T')} + \langle \sigma_{tot} \rangle \cdot \frac{n_\gamma(T_{max})}{H(T_{max})} \cdot \frac{n_\gamma(T_{max})}{s(T_{max})} . \quad (9.72)$$

Поскольку между плотностью энтропии, плотностью числа фотонов и числом релятивистских степеней свободы в плазме справедливо соотношение

$$\frac{n_\gamma(T) \cdot g_*(T)}{s(T)} = \text{const}$$

(где const не зависит от температуры), то решение (9.72) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} n_{3/2}(T) = n_\gamma(T) \cdot \frac{g_*(T)}{g_*(T_{max})} \cdot \left[ \sum_i \int_T^{T_{max}} \frac{\Gamma_{\tilde{X}_i}}{\gamma_i} \cdot \frac{n_{\tilde{X}_i}}{n_\gamma} \cdot \frac{g_*(T_{max})}{g_*(T')} \cdot \frac{dT'}{T' H(T')} \right. \\ \left. + \langle \sigma_{tot} \rangle \cdot \frac{n_\gamma(T_{max})}{H(T_{max})} \right] . \end{aligned} \quad (9.73)$$

Отметим, что для предельных значений температур числа релятивистских степеней свободы равны

$$\begin{aligned} g_*(T \lesssim 1 \text{ МэВ}) &= \frac{43}{11} , \\ g_*(T \gtrsim m_S) &= 228.75 . \end{aligned}$$

Подчеркнём, что решение (9.73) применимо для оценки плотности до тех пор, пока гравитино не термализовались, т.е. пока справедливо неравенство  $n_{3/2} \ll n_{3/2}^{eq}(T) \simeq n_\gamma(T)$ .

Проанализируем решение (9.73). Рассмотрим вклад первого слагаемого в скобках в (9.73). Поскольку при  $n_{\tilde{X}_i} \sim n_\gamma$  подынтегральное выражение ведёт себя как  $\propto T^{-4}$  для релятивистских частиц  $X_i$ , то интеграл для вклада каждой частицы  $\tilde{X}_i$  набирается на нижнем пределе, т.е. при низких температурах (при этом частицы  $X_i$  уже можно считать слабо релятивистскими,  $\gamma_i^{-1} \simeq 1$ ). Вклады NLSP и других суперпартнёров ведут себя по-разному. Для всех суперпартнёров, кроме NLSP, помимо распада (9.66) кинематически открыты также распады в NLSP и соответствующие частицы Стандартной модели. Эти распады обусловлены обычными калибровочными или юкавскими взаимодействиями, поэтому происходят значительно быстрее распадов (9.66). По порядку величины время жизни суперпартнёра равно

$$\tau_S = \frac{1}{\Gamma_{\tilde{X}}^{tot}} = \frac{1}{\alpha m_S} ,$$

где  $\alpha$  — соответствующая константа связи. Сравнивая  $\tau_S$  с временем жизни Вселенной  $t_H \sim H^{-1}$ , найдём, что распады суперпартнёров при температурах

$$T \lesssim 0.1 \cdot \sqrt{m_S M_{Pl}}$$

являются быстрыми процессами. Это означает, что как только температура станет меньше массы соответствующего суперпартнёра, все такие частицы почти мгновенно распадутся, в основном с рождением NLSP. Отсюда ясно, что для оценки вклада в рождение гравитино от суперпартнёров не-NLSP следует обрезать интеграл в (9.73) на  $T \sim M_{\tilde{X}_i}$ . В результате получим,

$$\int_T^{T_{max}} \Gamma_{\tilde{X}_i} \cdot \frac{n_{\tilde{X}_i}}{n_\gamma} \cdot \frac{g_*(T_{max})}{g(T')} \cdot \frac{dT'}{T'H(T')} \sim \frac{g_*(T_{max})}{2g_*(M_{\tilde{X}_i})} \frac{\Gamma_{\tilde{X}_i}}{\Gamma_{\tilde{X}_i}^{tot}} \cdot \frac{\Gamma_{\tilde{X}_i}^{tot}}{H(T = M_{\tilde{X}_i})}.$$

Эта величина очень мала, поскольку

$$\frac{\Gamma_{\tilde{X}_i}}{\Gamma_{\tilde{X}_i}^{tot}} \ll 1, \quad \text{и} \quad \frac{\Gamma_{\tilde{X}_i}^{tot}}{H(T = M_{\tilde{X}_i})} \ll 1.$$

Итак, вклад распадов не-NLSP в концентрацию гравитино пренебрежимо мал.

Оценим вклад распадов NLSP в рождение гравитино. Из (9.69) будем иметь оценку для ширины NLSP,

$$\Gamma_{NLSP} = \frac{M_{NLSP}^5}{6m_{3/2}^2 M_{Pl}^2}. \quad (9.74)$$

Процессы парного рождения и аннигиляции NLSP прекращаются, и NLSP закаливается при температуре

$$T_{f,NLSP} \sim \frac{M_{NLSP}}{20}.$$

К этому времени NLSP не успевают распасться, если

$$\Gamma_{NLSP} < H(T_{f,NLSP}) = \frac{T_{f,NLSP}^2}{M_{Pl}^*}.$$

Из (9.74) следует, что распады NLSP происходят после их закалки при

$$m_{3/2} \gtrsim 3.5 \text{ кэВ} \cdot \left( \frac{M_{NLSP}}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{3/2},$$

т.е. в случае не слишком малых масс гравитино. Рассмотрим для определённости именно эту ситуацию. В ней распады NLSP в конечном итоге приводят к тому, что все закалившиеся NLSP превращаются в гравитино, т.е. число гравитино в сопутствующем объёме равно закалившемуся числу NLSP (вклад процессов рассеяния, т.е. второй вклад в (9.73), пока не учитываем; этот вклад действительно неважен, например, в моделях с  $T_{max} \lesssim m_S$ ). Отсюда сразу следует оценка для современной плотности массы гравитино (конечно, она совпадает с оценкой, получаемой интегрированием первого вклада в (9.73)),

$$\rho_{0,3/2} = \frac{m_{3/2}}{M_{NLSP}} \rho_{0,NLSP},$$

где  $\rho_{0,NLSP}$  — вклад NLSP в современную плотность энергии в случае стабильных NLSP. Последний мы оценили в разделе 9.6.1, где мы увидели, в частности, что при достаточно больших (и вполне реалистичных) массах NLSP,  $M_{NLSP} \gtrsim M_Z$ , современная плотность их массы может оказаться на один-три порядка больше, чем критическая плотность,

$$\rho_{0,NLSP} \sim (10 - 1000) \rho_c.$$

Поэтому описанный механизм может приводить к требуемому значению

$$\Omega_{3/2} \equiv \frac{\rho_{0,3/2}}{\rho_c} \simeq 0.2 ,$$

для довольно тяжёлых гравитино,

$$m_{3/2} \sim (0.1 \div 10) \text{ ГэВ} \cdot \left( \frac{100 \text{ ГэВ}}{M_{NLSP}} \right) .$$

Трудность такого сценария состоит в том, что время жизни NLSP, вычисленное согласно (9.74), оказывается большим,

$$\tau_{NLSP} \equiv \Gamma_{NLSP}^{-1} \sim 5 \cdot 10^4 \text{ с} \cdot \left( \frac{m_{3/2}}{1 \text{ ГэВ}} \right)^2 \cdot \left( \frac{100 \text{ ГэВ}}{M_{NLSP}} \right)^5 .$$

При  $\tau_{NLSP} \gtrsim 100$  с распады NLSP, сопровождающиеся рождением высокоэнергичных частиц Стандартной модели (например, фотонов для NLSP нейтралино), происходят в эпоху образования лёгких химических элементов или после неё, что может приводить к противоречию с результатами теории первичного нуклеосинтеза (см. конец Главы 8). Этой трудности не возникает, если гравитино всё же относительно лёгкие ( $m_{3/2} \lesssim 100$  МэВ) и/или NLSP имеют достаточно большие массы ( $M_{NLSP} \gtrsim 300$  ГэВ).

Отметим, что в описанном сценарии гравитино, образующиеся в распадах NLSP, являются изначально релятивистскими. Они практически не взаимодействуют с частицами обычной материи, и “остывают” только за счёт расширения Вселенной. Это означает, что гравитино эффективно выступают в роли *тёплой* тёмной материи. Они имеют нетепловые функции распределения по импульсам, что, вообще говоря, сказывается на росте мелкомасштабных структур в таких моделях из-за большой дисперсии скоростей частиц тёмной материи.

- ▷ *Задача 10. Найти функции распределения по импульсам для стабильных частиц, появившихся в результате двухчастичных распадов тяжёлых частиц, отщепившихся нерелятивистскими от первичной плазмы.*
- ▷ *Задача 11. Пусть гравитино образует тёмную материю и имеет массу 100 МэВ, а NLSP имеет массу 200 ГэВ и время жизни 10 с. Оценить пространственный размер областей, в которых неоднородности плотности подавлены по сравнению со случаем холодной тёмной материи (см. раздел 9.1).*

Рассмотрим теперь обратный случай, когда NLSP эффективно распадается до закаливания,

$$\Gamma_{NLSP} \gtrsim H(T_{f,NLSP}) \sim \frac{1}{M_{Pl}^*} \left( \frac{M_{NLSP}}{20} \right)^2 .$$

Он реализуется для лёгких гравитино,

$$m_{3/2} \lesssim 3.5 \text{ кэВ} \cdot \left( \frac{M_{NLSP}}{100 \text{ ГэВ}} \right)^{3/2} .$$

В этой ситуации плотность NLSP в момент распада не подавлена, и как видно из общего решения уравнения Больцмана (9.73), плотность гравитино быстро растёт, так

что для её вычисления требуется учитывать обратные процессы аннигиляции гравитино в NLSP при столкновении с частицами Стандартной модели, которыми мы пренебрегали. В результате плотность числа реликтовых гравитино почти совпадает с плотностью числа гравитино в моделях, где гравитино находится в равновесии в первичной плазме. В этом случае для доли гравитино в полной плотности энергии современной Вселенной с небольшими поправками справедлива оценка (9.65).

Обратимся теперь к генерации гравитино в рассеянии частиц материи. Она существенна при

$$T_{max} \gtrsim M_S .$$

В этом случае при  $T \sim T_{max}$  все частицы материи термализованы. За процессы рассеяния отвечает второе слагаемое в выражении (9.73), линейно растущее с  $T_{max}$  при  $T_{max} \gg M_S$ . В этом пределе для доли реликтовых гравитино будем иметь

$$\Omega_{3/2} = \frac{m_{3/2} n_{3/2}}{\rho_c} = \frac{m_{3/2} T_{max}}{\rho_c} \cdot n_{\gamma,0} \cdot \frac{g_*(T_0)}{g_*(T_{max})} \cdot \langle \sigma_{tot} \rangle \cdot \frac{n_\gamma(T_{max})}{T_{max} H(T_{max})} .$$

Подставляя в эту формулу выражение для полного сечения рождения гравитино (9.70), явные выражения для плотности числа фотонов и параметра Хаббла, получаем

$$\Omega_{3/2} \sim \left( \frac{200 \text{ кэВ}}{m_{3/2}} \right) \cdot \left( \frac{T_{max}}{10 \text{ ТэВ}} \right) \cdot \left( \frac{M_S}{1 \text{ ТэВ}} \right)^2 \cdot \left( \frac{15}{\sqrt{g_*(T_{max})}} \right) \cdot \frac{1}{2h^2} . \quad (9.75)$$

Отсюда очевидно ограничение сверху на максимальную температуру первичной плазмы, которое растёт линейно с увеличением массы гравитино.

Оценку (9.75) можно уточнить в результате явного численного интегрирования уравнения Больцмана (9.71). Соответствующий результат [29] для суперсимметричной модели с NLSP бино и иерархией масс  $M_{NLSP} = 50 \text{ ТэВ} \ll M_S = 1 \text{ ТэВ}$  представлен на рис. 9.10. Область параметров  $(T_{max}, m_{3/2})$  выше сплошной линии запрещена космологически из-за перепроизводства стабильных гравитино в ранней Вселенной. Это космологическое ограничение весьма существенно, поскольку в простейших моделях разогрева Вселенной температура разогрева превышает  $T \sim 10^8 \text{ ГэВ}$ .

Отметим, что при указанной иерархии в спектре масс суперпартнёров, в моделях с  $(T_{max}, m_{3/2})$  чуть ниже линии, представленной на рис. 9.10, реликтовые стабильные гравитино будут полностью обеспечивать тёмную материю Вселенной. Для областей, существенно ниже

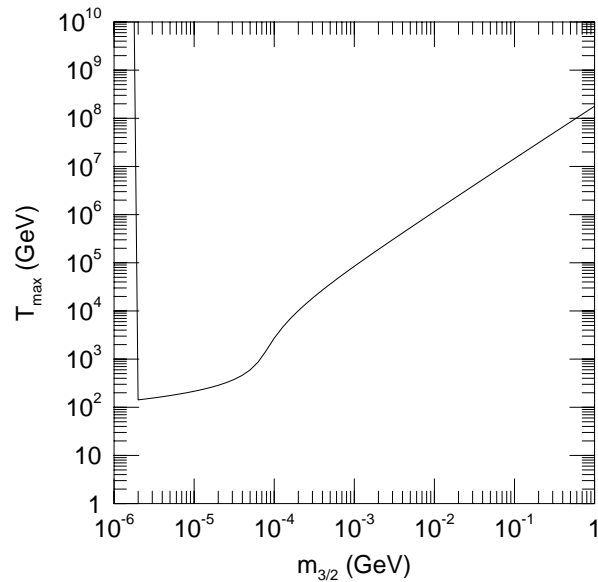


Рис. 9.10: Ограничения на параметры  $(T_{max}, m_{3/2})$ , следующие из вклада реликтовых гравитино в современную плотность энергии Вселенной. Область выше сплошной линии запрещена из-за перепроизводства реликтовых нейтралино. Сплошная линия отвечает оценке  $\Omega_{3/2} h^2 \simeq 1$ .



сплошной линии, плотность реликтовых гравитино будет недостаточна для объяснения всей тёмной материи. Как мы видим из (9.75) и из приведённого графика, для обеспечения необходимого количества тёмной материи реликтовыми гравитино требуется точная подстройка параметров разной природы: величина  $m_{3/2}$  определяется деталями модели, в то время как величина  $T_{max}$  определяется эволюцией Вселенной.

В качестве примера самосогласованного и феноменологически приемлемого суперсимметричного обобщения Стандартной модели, где многочисленные массы и константы связи в низкоэнергетической теории определяются лишь несколькими параметрами, и масштаб нарушения суперсимметрии достаточно низок, так что гравитино естественным образом оказывается LSP, рассмотрим модель с калибровочным механизмом передачи нарушения суперсимметрии в сектор полей Стандартной модели. В этой модели предполагается, что суперсимметрия нарушается спонтанно в некотором специальном секторе полей в результате нетривиальной динамики. Суперпартнёры частиц Стандартной модели приобретают нарушающие суперсимметрию массы в результате обычных калибровочных взаимодействий Стандартной модели. Связь между “скрытым” сектором, в котором происходит спонтанное нарушение суперсимметрии, и сектором полей Стандартной модели обеспечивается посредством гипотетических тяжёлых полей, получивших название *медиаторы* (messengers).

Эти поля заряжены по калибровочной группе Стандартной модели, а взаимодействие со “скрытым” сектором приводит к расщеплению масс в скалярном секторе медиаторов  $q$ ,

$$M_q^2 = M^2 \left( 1 \pm \frac{\Lambda}{M} \right), \quad \Lambda < M,$$

где  $M$  — масса медиаторов-фермионов (и масштаб масс медиаторов), а параметр  $\Lambda^2$  пропорционален вакуумному среднему  $F$ , чьё появление и привело к спонтанному нарушению суперсимметрии в полной теории. Обычно поля медиаторов выбирают так, чтобы они образовывали полные мультиплеты относительно группы теории Большого объединения (например,  $SU(5)$ ). В этом случае не портится объединение калибровочных констант связи Стандартной модели на масштабе  $M_{GUT}$ . Помимо этого, спектр медиаторов должен содержать наряду с фермионами левой киральности такое же количество фермионов правой киральности, чтобы избежать квантовых аномалий.

Медиаторы непосредственно взаимодействуют с полями из калибровочного сектора Стандартной модели. Однопетлевые квантовые поправки, обусловленные обменом виртуальными медиаторами, приводят к появлению на масштабе  $M$  ненулевых масс калибрино,

$$M_\lambda(M) \sim \frac{\alpha}{4\pi} \Lambda, \quad (9.76)$$

где  $\alpha$  — соответствующая калибровочная константа связи. Поля из скалярного сектора суперсимметричного расширения Стандартной модели получают ненулевые вклады в квадраты масс на двухпетлевом уровне теории возмущений,

$$m_{\tilde{f}}^2(M) \sim \left( \frac{\alpha}{4\pi} \right)^2 \Lambda^2. \quad (9.77)$$

Коэффициенты пропорциональности в (9.76) и (9.77), вообще говоря, различны для различных полей.

Итак, в моделях с калибровочным механизмом передачи нарушения суперсимметрии массы суперпартнёров частиц Стандартной модели зависят от их квантовых чисел, причём массы скаляров и фермионов оказываются одного порядка,

$$M_\lambda \sim m_{\tilde{f}} \sim \frac{\alpha}{4\pi} \Lambda.$$

Независимость калибровочных взаимодействий от ароматов обеспечивает на масштабе  $M$  отсутствие дополнительных (по сравнению с уже имеющимися в Стандартной модели) параметров, нарушающих аромат. К такого рода параметрам относятся, например, недиагональные в калибровочном базисе элементы матрицы квадратов масс скварков и слептонов,  $m_{f_{ab}}^2$ . Гравитационные взаимодействия в общем случае могут привести к появлению таких вкладов. Оценивая величину этих вкладов как

$$\Delta m_{f_{ab}} \sim F/M_{Pl} \sim m_{3/2},$$

найдем, что феноменологические ограничения на величины внедиагональных элементов (следующие, например, из поиска редких распадов лептонов и мезонов),

$$\frac{\Delta m_{f_{ab}}}{m_{\tilde{f}}} \lesssim 10^{-2} - 10^{-3}, \quad m_{\tilde{f}} \sim 500 \text{ ГэВ},$$

дают верхний предел на массу гравитино в этих моделях,

$$m_{3/2} \lesssim (10^{-2} - 10^{-3}) \cdot m_{\tilde{f}} \sim 1 \text{ ГэВ}.$$

Отсюда непосредственно следует ограничение сверху на масштаб нарушения суперсимметрии в этих моделях:

$$\sqrt{F} \lesssim 10^9 \text{ ГэВ}.$$

Наконец, ограничения снизу на массу гравитино и масштаб нарушения суперсимметрии следуют из общего ограничения на масштаб масс суперпартнёров,

$$M_\lambda, m_{\tilde{f}} \gtrsim 300 \text{ ГэВ}.$$

Подставляя эту оценку в (9.76), (9.77), получим

$$\begin{aligned} \sqrt{F} &\gtrsim \Lambda \gtrsim 30 \text{ ТэВ}, \\ m_{3/2} &\gtrsim 1 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

В данных моделях гравитино являются LSP. Что касается спектра суперпартнёров обычных частиц Стандартной модели, то в зависимости от параметров модели NLSP будут либо нейтрально, либо суперпартнёр правого  $\tau$ -лептона. Последний случай является более распространённым.

Отметим, что в моделях с калибровочным механизмом передачи нарушения суперсимметрии в качестве дополнительного источника гравитино выступают медиаторы и поля скрытого сектора. Их вклад может несколько изменить оценки, приведённые на рис. 9.10.

Мы рассмотрели модели с лёгкими гравитино,  $m_{3/2} \lesssim 1 \text{ ГэВ}$ , для которых основные космологические ограничения связаны с возможным перепроизводством гравитино в ранней Вселенной. В моделях с более тяжёлыми гравитино время жизни NLSP

$$\tau_{NLSP} \sim \frac{m_{3/2}^2 M_{Pl}^2}{M_S^5} \quad (9.78)$$

увеличивается настолько, что распад NLSP происходит уже в эпоху или даже несколько позже первичного нуклеосинтеза. Распады NLSP сопровождаются испусканием высокоэнергичных (с точки зрения температуры первичной плазмы) частиц, начинающих активно взаимодействовать с частицами плазмы, в частности, с первичными ядрами. Разрушение этих ядер (например, в процессе фотодиссоциации) привело бы к изменению предсказаний стандартного нуклеосинтеза для современной распространённости первичных лёгких ядер<sup>30</sup>, см. конец раздела 8.4. Учитывая связь между временем жизни NLSP и массой гравитино (9.78), ограничения, приведённые на рис. 8.4, можно представить как ограничения в плоскости параметров  $(n_{NLSP}, m_{3/2})$ . Величина  $n_{NLSP}$  модельно-зависима, поэтому заключение о космологической пригодности модели требует детальной оценки остаточной плотности NLSP. Отметим, что в качестве NLSP могут выступать, вообще говоря, любые суперпартнёры: многочисленные ограничения из экспериментов по поиску частиц тёмной материи не имеют никакого отношения к частицам, распадающимся за время  $\tau_{NLSP} \ll H_0$ .

В качестве иллюстрации применения ограничений из нуклеосинтеза рассмотрим модель mSUGRA, обсуждавшуюся в параграфе, посвящённом нейтрально. Добавим в модель лёгкое гравитино, так что в получившейся модели оно будет LSP. Массу гравитино будем рассматривать как свободный параметр (что, вообще говоря, неверно в простейших моделях супергравитации, где гравитино на один-два порядка тяжелее суперпартнёров частиц Стандартной модели). В качестве NLSP будут выступать нейтрально или суперпартнёр правого  $\tau$ -лептона.

Поскольку распад NLSP происходит при существенно более поздних временах, чем времена, при которых происходила закалка NLSP, то остаточная плотность числа NLSP при промежуточных временах и температурах оценивается так же, как если бы частицы NLSP были стабильными. Распад NLSP приводит к появлению релятивистских гравитино и релятивистских частиц Стандартной модели: фотонов,  $Z$ -бозонов,  $\tau$ -лептонов. Нестабильные частицы распадаются, рождая в конце концов энергичные фотоны, релятивистские электроны и позитроны. Помимо подогрева плазмы, эти релятивистские частицы могут разрушать лёгкие ядра, изменяя относительную концентрацию первичных химических элементов. Результаты анализа космологии в такой модели приведены на рис. 9.11.

<sup>30</sup> Отметим, что NLSP, распадающиеся в слабовзаимодействующие частицы (например, NLSP sneйтрино), не приводят к разрушению первичных ядер, а лишь добавляют дополнительные высокоэнергичные частицы (например, нейтрино) в плазму.

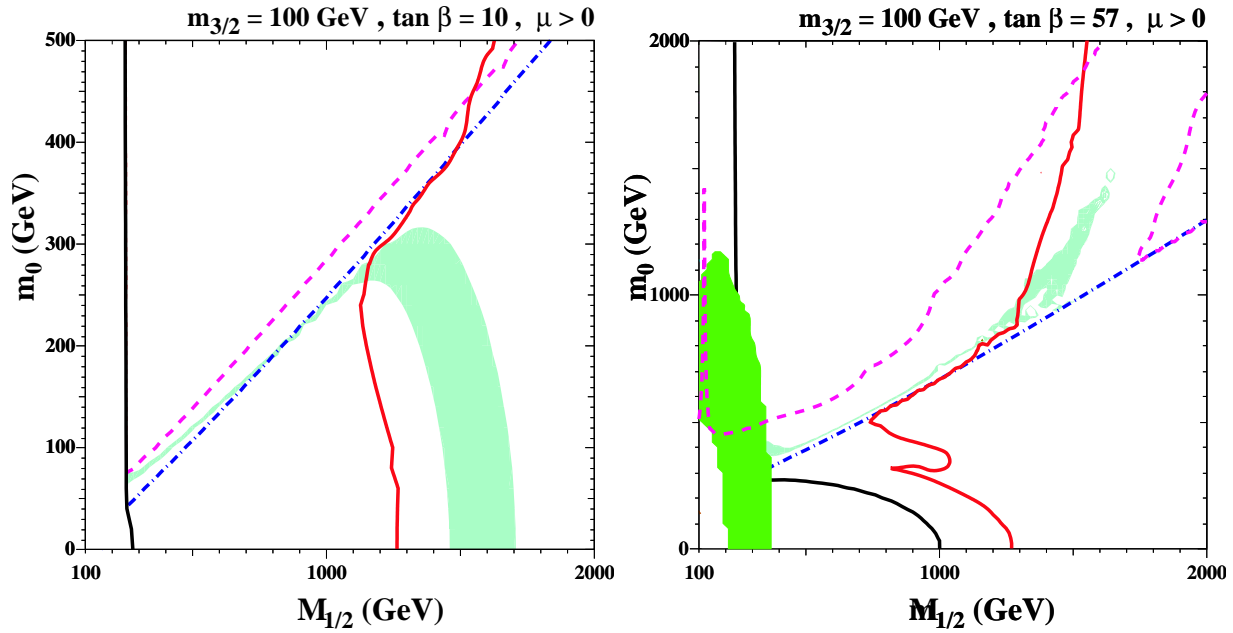


Рис. 9.11: Ограничения в пространстве параметров  $(M_{1/2}, m_0)$  модели mSUGRA (см. описание модели в разделе 9.6.1) [28]. Интересная область, где LSP является гравитино и время жизни NLSP превышает  $10^4$  с, лежит правее чёрной сплошной линии. Закрашенная зелёным область запрещена из распада  $b \rightarrow s\gamma$ . Область правее сплошной красной линии разрешена из первичного нуклеосинтеза. Штрих-пунктирная синяя линия отделяет области параметров, для которых роль NLSP играют нейтралино (верхняя часть рисунка) и легчайший слептон (правая часть рисунка). Для параметров внутри светло-голубой области частицы NLSP, если бы были совсем стабильны, составляли бы тёмную материю во Вселенной ( $0.094 \leq \Omega h^2 \leq 0.129$ ). Пунктирная линия проходит через точки, для которых гравитино давало бы вклад в современную плотность энергии Вселенной в точности равный вкладу тёмной материи. Только область ниже этой линии (на левом рисунке) и область между двумя такими линиями (на правом рисунке) разрешены космологически.

В завершение параграфа кратко обсудим модели с нестабильным, но не очень тяжёлым гравитино. Этот случай характерен для простейших моделей mSUGRA. Роль частиц тёмной материи будет играть LSP нейтралино. Время жизни гравитино, вообще говоря, весьма велико, поэтому в таких моделях может реализовываться космологический сценарий, в котором гравитино доминируют в течение некоторого этапа эволюции, а затем Вселенная разогревается за счёт распадов гравитино. Для тяжёлых гравитино основной вклад в распад дают взаимодействия “оригинальных” поперечных компонент (не голдстино), и оценка для ширины гравитино имеет вид

$$\Gamma_{3/2} \simeq \frac{m_{3/2}^3}{M_{Pl}^2}.$$

Пусть начальные температуры во Вселенной существенно превышали  $m_{3/2}$ , так что гравитино были в равновесии в первичной плазме. Поскольку гравитино закалываются релятивистскими, то при температурах  $T \lesssim m_{3/2}$ , когда гравитино являются нерелятивистскими, плотность их массы имеет порядок

$$\rho_{3/2}(T) \sim m_{3/2} T^3.$$

Начиная с некоторой температуры и до тех пор, пока гравитино не распадутся, они доминируют в полной плотности энергии Вселенной, т.е. временно реализуется пылевидная стадия эволюции, при которой

$$H = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{\sqrt{\rho_{3/2}(T)}}{M_{Pl}} \sim T \frac{\sqrt{m_{3/2} T}}{M_{Pl}}. \quad (9.79)$$

Сравнивая ширину гравитино с параметром Хаббла (9.79), найдём температуру плазмы, при которой происходит интенсивный распад гравитино,

$$T_{3/2} \simeq \left( \frac{m_{3/2}^5}{M_{Pl}^2} \right)^{1/3}.$$

После распада гравитино Вселенная разогреется до температуры

$$T_r \simeq (\rho_{3/2}(T_{3/2}))^{1/4} \simeq m_{3/2} \sqrt{\frac{m_{3/2}}{M_{Pl}}}.$$

Поскольку наиболее ранний этап в истории Вселенной, о котором у нас имеются экспериментальные данные, — это первичный нуклеосинтез, то в космологически приемлемой модели с тяжёлыми гравитино температура разогрева  $T_r$  должна как минимум превышать 1 МэВ, что даёт для массы гравитино довольно жёсткое ограничение снизу,

$$m_{3/2} > 20 \text{ ТэВ},$$

несколько ограничивающее класс моделей супергравитации, где масса гравитино на один-два порядка больше масс суперпартнёров. К моделям, где тяжёлое гравитино не давало основной вклад в плотность энергии ранней Вселенной (например, никогда не было в тепловом равновесии), это ограничение неприменимо.

## 9.7 \*Другие кандидаты

### 9.7.1 Аксионы и другие лёгкие долгоживущие частицы

Во многих обобщениях Стандартной модели имеются новые скалярные или псевдоскалярные частицы. В ряде моделей некоторые из них оказываются настолько лёгкими и слабодействующими, что их время жизни значительно превышает хаббловское время, а значит при изучении космологии ранней и современной Вселенной их можно считать стабильными и рассматривать в качестве кандидатов на роль частиц тёмной материи. Среди таких моделей, потенциально интересных с точки зрения космологии, можно перечислить модели с лёгкими аксионами (см. ниже), дилатонами, фамилонами, сголдстино и др.

Слабое взаимодействие этих частиц с частицами Стандартной модели и малая масса, определяющие столь долгое время жизни этих частиц, связаны со специфическими особенностями соответствующих обобщений Стандартной модели, направленных на решение тех или её проблем, напрямую не связанных с космологией. Если по каким-либо причинам (решение проблем Стандартной модели, соображения естественности и т.п.) параметры этих моделей автоматически принимают значения, обеспечивающие стабильность этих частиц на космологических временах, то их можно считать *естественными* кандидатами на роль частиц тёмной материи. Также представляют интерес модели, в которых параметры, определяющие время жизни лёгких частиц, оказываются свободными в широком диапазоне значений, часть которого допускает стабильность частиц на космологических временах. В этих моделях лёгкие частицы нельзя назвать естественными кандидатами, поскольку с теоретической точки зрения нет никаких причин ожидать, что параметры должны принимать

значения, обеспечивающие стабильность частиц на космологических временах. Наоборот, из этого требования соответствующие подклассы моделей можно считать более предпочтительными с точки зрения космологии и значит более достойными дальнейшего исследования.

Итак, рассмотрим общие свойства таких моделей. Поскольку по предположению новые частицы очень слабо взаимодействуют с частицами Стандартной модели, то они должны быть нейтральными относительно калибровочных взаимодействий Стандартной модели, а константы возможных юкавских взаимодействий должны быть очень малы. Для скалярных частиц  $S$  и псевдоскалярных частиц  $P$  эти требования позволяют написать для взаимодействия с векторными бозонами Стандартной модели калибровочно-инвариантные лагранжианы вида

$$\mathcal{L}_{SFF} = \frac{C_{SFF}}{4\Lambda} \cdot S F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_{PFF} = \frac{C_{PFF}}{8\Lambda} \cdot P F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}, \quad (9.80)$$

где  $F_{\mu\nu}$  — напряжённость калибровочного поля либо группы  $SU(3)_c$ , либо группы  $SU(2)_w$ , либо группы  $U(1)_y$ . Здесь параметр  $\Lambda$  имеет размерность массы и по смыслу является энергетическим масштабом новой физики, с которой и связано появление новых лёгких частиц  $S$  и/или  $P$ . Этот параметр должен быть достаточно велик, тогда взаимодействия  $S$  и  $P$  с калибровочными бозонами действительно будут слабыми. В связи с этим в (9.80) фигурируют калибровочно-инвариантные операторы низшей размерности; в принципе к выражениям (9.80) можно было бы добавить, например, члены типа  $\Lambda^{-5} S (F_{\mu\nu})^4$ , но их эффекты были бы ещё сильнее подавлены при энергиях, много меньших  $\Lambda$ . Безразмерные константы  $C_{SFF}$ ,  $C_{PFF}$  определяются деталями высокоэнергетической теории и, вообще говоря, аналогично константам взаимодействия Стандартной модели, несколько изменяются с масштабом энергии  $Q^2$ , характерным для конкретных рассматриваемых процессов. Однако для наших оценок это несущественно, и их можно считать числами порядка единицы. В обычном базисе полей Стандартной модели калибровочно-инвариантные взаимодействия (9.80) представляют собой взаимодействия скаляров и псевдоскаляров с парой фотонов  $\gamma\gamma$ , глюонами,  $Z\gamma$ -,  $ZZ$ - и  $W^+W^-$ -парами.

Взаимодействия с фермионами Стандартной модели также можно построить, используя калибровочно-инвариантные комбинации полей. Поскольку  $S$  и  $P$  являются синглетами относительно  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_y$ , никакие комбинации типа  $S\bar{\psi}\psi$  и  $P\bar{\psi}\gamma^5\psi$  не являются калибровочно-инвариантными (здесь и далее  $\psi$  обозначают поля фермионов Стандартной модели). Калибровочно-инвариантные операторы низшей размерности имеют вид  $H\bar{\psi}\psi$ , где  $H$  — хиггсовское поле, поэтому в ведущем порядке по  $\Lambda$  можно записать взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_{SHff} = \frac{Y_{SHff}}{\Lambda} \cdot S H \bar{\psi}\psi, \quad \mathcal{L}_{PHff} = \frac{Y_{PHff}}{\Lambda} \cdot P H \bar{\psi}\gamma^5\psi.$$

Предположив для определённости, что константы  $Y_{SHff}$  и  $Y_{SPff}$  по порядку величины сравнимы с обычными юкавскими константами фермионов в Стандартной модели, с учётом отличного от нуля вакуумного среднего хиггсовского поля для скаляров и псевдоскаляров можно ожидать низкоэнергетические лагранжианы взаимодействия следующей структуры:

$$\mathcal{L}_{Sff} = \frac{C_{Sff} m_f}{\Lambda} \cdot S \bar{\psi}\psi, \quad \mathcal{L}_{Pff} = \frac{C_{Pff} m_f}{\Lambda} \cdot P \bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad (9.81)$$

где безразмерные константы  $C_{Sff}$  и  $C_{Pff}$  также будем считать порядка единицы.<sup>31</sup>

Взаимодействия (9.80) и (9.81) позволяют оценить ширины распадов частиц  $P$  и  $S$  в частицы Стандартной модели (конечно, речь идёт о кинематически разрешённых распадах),

$$\Gamma_{P(S) \rightarrow AA} \sim \frac{m_{P(S)}^3}{16\pi\Lambda^2}, \quad \Gamma_{P(S) \rightarrow ff} \sim \frac{m_f^2 m_{P(S)}}{16\pi\Lambda^2}, \quad (9.82)$$

где  $A$  обозначают векторные бозоны (мы опустили возможные пороговые факторы). Из требования, чтобы время жизни частиц превышало возраст Вселенной,

$$\tau_{S(P)} = \frac{1}{\Gamma_{S(P)}} > H_0^{-1},$$

получим при фиксированном масштабе  $\Lambda$  ограничение сверху на массу частиц, которые могут претендовать на роль частиц тёмной материи,

$$m_{P(S)} < (16\pi\Lambda^2 H_0)^{1/3}. \quad (9.83)$$

Считая, что новая физика имеет масштаб  $\Lambda < M_{Pl}$ , будем иметь численную оценку

$$m_{P(S)} < 100 \text{ МэВ}. \quad (9.84)$$

Для таких масс кинематически разрешёнными являются распады в конечные состояния, содержащие фотоны, электроны и/или нейтрино. Как следует из (9.82) доминирующим распадным каналом является распад в два фотона, если  $m_{P(S)}$  не совпадает по порядку величины с массой электрона.

Рассмотрим теперь вопрос о генерации реликтовых скаляров или псевдоскаляров в ранней Вселенной. Существует несколько механизмов, приводящих к появлению этих частиц в расширяющейся Вселенной. Два из них можно считать достаточно универсальными для этого класса моделей: это генерация частиц в результате распада плоских направлений (конденсатов) и тепловое рождение частиц в первичной плазме (другие механизмы генерации будут рассмотрены ниже на примере модели с аксионами). Обсудим эти механизмы.

Пусть в ранней Вселенной некоторое скалярное поле  $\phi$  образовало ненулевой конденсат с плотностью энергии  $\rho_\phi$ . Иными словами, пусть во Вселенной имелись покоящиеся  $\phi$ -частицы. Будем считать, что масса этих частиц равна  $m_\phi$ , а взаимодействуют они со скалярами  $S$  посредством лагранжиана  $\mu\phi S^2/2$ , где  $\mu$  — константа связи размерности массы (соображения, приводимые ниже, прямо переносятся на случай псевдоскаляров  $P$ ). Тогда ширина распада  $\phi \rightarrow SS$  оценивается величиной

$$\Gamma_{\phi \rightarrow SS} \sim \frac{\mu^2}{16\pi m_\phi}. \quad (9.85)$$

Если ширины распадов  $\phi$ -частиц по другим каналам не превышают по порядку величины значение (9.85), то распад  $\phi$ -конденсата будет происходить при температуре  $T_\phi$ , такой, что<sup>32</sup>

$$\Gamma_{\phi \rightarrow SS} \sim H(T_\phi) = \frac{T_\phi^2}{M_{Pl}^*}.$$

<sup>31</sup>Вообще говоря, в конкретных моделях между различными константами связи  $\{C_{PFF}, \dots, C_{Pff}\}$  (и аналогично для случая скаляра) возможна иерархия. Для простоты мы такие случаи рассматривать не будем.

<sup>32</sup>Считаем для определённости, что плотность энергии  $\phi$ -конденсата мала по сравнению с плотностью энергии горячей компоненты среды,  $\rho_\phi \ll g_* T_\phi^4$ .

Пусть как частицы  $\phi$ , так и частицы  $S$  настолько слабо взаимодействуют с другими частицами, что не приходят в состояние равновесия в первичной плазме. Во Вселенной с температурой  $m_S < T < T_\phi$  плотность энергии, накопленной в лёгких частицах  $S$ , будет равна

$$\rho_S \sim \epsilon \rho_\phi \cdot \frac{T^4}{T_\phi^4}, \quad (9.86)$$

а при температурах  $T < m_S$ , когда скаляры  $S$  становятся нерелятивистскими,

$$\rho_S \sim \epsilon \rho_\phi \cdot \frac{m_S T^3}{T_\phi^4},$$

где  $\epsilon$  — доля энергии конденсата, перешедшая в энергию частиц  $S$ . Условие  $\rho_S(T_0) \simeq 0.2\rho_c$  определяет соотношение между параметрами теории, при выполнении которого частицы  $S$  могут объяснить тёмную материю Вселенной,

$$\begin{aligned} \Omega_S = \frac{\rho_S}{\rho_c} &\sim \frac{m_S T_0^3}{\rho_c} \cdot \frac{\epsilon \rho_\phi}{T_\phi^4} \\ &\sim 0.2 \cdot \left( \frac{m_S}{1 \text{ эВ}} \right) \cdot \frac{\epsilon \rho_\phi}{T_\phi^4} \sim 0.2. \end{aligned} \quad (9.87)$$

Отметим, что последний множитель должен быть существенно меньше единицы. Действительно, в эпоху первичного нуклеосинтеза,  $T = T_{NS} \sim 70$  кэВ вклад новых релятивистских частиц должен быть мал,  $\rho_S(T_{NS})/T_{NS}^4 \lesssim 0.03$ . Полагая сначала, что скаляры  $S$  ещё были релятивистскими, получим отсюда, воспользовавшись оценкой (9.86),

$$\frac{\rho_S(T_{NS})}{T_{NS}^4} \sim \frac{\epsilon \rho_\phi}{T_\phi^4} \lesssim 0.03.$$

В моделях, где скаляры уже были нерелятивистскими в эпоху нуклеосинтеза,

$$m_S > T_{NS} \simeq 70 \text{ кэВ}, \quad (9.88)$$

более сильное ограничение возникает из требования генерации нужного количества тёмной материи (см. (9.87)),

$$\frac{\epsilon \rho_\phi}{T_\phi^4} \lesssim 10^{-5},$$

причём, как видно из (9.87), чем больше масса  $m_S$ , тем меньше это отношение.

Теперь рассмотрим рождение лёгких скаляров или псевдоскаляров в результате рассеяния частиц Стандартной модели в первичной плазме. Поскольку взаимодействия (9.80) и (9.81) являются трёхчастичными, и соответствующие константы связи очень малы, то основными процессами в плазме при температуре  $T \ll \Lambda$ , приводящими к рождению и поглощению  $P$  или  $S$  будут процессы  $2 \leftrightarrow 2$  рассеяния

$$P(S) + X_1 \leftrightarrow X_2 + X_3. \quad (9.89)$$

Эти процессы аналогичны процессам (9.67), играющим основную роль в тепловой динамике гравитино. Диаграммы, относящиеся к процессам (9.89), схематически совпадают с диаграммами 9.9, описывающими процессы  $2 \leftrightarrow 2$  для случая гравитино (с очевидной заменой  $\tilde{G}$  на  $S$  или  $P$ ). Роль частиц  $X_1, X_2, X_3, Y$  играют те частицы Стандартной модели, которые являются релятивистскими при температуре  $T$ . Из

(9.80) и (9.81) получаем следующую оценку для сечения доминирующих процессов рассеяния (9.89), верную в интересном случае  $m_{S(P)} < T < \Lambda$ ,

$$\sigma_{S(P)} \sim \frac{\alpha}{\Lambda^2},$$

где  $\alpha = g^2/(4\pi)$ , а  $g$  — константа связи Стандартной модели, определяющая соответствующую вершину взаимодействия  $YX_2X_3$  (см. рис. 9.9). Сравнивая длину свободного пробега релятивистских частиц Стандартной модели относительно рассеяния с образованием  $S(P)$ -частиц,

$$l_{S(P)} \sim \frac{1}{\sigma_{S(P)} n_\gamma(T)},$$

и размер горизонта

$$l_H \sim \frac{1}{H(T)} \sim \frac{M_{Pl}^*}{T^2},$$

получим оценку для характерной температуры замораживания процессов с образованием и исчезновением  $S(P)$ -частиц,

$$T_{S(P)} \sim \alpha^{-1} \Lambda \cdot \frac{\Lambda}{M_{Pl}^*}. \quad (9.90)$$

Если температура в ранней Вселенной превышала величину  $T_{S(P)}$ , то  $S(P)$ -частицы находились в равновесии с частицами первичной плазмы. В интересующем нас случае, когда реликтовые  $S(P)$ -частицы образуют тёмную материю, они отщепляются, будучи релятивистскими. Действительно, требование, чтобы отщепление произошло до начала эпохи первичного нуклеосинтеза,

$$T_{S(P)} \gtrsim T_{NS} \simeq 70 \text{ кэВ}$$

даёт ограничение на масштаб новой физики<sup>33</sup>

$$\Lambda \gtrsim 2.5 \cdot 10^6 \text{ ГэВ}.$$

При таких значениях  $\Lambda$  правая часть (9.83) заведомо меньше температуры закалки (9.90), поэтому частицы действительно отщепляются, будучи релятивистскими.

Оценка доли  $S(P)$ -частиц в плотности энергии современной Вселенной проводится аналогично случаю гравитино, см. (9.65). В результате будем иметь

$$\Omega_{S(P)} = \frac{m_{S(P)} \cdot n_{S(P)}}{\rho_c} = 0.2 \cdot \left( \frac{m_{S(P)}}{200 \text{ эВ}} \right) \cdot g_{S(P)} \cdot \left( \frac{106}{g_*(T_{S(P)})} \right) \frac{1}{2h^2}. \quad (9.91)$$

Таким образом, в качестве оценки массы скаляра или псевдоскаляра мы получили то же число, что и для массы реликтовых гравитино (9.65).

Будучи релятивистскими на момент отщепления от плазмы,  $S(P)$ -частицы могли бы быть кандидатами на роль тёплой (а не холодной) тёмной материи. Однако полученное значение массы 200 эВ является слишком малым для частиц тёплой тёмной материи, см. раздел 9.1. Таким образом, находившиеся в равновесии  $S(P)$ -частицы не подходят на роль частиц тёмной материи.

---

<sup>33</sup>Мы не обсуждаем здесь другие ограничения на параметры моделей с лёгкими частицами, следующие из астрофизики и прецизионных измерений.



▷ *Задача 12.* Пренебрегая ограничением из нуклеосинтеза, оценить долю  $S(P)$ -частиц в полной плотности энергии современной Вселенной для моделей, в которых  $S(P)$ -частицы отщепляются от плазмы уже будучи нерелятивистскими, а значит могут претендовать на роль холодной тёмной материи.

Если максимальная температура в ранней Вселенной не превышала  $T_{S(P)}$ , то плотность реликтовых  $S(P)$ -частиц  $n_{S(P)}(T_0)$  подавлена по сравнению с равновесным случаем. При этом масса  $m_{S(P)}$  может достигать значения 1 кэВ и выше, согласующегося с наблюдаемой картиной мелкомасштабных структур во Вселенной. Обсуждение естественности такого решения проблемы тёмной материи требует знания деталей конкретных моделей.

В качестве примера самосогласованной модели, в которой возникают лёгкие долгоживущие слабовзаимодействующие частицы, обсудим модели с аксионами типа Печчеи–Куинн. Эти частицы участвуют в компенсационном механизме, используемом для решения проблемы  $CP$ -нарушения в сильных взаимодействиях.

Суть проблемы в следующем. К лагранжиану Стандартной модели (см. Приложение В), можно добавить следующий вклад

$$\Delta\mathcal{L}_0 = \frac{\alpha_s}{8\pi} \cdot \theta_0 \cdot G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}, \quad (9.92)$$

где  $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$  — константа сильного взаимодействия,  $G_{\mu\nu}^a$  — тензор напряжённости глюонного поля,  $\tilde{G}^{\mu\nu a} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} G_{\lambda\rho}^a$  — дуальный тензор, а  $\theta_0$  — произвольный безразмерный параметр (коэффициент  $\alpha_s/(8\pi)$  введён для удобства дальнейшего изложения). Взаимодействие (9.92) инвариантно относительно калибровочной группы Стандартной модели, однако оно нарушает  $P$ - и  $CP$ -симметрии. Отметим, что вклад (9.92) можно записать как дивергенцию от вектора (для простоты мы рассматриваем лагранжиан (9.92) в пространстве Минковского), составленного из глюонных полей  $G_\mu^a$ ,

$$\Delta\mathcal{L}_0 = \frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot \theta_0 \cdot \partial_\mu K^\mu,$$

где

$$K^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \cdot \left( G_\nu^a \partial_\lambda G_\rho^a + \frac{1}{3} f^{abc} G_\nu^a G_\lambda^b G_\rho^c \right).$$

Это означает, что лагранжиан (9.92) не даёт вклада в уравнения движения, а вклад в действие Стандартной модели можно свести к поверхностному интегралу. Для любых пертурбативных конфигураций калибровочных полей (малых возмущений относительно  $A_\mu = 0$ ) этот вклад равен нулю, однако это не так для конфигураций типа инстантонов. Это означает, что на непертурбативном уровне в квантовой хромодинамике нарушена  $CP$ -симметрия.

Кроме того, учёт квантовых эффектов, обусловленных кварками, приводит к появлению аномального вклада<sup>34</sup> вида (9.92), пропорционального фазе детерминанта массовой матрицы кварков  $\hat{M}_q$ ,

$$\Delta\mathcal{L}_m = \frac{\alpha_s}{8\pi} \cdot \text{Arg} \left( \text{Det} \hat{M}_q \right) \cdot G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}. \quad (9.93)$$

Нет никаких оснований ожидать, что  $\text{Arg} \left( \text{Det} \hat{M}_q \right) = 0$ . Ещё меньше оснований ожидать, что “древесный” вклад (9.92), и аномальный вклад (9.93) сократятся. Действительно, первый вклад имеется, вообще говоря, даже в отсутствие кварков, второй же связан с юкавским сектором теории, поскольку массы кварков в Стандартной модели пропорциональны юкавским константам связи полей кварков с хиггсовским бозоном.

Итак, к лагранжиану Стандартной модели следует дописать дополнительные вклады

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L}_\theta &= \Delta\mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_m = \frac{\alpha_s}{8\pi} \left( \theta_0 + \text{Arg} \left( \text{Det} \hat{M}_q \right) \right) G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} \\ &\equiv \frac{\alpha_s}{8\pi} \cdot \theta \cdot G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}. \end{aligned} \quad (9.94)$$

Эти вклады нарушают  $CP$ -симметрию, причём в общем случае величина параметра  $\theta$  может быть порядка единицы,

$$\theta \sim 1.$$

<sup>34</sup> Имеется в виду аномалия в аксиальном токе  $U(1)_A$ ,  $\partial_\mu J_A^\mu \propto \frac{\alpha_s}{2\pi} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}$ .

Вклад (9.94) приводит к нетривиальным феноменологическим следствиям. Одно из наиболее важных — генерация ненулевого электрического дипольного момента (ЭДМ) нейтрона<sup>35</sup>  $d_n$ , оценка которого имеет вид

$$d_n \sim \theta \cdot 10^{-16} \cdot e \cdot \text{см} . \quad (9.95)$$

Экспериментально ЭДМ нейтрона пока не обнаружен. Существующие данные позволяют довольно существенно ограничить его величину,

$$d_n \lesssim 3 \cdot 10^{-26} \cdot e \cdot \text{см} , \quad (9.96)$$

Отсюда для величины  $\theta$  возникает ограничение

$$|\theta| < 10^{-9} .$$

Необходимость найти объяснение малости  $\theta$ -параметра и называется *CP*-проблемой сильных взаимодействий.

В рамках Стандартной модели физики частиц, по-видимому, не удаётся найти решение *CP*-проблемы сильных взаимодействий.<sup>36</sup> Для её решения были предложены модели с аксионами. В этих моделях использовано следующее простое наблюдение: если бы лагранжиан кварков был на классическом уровне инвариантен относительно аксиальной симметрии  $U(1)_A$ ,

$$q_L \rightarrow e^{i\beta} q_L , \quad q_R \rightarrow e^{-i\beta} q_R , \quad (9.97)$$

то  $\theta$ -член был бы обращён в нуль в результате фазовых вращений кварковых полей. Эта симметрия получила в литературе название симметрии Печчеи–Куинн,  $U(1)_{PQ}$ . В Стандартной модели физики частиц юкавское взаимодействие хиггсовского бозона с кварками (ниже мы опускаем групповые индексы, а также индексы, нумерующие поколения)

$$Y^d \bar{Q}_L H D_R + Y^u \bar{Q}_L i\tau^2 H^* U_R \quad (9.98)$$

нарушает  $U(1)_{PQ}$ -симметрию явно: первое слагаемое в (9.98) было бы инвариантно относительно преобразований (9.97), если бы одновременно хиггсовское поле изменило фазу как  $H \rightarrow e^{i\beta} H$ , а второе слагаемое было бы инвариантным, если бы фаза хиггсовского поля изменилась на противоположную величину,  $H \rightarrow e^{-i\beta} H$ .

Стандартную модель можно обобщить так, чтобы на классическом уровне  $U(1)_{PQ}$ -симметрия (9.97) действительно была симметрией нового лагранжиана. Массовые члены в низкоэнергетическом лагранжиане кварков нарушают эту симметрию, поэтому  $U(1)_{PQ}$ -симметрия заведомо спонтанно нарушена. Это приводит к появлению безмассового (опять-таки на классическом уровне) голдстоуновского поля  $a(x)$ , получившего название аксион. Как обычно, его свойства определяются тем, что при преобразованиях симметрии (в данном случае  $U(1)_{PQ}$ ), поле аксиона преобразуется как

$$a(x) \rightarrow a(x) + \beta \cdot f_{PQ} , \quad (9.99)$$

где  $\beta$  — параметр преобразования, фигурирующий в (9.97), а  $f_{PQ}$  — параметр размерности массы, характеризующий масштаб нарушения симметрии  $U(1)_{PQ}$ . Из симметрии низкоэнергетического лагранжиана кварков относительно преобразований (9.97), (9.99) следует, что поле аксиона и массы кварков входят в лагранжиан в комбинации

$$\mathcal{L}_m = \bar{q}_R m_q e^{-2i \frac{a}{f_{PQ}}} q_L + h.c. \quad (9.100)$$

Используя (9.93), получаем отсюда, что на квантовом уровне в низкоэнергетическом лагранжиане имеется слагаемое

$$\mathcal{L}_a = C_g \frac{\alpha_s}{8\pi} \cdot \frac{a}{f_{PQ}} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a} , \quad (9.101)$$

---

<sup>35</sup>ЭДМ нейтрона характеризует взаимодействие спина нейтрона  $\mathbf{S}$  с электрическим полем  $\mathbf{E}$ , описываемое гамильтонианом

$$H = d_n \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} \cdot \mathbf{E} .$$

<sup>36</sup>Если хотя бы один из лёгких кварков был бы безмассовым (например,  $u$ -кварк), то все вклады, пропорциональные  $\theta$ , были бы ненаблюдаемы. На классическом уровне в модели имела бы глобальная киральная  $U(1)_A$ -симметрия; действием этой группы на поля безмассового кварка — вращением  $u_L \rightarrow e^{i\beta} u_L$ ,  $u_R \rightarrow e^{-i\beta} u_R$  — можно было бы воспользоваться, чтобы обратить  $\theta$  в нуль. Экспериментальные данные свидетельствуют против безмассовости лёгких кварков (в частности,  $u$ -кварка), поэтому данное решение *CP*-проблемы сильных взаимодействий, по-видимому, невозможно в рамках Стандартной модели физики частиц.

где константа  $C_g$  — порядка единицы; она определяется зарядами кварков<sup>37</sup> относительно  $U(1)_{PQ}$ . Видно, что на квантовом уровне  $U(1)_{PQ}$ -симметрия (9.97), (9.99) нарушена явно, а аксион является псевдоголдстоуновским бозоном.

Таким образом,  $\theta$ -параметр перед оператором  $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}$  получает сдвиг, зависящий от точки пространства-времени и определяемый полем аксиона,

$$\theta \rightarrow \bar{\theta}(x) = \theta + C_g \frac{a(x)}{f_{PQ}}. \quad (9.102)$$

CP-инвариантность будет иметь место в сильных взаимодействиях, если вакуумное среднее поля аксиона таково, что  $\langle \bar{\theta} \rangle = 0$ . Именно так обстоит дело в КХД. В результате нарушения киральной симметрии на масштабе, близком к масштабу сильных взаимодействий  $\Lambda_{QCD} \sim 200$  МэВ, появляется ненулевой кварковый конденсат,  $\langle \bar{q}q \rangle \sim \Lambda_{QCD}^3$ , что приводит к нетривиальному эффективному потенциалу<sup>38</sup> для  $\theta$  с минимумом в нуле,

$$V_a \sim -\frac{1}{2}\bar{\theta}^2 \frac{m_u m_d}{m_u + m_d} \langle \bar{q}q \rangle + \mathcal{O}(\bar{\theta}^4) \approx \frac{1}{8}\bar{\theta}^2 \cdot m_\pi^2 f_\pi^2 + \mathcal{O}(\bar{\theta}^4), \quad (9.103)$$

где  $m_\pi \approx 135$  МэВ и  $f_\pi \approx 93$  МэВ — масса и константа распада пиона. Из (9.103) видно, что  $\langle \bar{\theta} \rangle$  действительно равно нулю, т.е. сильная CP-проблема находит своё элегантное решение. Кроме того, из (9.102) и (9.103) следует, что аксион имеет массу<sup>39</sup>

$$m_a \approx C_g \frac{m_\pi f_\pi}{2f_{PQ}}. \quad (9.104)$$

В качестве примеров обобщения Стандартной модели, в которых имеются аксионы, приведём два наиболее популярных. В одном в Стандартную модель вводится дополнительный хиггсовский дублет, а юкавское взаимодействие кварков принимает вид

$$Y^d \bar{Q}_L H_1 D_R + Y^u \bar{Q}_L i\tau^2 H_2^* U_R. \quad (9.105)$$

При этом хиггсовские поля будут вращаться под действием  $U(1)_{PQ}$ -преобразований (9.97) следующим образом

$$H_1 \rightarrow e^{2i\beta} H_1, \quad H_2 \rightarrow e^{-2i\beta} H_2,$$

что обеспечит  $U(1)_{PQ}$ -инвариантность лагранжиана (9.105), а значит и возможность обратить  $\theta$ -член в нуль.

Глобальная  $U(1)_{PQ}$ -симметрия нарушается спонтанно вакуумными средними хиггсовских бозонов. Не будем пока добавлять в теорию другие поля. Тогда безмассовым (на классическом уровне) голдстоуновским полем будет относительная фаза хиггсовских полей  $H_1$  и  $H_2$ . При низких энергиях запишем

$$H_1 = e^{2i\beta(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad H_2 = e^{-2i\beta(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (9.106)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — вакуумные средние хиггсовских полей. В теории с двумя хиггсовскими дублетами они оба вносят вклад в массы  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонов, поэтому

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \equiv v = 247 \text{ ГэВ}.$$

Кинетический член для поля  $\beta(x)$  возникает из кинетического члена хиггсовских дублетов,

$$\mathcal{L}_{kin,H} = \partial_\mu H_1^\dagger \partial^\mu H_1 + \partial_\mu H_2^\dagger \partial^\mu H_2.$$

Подставляя сюда (9.106), получим для кинетического члена поля  $\beta(x)$ ,

$$\mathcal{L}_{kin,\beta} = \frac{f_{PQ}^2}{2} \partial_\mu \beta \partial^\mu \beta,$$

<sup>37</sup> Вообще говоря, разные типы кварков  $q_n$  могут нести разные заряды  $e_n^{(PQ)}$  относительно  $U(1)_{PQ}$ , т.е. преобразовываться относительно  $U(1)_{PQ}$  как  $q_{nL} \rightarrow e^{i\beta e_n^{(PQ)}} q_{nL}$ ,  $q_{nR} \rightarrow e^{-i\beta e_n^{(PQ)}} q_{nR}$ , где величины  $e_n^{(PQ)}$ , вообще говоря, разные для разных типов кварков  $q_n$ .

<sup>38</sup> Отметим, что поскольку симметрия (9.97) — это симметрия относительно фазовых вращений, потенциал для аксиона должен быть инвариантен относительно дискретных преобразований с  $\beta = 2\pi$ , т.е.  $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ , см. (9.99). Простейшее обобщение выражения (9.103), удовлетворяющее этому условию, имеет вид  $V_a = m_a^2 f_{PQ}^2 \cdot (1 - \cos \theta)$ .

<sup>39</sup> Тот факт, что аксион имеет массу, не противоречит теореме Голдстоуна: мы уже упоминали, что  $U(1)_{PQ}$ -симметрия нарушена явно квантовыми эффектами КХД, т.е. аксион является *псевдоголдстоуновским* бозоном.

где

$$f_{PQ} = 2\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 2v. \quad (9.107)$$

Поле аксиона связано с  $\beta(x)$  соотношением

$$a(x) = f_{PQ} \cdot \beta(x),$$

именно при таком соотношении поле  $a(x)$  будет иметь стандартный (“канонический”) кинетический член. В такой теории аксион является довольно тяжёлым: из (9.104) имеем

$$m_a \sim 15 \text{ кэВ}.$$

Взаимодействие аксиона с кварками, глюонами, а также фотонами (см. ниже) — довольно сильное. Такой аксион (его называют аксионом Вайнберга–Вильчека) экспериментально исключён.

Эта трудность обходится в моделях Дайна–Фишлера–Средницки–Житницкого (ДФСЖ) и Кима–Шифмана–Вайнштейна–Захарова (КШВЗ). В модели ДФСЖ это происходит следующим образом. Масштабы нарушений  $U(1)_{PQ}$ -симметрии и электрослабой симметрии можно сделать независимыми, добавив в модель с лагранжианом (9.105) комплексное скалярное поле  $S$  — синглет по калибровочной группе Стандартной модели — и добавив в скалярный сектор теории помимо взаимодействий, определяемых инвариантами

$$H_1^\dagger H_1, \quad H_2^\dagger H_2, \quad H_1^\dagger H_2 \cdot H_2^\dagger H_1,$$

также взаимодействия, зависящие от инвариантов

$$S^\dagger S, \quad H_1^\dagger H_2 \cdot S^2.$$

Под действием группы  $U(1)_{PQ}$  поле  $S$  будет вращаться как

$$S \rightarrow e^{2i\beta} S. \quad (9.108)$$

В этом случае поле аксиона  $a(x)$  является линейной комбинацией фаз полей  $H_1$ ,  $H_2$  и  $S$ . Повторяя выкладку, приводящую к (9.107), получим

$$f_{PQ} = 2\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_s^2}, \quad (9.109)$$

где  $v_s$  — вакуумное среднее поля  $S$ . Вакуумное среднее  $v_s$  может быть сколь угодно большим, что, как видно из (9.109), обеспечивает малость массы аксиона, и, что самое главное, слабость взаимодействия поля аксиона с фермионами Стандартной модели: соответствующие вершины взаимодействия обратно пропорциональны масштабу  $f_{PQ} \sim v_s$  нарушения  $U(1)_{PQ}$ -симметрии. Помимо взаимодействия с кварками, аксион взаимодействует и с лептонами.

Вариант КШВЗ, позволяющий обратить в нуль  $\theta$ -член, состоит во введении дополнительных полей кварков  $\Psi_R$  и  $\Psi_L$ , преобразующихся по фундаментальному представлению  $SU(3)_c$  и являющихся синглетами относительно  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ . Именно эти новые кварки нетривиально преобразуются относительно  $U(1)_{PQ}$ , обычные же кварки имеют нулевой  $U(1)_{PQ}$ -заряд. Введение дополнительного комплексного поля  $S$ , синглета относительно калибровочной группы Стандартной модели, позволяет записать  $U(1)_{PQ}$ -симметричное юкавское взаимодействие с новыми полями

$$\mathcal{L} = y_\Psi S \bar{\Psi}_R \Psi_L + h.c.$$

При этом  $S$  преобразуется относительно  $U(1)_{PQ}$  согласно (9.108).  $U(1)_{PQ}$ -симметрия нарушается ненулевым вакуумным средним поля  $S$ ,

$$\langle S \rangle = \frac{v_s}{\sqrt{2}}.$$

В данной модели поле аксиона  $a(x)$  определяется фазой поля  $S$ , и

$$f_{PQ} = 2v_s. \quad (9.110)$$

Отметим, что модель КШВЗ не содержит явно взаимодействия аксиона с обычными кварками и лептонами.

Итак, аксион является лёгкой частицей, взаимодействующей слабо с полями Стандартной модели. Как следует из (9.104), его масса связана с масштабом нарушения  $U(1)_{PQ}$ -симметрии  $f_{PQ}$ . Слабость взаимодействия объясняется тем обстоятельством, что аксион является псевдоголдстоуновским бозоном, соответствующим глобальной симметрии, спонтанно нарушенной на масштабе  $f_{PQ} \gg M_W$ . Как и для всякого

голдстоуновского поля, взаимодействие аксиона с полями, заряженными относительно нарушенной группы симметрии, описывается обобщённой формулой Голдбергера–Треймана

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{f_{PQ}} \cdot \partial_\mu a \cdot J_{PQ}^\mu, \quad (9.111)$$

где

$$J_{PQ}^\mu = \sum_f e_f^{(PQ)} \cdot \bar{f} \gamma^\mu \gamma^5 f. \quad (9.112)$$

Здесь вклад в ток  $J_{PQ}^\mu$  дают фермионы, несущие заряд  $e_f^{(PQ)}$  относительно группы  $U(1)_{PQ}$ ; величины зарядов для разных типов фермионов зависят от вариантов модели. Кроме того, имеются аномальные взаимодействия с глюонами (см. (9.101)) и фотонами,

$$\mathcal{L}_{ag} = C_g \frac{\alpha_s}{8\pi} \cdot \frac{a}{f_{PQ}} \cdot G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{\mu\nu a}, \quad \mathcal{L}_{a\gamma} = C_\gamma \frac{\alpha}{8\pi} \cdot \frac{a}{f_{PQ}} \cdot F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (9.113)$$

где безразмерные константы  $C_g$  и  $C_\gamma$  определяются деталями конкретной модели и в общем случае являются величинами порядка единицы. В полном согласии с (9.100), действие (9.111) можно проинтегрировать по частям, и записать вместо (9.111)

$$\mathcal{L}_a = -\frac{1}{f_{PQ}} \cdot a \cdot \partial_\mu J_{PQ}^\mu = -\frac{a}{f_{PQ}} \cdot \sum_f 2e_f^{(PQ)} m_f \cdot \bar{f} \gamma^5 f, \quad (9.114)$$

где мы опустили аномальные вклады, приводящие к взаимодействиям (9.113). Взаимодействия (9.113) и (9.114) действительно имеют вид (9.80), (9.81) (для случая  $P(x) = a(x)$ ), т.е. модели с аксионами являются примером рассмотренного нами класса моделей с лёгкими слабовазаимодействующими псевдоскалярами. В данном случае масса аксиона  $m_a$  не является свободным параметром: из (9.104) имеем

$$m_a \approx m_\pi \cdot \frac{f_\pi}{2f_{PQ}} \approx 0.6 \text{ эВ} \cdot \left( \frac{10^7 \text{ ГэВ}}{f_{PQ}} \right). \quad (9.115)$$

Для лёгкого аксиона основным каналом распада является распад в два фотона; время жизни аксиона  $\tau_a$  можно определить из (9.82), где следует положить  $\Lambda = 4\pi f_{PQ}/\alpha$  и учесть соотношение (9.115),

$$\tau_a = \frac{1}{\Gamma_{a \rightarrow \gamma\gamma}} = \frac{64\pi^3 m_\pi^2 f_\pi^2}{\alpha^2 m_a^5} \simeq 4 \cdot 10^{24} \text{ с} \cdot \left( \frac{\text{эВ}}{m_a} \right)^5.$$

Требуя, чтобы время жизни аксиона превышало современный возраст Вселенной,  $\tau_a > t_0 \approx 14$  млрд. лет, получим ограничение сверху на массу интересного с точки зрения космологии аксиона,

$$m_a < 25 \text{ эВ}. \quad (9.116)$$

Аксион легче 25 эВ с точки зрения его времени жизни подходит на роль тёмной материи.

Как и другие частицы, аксионы могут рождаться в космической плазме за счёт теплового механизма, т.е. в процессах

$$\begin{aligned} q + g &\rightarrow q + a, \\ q + \gamma &\rightarrow q + a, \end{aligned}$$

и т.д. Образованные в результате такого механизма аксионы не могут выступать в роли тёмной материи. Во-первых, даже если аксионы находились в тепловом равновесии, оценка их вклада в современную плотность энергии (9.91) даёт слишком малое значение  $\Omega_a$  с учётом (9.116). Во-вторых, находившиеся в равновесии аксионы выступали бы в роли *тёплой* тёмной материи, а она, как мы уже неоднократно упоминали, не может состоять из частиц легче 1 кэВ, чтобы не противоречить наблюдаемой картине мелкомасштабных структур Вселенной. Кроме того, аксионы в модели с  $f_{PQ} \lesssim 10^9$  ГэВ (т.е. аксионы тяжелее  $10^{-2}$  эВ) эффективно рождались бы в звёздах, что привело бы к изменению эволюции последних по сравнению со стандартной эволюцией. Такие модели закрыты из астрономических наблюдений.

▷ *Задача 13. Найти концентрацию реликтовых аксионов, образовавшихся за счёт теплового механизма, в зависимости от массы аксиона и максимальной температуры во Вселенной.*

Казалось бы, возможность того, что тёмная материя образована из аксионов, исключена. Это не так. Помимо теплового, в моделях с аксионами имеется два специфических механизма, приводящих к рождению аксионов в ранней Вселенной. Один механизм связан с распадом глобальных струн — топологических дефектов пространственной размерности один — имеющих в теории со спонтанным нарушением абелевой группы симметрии (роль нарушенной группы играет  $U(1)_{PQ}$ ). Другой механизм основан на осцилляциях аксионного поля при температурах  $T \lesssim \Lambda_{QCD}$ , когда имеется кварковый конденсат, явно нарушающий  $U(1)_{PQ}$ -симметрию, и для аксиона генерируется эффективный потенциал. Рассмотрим последний из этих механизмов.

При низких температурах,  $T \sim \Lambda_{QCD}$ , аксион приобретает массу (9.115) из-за вклада инстантонных конфигураций полей, участвующих в сильных взаимодействиях (инстантоны КХД). При высоких температурах,  $T > \Lambda_{QCD}$ , эти вклады подавлены, так что масса аксиона быстро падает с повышением температуры [30],

$$m_a(T) \simeq 0.1 \cdot m_a(0) \cdot \left( \frac{\Lambda_{QCD}}{T} \right)^{3.7}, \quad T > \Lambda_{QCD}. \quad (9.117)$$

Таким образом, при высоких температурах  $T \gg \Lambda_{QCD}$  аксион является эффективно безмассовым. Иными словами, потенциал для поля

$$\bar{\theta} = \theta + \frac{a}{f_{PQ}}$$

при высоких температурах отсутствует, и это поле может принимать любое значение

$$\bar{\theta} \in [0, 2\pi) .$$

Нет никаких оснований ожидать, что начальное значение  $\bar{\theta}_i$  равно нулю. При понижении температуры поле  $\bar{\theta}$  начинает однородно скатываться от значения  $\bar{\theta}_i$  в сторону минимума аксионного потенциала  $\bar{\theta} = 0$ . Однородная эволюция фазы описывается эффективным лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{f_{PQ}^2}{2} \cdot \left( \frac{d\bar{\theta}}{dt} \right)^2 - \frac{m_a^2(T)}{2} f_{PQ}^2 \bar{\theta}^2 ,$$

где для  $m_a(T)$  справедлива приближённая оценка (9.117). В результате получим следующее уравнение для фазы  $\bar{\theta}$ , эволюционирующей в расширяющейся Вселенной,

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dt^2} + 3H(T)\frac{d\bar{\theta}}{dt} + m_a^2(T)\bar{\theta} = 0. \quad (9.118)$$

Начальное условие при высоких температурах,  $T \gg \Lambda_{QCD}$  имеет вид  $\bar{\theta} = \bar{\theta}_i = \text{const}$ . При низких температурах  $T_{osc}$ , таких что

$$m_a(T_{osc}) \sim 3H(T_{osc}), \quad (9.119)$$

однородное поле  $\bar{\theta}$  начинает осциллировать с частотой  $m_a(T)$  (см. раздел 4.8.1). Из (9.117) и (9.119) получим оценку для температуры Вселенной, при которой начинаются осцилляции фазы  $\bar{\theta}$

$$T_{osc} \sim 200 \text{ МэВ} \cdot \left( \frac{m_a}{10^{-9} \text{ эВ}} \right)^{0.2} \cdot \left( \frac{\Lambda_{QCD}}{200 \text{ МэВ}} \right)^{0.7}. \quad (9.120)$$

Отметим, что для не слишком лёгкого аксиона,  $m_a > 10^{-9} \text{ эВ}$ , используемое нами приближение (9.117) справедливо, поскольку для таких аксионов  $T_{osc} > \Lambda_{QCD}$ . Умножив (9.118) на  $d\bar{\theta}/dt$ , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{d\bar{\theta}}{dt} \right)^2 \right] + 3H(T) \cdot \left( \frac{d\bar{\theta}}{dt} \right)^2 + \frac{m_a^2(T)}{2} \frac{d}{dt} (\bar{\theta}^2) = 0. \quad (9.121)$$

Учитывая осцилляционное поведение решения, при  $m_a(T) \gg H(T)$  уравнение (9.121) можно решить приближённо, воспользовавшись равенством средних по периоду осцилляций,

$$\left\langle \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{\theta}}{dt} \right)^2 f_{PQ}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m_a^2(T) \bar{\theta}^2 f_{PQ}^2 \right\rangle \equiv \frac{1}{2} \rho_a(T).$$

Переписав уравнение (9.121) как уравнение на среднюю плотность энергии аксионного поля  $\rho_a$ , удобно перейти от переменной  $t$  к переменной  $T$ , как мы это неоднократно делали в этой Главе. В результате будем иметь для эволюции плотности энергии аксионов с температурой

$$\frac{d\rho_a}{dT} - \left( \frac{3}{T} + \frac{1}{m_a(T)} \frac{dm_a(T)}{dT} \right) \rho_a = 0,$$

откуда получим

$$\rho_a \approx C_a \cdot m_a(T) \cdot T^3, \quad (9.122)$$

где  $C_a$  — некоторая безразмерная константа.

Таким образом, при  $T \ll \Lambda_{QCD}$ ,  $m_a(T) \approx m_a(0) = \text{const}$  и плотность энергии аксионного поля ведёт себя как плотность энергии невзаимодействующих нерелятивистских частиц (пыль), см. также раздел 4.8.1. Кроме того, даже когда масса аксиона изменяется,  $m_a(T) \neq \text{const}$  (например, при более высоких температурах  $T \sim \Lambda_{QCD}$ ), эффективная плотность числа аксионов ведёт себя как плотность числа невзаимодействующих нерелятивистских частиц,

$$n_a = \frac{\rho_a(T)}{m_a(T)} \propto a^{-3}(T),$$

т.е. плотность числа аксионов в сопутствующем объёме сохраняется. Нетрудно оценить плотность энергии, накопленной в аксионах к моменту начала осцилляций (иначе говоря, определить величину константы  $C_a$  в формуле (9.122)),

$$\rho_a(T_{osc}) = \frac{1}{2}f_{PQ}^2 \cdot \left( \left( \frac{d\bar{\theta}}{dt} \right)^2 + m_a^2(T_{osc})\bar{\theta}_i^2 \right) \approx \frac{1}{2}f_{PQ}^2 m_a^2(T_{osc})\bar{\theta}_i^2 ,$$

где мы учли, что перед началом осцилляций  $d\bar{\theta}/dt \approx 0$ . Отсюда получаем отношение числа аксионов к энтропии в начале осцилляций

$$\begin{aligned} \frac{n_a}{s} &= \frac{\rho_a(T_{osc})}{m_a(T_{osc})s(T_{osc})} \\ &\simeq \frac{1}{2}\bar{\theta}_i^2 \frac{f_{PQ}^2 m_a(T_{osc})}{\frac{2\pi^2}{45}g_*(T_{osc})T_{osc}^3} . \end{aligned}$$

Выражая  $m_a(T_{osc})$  через  $H(T_{osc}) = 1.66\sqrt{g_*(T_{osc})}T_{osc}^2/M_{Pl}$  с помощью (9.119), получаем

$$\frac{n_a}{s} \simeq 5.7 \cdot \bar{\theta}_i^2 \cdot \frac{f_{PQ}^2}{\sqrt{g_*(T_{osc})}M_{Pl}T_{osc}} .$$

Эта величина остаётся постоянной при последующей эволюции Вселенной, поэтому доля аксионов в современной плотности энергии равна

$$\begin{aligned} \Omega_a &= \frac{1}{\rho_c} \cdot \frac{n_a}{s} \cdot s_0 m_a \\ &\simeq 1.4 \cdot \bar{\theta}_i^2 \cdot \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{\sqrt{g_*(T_{osc})}m_a T_{osc}} \frac{s_0}{\rho_c M_{Pl}} , \end{aligned}$$

где мы выразили  $f_{PQ}$  через массу аксиона с помощью (9.115). Наконец, воспользуемся оценкой (9.120) для температуры начала осцилляций и вспомним численные значения  $s_0 \simeq 2 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$ ,  $\rho_c \simeq h^2 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ} \cdot \text{см}^{-3}$ . В результате будем иметь

$$\Omega_a \simeq 0.18 \cdot \bar{\theta}_i^2 \cdot \left( \frac{4 \cdot 10^{-6} \text{ ЭВ}}{m_a} \right)^{1.2} \cdot \frac{1}{2h^2} ,$$

где мы подставили  $g_*(T_{osc}) \simeq 60$  (см. рис. В.4) и использовали для оценки  $\Lambda_{QCD}$  величину 200 МэВ. При этом естественно считать, что начальное значение фазы  $\bar{\theta}_i$  не слишком мало,

$$\bar{\theta}_i \sim 1 .$$

Итак, аксион с массой  $m_a \sim 10^{-6} - 10^{-5} \text{ ЭВ}$  будет составлять всю тёмную материю Вселенной. Отметим, что это будет *холодная* тёмная материя, поскольку она представляет собой однородное осциллирующее поле, давление которого равно нулю (см. раздел 4.8.1),

$$p_a = \langle T_i^i \rangle = \left\langle \frac{f_{PQ}^2}{2} \left( \frac{d\bar{\theta}}{dt} \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{f_{PQ}^2}{2} m_a^2 \bar{\theta}^2 \right\rangle = 0 .$$

Иными словами, аксионы в такой картине имеют нулевые пространственные импульсы, а потому являются нерелятивистскими. Таким образом, аксионы с массой



$m_a \sim 10^{-6} - 10^{-5}$  эВ являются и феноменологически, и космологически приемлемыми кандидатами на роль частиц тёмной материи.

Отметим, что модели с аксионами — приемлемыми кандидатами на роль тёмной материи — крайне трудно подтвердить или опровергнуть экспериментально: поиск реликтовых аксионов с массой  $m_a \sim 10^{-6} - 10^{-5}$  эВ представляет собой весьма трудную, хотя и не безнадёжную задачу для современных экспериментов.

### 9.7.2 Сверхтяжёлые реликтовые частицы

Более экзотическими кандидатами на роль частиц тёмной материи являются стабильные сверхтяжёлые частицы (мы будем называть их X-частицы),

$$M_X \gg 100 \text{ ТэВ} .$$

Напомним, что сверхтяжёлые стабильные частицы, находившиеся в термодинамическом равновесии в ранней Вселенной, запрещены из-за перепроизводства тёмной материи, см. (9.24). Чем тяжелее частицы, тем меньше их сечение аннигиляции и тем при более высокой температуре замораживается их концентрация. Отсюда ясно, что если используя нетермальные механизмы рождения удалось достигнуть требуемой концентрации сверхтяжёлых X-частиц, такой что  $\Omega_X \sim 0.2$ , то такие частицы никогда не были (и не придут) в состоянии равновесия, а поэтому и ограничение (9.24) к ним будет неприменимо.

Нетермальные механизмы, которые мы кратко обсудим в этом разделе, имеют довольно общий характер и работают для широкого класса моделей. Сам факт работы этих механизмов генерации частиц в ранней Вселенной доступен экспериментальным проверкам, хотя и косвенным. Таким образом, модели со сверхтяжёлыми частицами в качестве тёмной материи в какой-то мере могут быть подвержены экспериментальной проверке.

Перечислим несколько возможных механизмов генерации тяжёлых частиц, способных в принципе обеспечить необходимое количество тёмной материи. Во-первых, это генерация за счёт столкновений лёгких частиц в первичной плазме в моделях, где максимальная температура плазмы  $T_{max}$  несколько ниже  $M_X$ . Написав уравнение Больцмана для плотности числа X-частиц  $n_X$ , и решив его с начальным условием  $n_X(T_{max}) = 0$ , можно найти, что для обеспечения условия  $\Omega_X \approx 0.2$  требуется, чтобы максимальная температура  $T_{max}$ , с которой начинается горячая стадия эволюции Вселенной, и масса X-частиц  $M_X$  были довольно жёстко связаны,

$$\frac{M_X}{T_{max}} \sim 25 + \frac{1}{2} \cdot \ln (M_X^2 \langle \sigma \rangle) , \quad (9.123)$$

где  $\sigma$  — сечение рождения X-частиц в столкновениях частиц плазмы. Тот факт, что  $M_X$  почти на полтора порядка превышает температуру  $T_{max}$ , связан с больцмановским фактором, который в данном случае обеспечивает существенное подавление концентрации частиц по сравнению с равновесным случаем.

▷ *Задача 14. Получить соотношение (9.123).*

Отметим, что условие обеспечения необходимой плотности энергии X-частиц требует подстройки двух параметров, вообще говоря, абсолютно разной природы: если величина  $M_X$  есть модельный параметр, то величина максимальной температуры

Вселенной  $T_{max}$  зависит от механизма, стоящего за первичным разогревом Вселенной.

Тяжёлые частицы могут также рождаться в ходе самого первичного разогрева — процесса, безусловно необходимого в космологических моделях с инфляционной стадией. В этих моделях все частицы появляются в результате распада инфлатона — конденсата скалярного поля, обеспечившего инфляцию. Мы рассмотрим постинфляционный разогрев во второй части книги. Процесс разогрева Вселенной в большинстве моделей довольно продолжителен по сравнению с соответствующим хаббловским временем, определяющим темп расширения на переходной стадии от инфляции к горячей Вселенной. На начальном, также довольно продолжительном этапе разогрева (много хаббловских времён) можно условно считать, что плазма характеризуется эффективной температурой, которая оказывается много больше той температуры  $T_{max}$ , которая установится во Вселенной в конце процесса, когда действительно наступит термодинамическое равновесие. В результате возможно образование тяжёлых частиц с массами, заметно превосходящими  $T_{max}$ . Как мы будем обсуждать во второй части книги, такой механизм приводит к возможности генерации частиц, например, с массой  $M_X \sim 10^{11}$  ГэВ в количестве, достаточном для объяснения тёмной материи, в инфляционных моделях с температурой разогрева  $T_{max} \sim 10^8$  ГэВ. Такое решение проблемы тёмной материи также требует довольно тонкой подстройки массы X-частиц и температуры разогрева  $T_{max}$ .

Отдельно следует отметить также возможность эффективного рождения тяжёлых частиц в самом начале эпохи постинфляционного разогрева, связанную с ускоренным распадом конденсата инфлатона благодаря параметрическому резонансу. Реализация этой возможности существенно зависит от деталей конкретной модели.

Ещё одна, более экзотическая возможность появляется в моделях, где инфляция завершается фазовым переходом первого рода. Образующиеся в результате пузыри нового вакуума начинают быстро расширяться, причём стенки разных пузырей сталкиваются (перколяция). Локально это столкновение можно представлять как столкновение частиц с характерной массой  $m$  (величина порядка энергетического масштаба фазового перехода или обратной толщины стенки, см. раздел 12.4) и характерной энергией  $\gamma m$ , где  $\gamma$  — лоренцев фактор, величина которого определяется скоростью стенок, степенным образом со временем приближающейся к скорости света. Таким образом можно ожидать генерации частиц с массами вплоть до  $M_X \sim \gamma m$ , т.е. существенно превышающими температуру последующего разогрева  $T_{max} \ll m$ . Количество произведённых частиц зависит от деталей столкновений, т.е. определяется параметрами модели. Таким образом, этот механизм генерации тяжёлых частиц также требует точной подстройки параметров для того, чтобы объяснить тёмную материю Вселенной.

Наконец, упомянем о механизме гравитационного рождения тяжёлых частиц, работающем на стадии окончания инфляции. Речь идёт о рождении частиц из вакуума в нестационарном гравитационном поле, имеющемся в данном случае благодаря быстрому расширению Вселенной на стадии инфляции. Для этого механизма не требуется каких-либо непосредственных взаимодействий между тяжёлыми X-частицами и другими полями теории. В этом смысле предсказываемая плотность числа реликтовых X-частиц является модельно независимой. Этот механизм мы также будем обсуждать во второй части книги.

Отметим, что рождение частиц гравитационным полем в расширяющейся Вселенной происходит и на других стадиях, причём наиболее эффективно генерация

происходит на этапах, когда  $M_X \sim H$ . В частности, можно показать [31], что на радиационно-доминированной стадии расширения Вселенной плотность числа частиц, образованных при  $H \sim M_X$ , даёт на более поздних временах следующий вклад в полную плотность энергии Вселенной,

$$\rho_X \simeq 5 \cdot 10^{-4} \cdot M_X \cdot \left( \frac{M_X}{t} \right)^{3/2}.$$

Отсюда для доли X-частиц в полной плотности энергии современной Вселенной получим

$$\Omega_X \sim \left( \frac{M_X}{10^9 \text{ ГэВ}} \right)^{5/2}.$$

В отсутствие инфляционной стадии стабильные частицы тяжелее  $10^9$  ГэВ будут настолько эффективно генерироваться гравитационным механизмом в ходе расширения Вселенной, что приведут к избыточной плотности тёмной материи. Инфляционная стадия является естественным фактором обрезания для этого процесса.

### 9.7.3 Экзотика

В заключение Главы отметим, что вне рамок нашего обсуждения остался целый ряд более экзотических, по сравнению с рассмотренными нами, кандидатов на роль тёмной материи — стабильных на космологических временах частиц или частицеподобных объектов. Среди них — реликтовые чёрные дыры, гипотетические чрезвычайно сильно взаимодействующие частицы, аксино — суперпартнёр аксиона, зеркальная материя и многие другие. Нередко для объяснения требуемого количества тёмной материи параметры соответствующих моделей должны принимать нереалистичные значения и/или требуется привлекать дополнительные нереалистичные предположения о ходе тех или иных экзотических процессов в ранней Вселенной. В любом случае, предсказания для плотности тёмной материи в таких сценариях оказываются сильно модельно-зависимыми.

# Глава 10

## Фазовые переходы в ранней Вселенной

Как мы упоминали во Введении, прямых экспериментальных указаний на то, что во Вселенной реализовывались температуры выше нескольких МэВ, пока не существует. Тем не менее, естественно предполагать, что Вселенная в далёком прошлом была разогрета до гораздо более высоких температур.<sup>1</sup> В связи с этим значительный интерес представляет изучение свойств космической плазмы при высоких температурах.

Как и во всякой эволюционирующей системе, допускающей термодинамическое описание, в ранней Вселенной могли происходить фазовые переходы, связанные с перестройкой структуры основного состояния при изменении температуры плазмы. При температурах выше 200 МэВ кварки и глюоны в горячей среде не образуют связанных состояний — адронов, и вещество находится в фазе кварк-глюонной плазмы. При таких температурах отсутствует и кварковый конденсат, т.е. реализуется фаза ненарушенной киральной симметрии. Если в развитии Вселенной был такой этап, когда температура плазмы превышала 1 ГэВ, то в ходе расширения Вселенной и понижения её температуры должен был произойти фазовый переход от кварк-глюонной плазмы к адронному веществу, состоящему из бесцветных (т.е., не заряженных по калибровочной группе  $SU(3)_c$ , см. Приложение В) частиц — пионов, каонов, нуклонов и других адронов. Кроме того, должен был произойти киральный фазовый переход, в результате которого образовался кварковый конденсат.

Вполне вероятно, что во Вселенной была эпоха с ещё большими температурами,  $T \gtrsim M_{EW} \sim 100$  ГэВ. Несколько огрубляя ситуацию, можно сказать, что при таких температурах электрослабая симметрия была не нарушена, а среднее значение поля Хиггса было равно нулю. При понижении температуры произошёл электрослабый фазовый переход<sup>2</sup>, в результате которого появилось ненулевое среднее хиггсовского

---

<sup>1</sup>Так в Главе 9 мы отмечали, что простой и эффективный (а потому весьма вероятный) механизм генерации небарионной тёмной материи работает при температурах порядка десятков ГэВ или выше; экспериментальное подтверждение этого механизма стало бы прямым свидетельством того, что в развитии Вселенной была эпоха, характеризовавшаяся столь высокими температурами. Многие механизмы генерации барионной асимметрии Вселенной (хотя и не все) требуют ещё больших температур, от 100 ГэВ до  $10^{15}$  ГэВ (см. Главу 11), в зависимости от конкретного механизма.

<sup>2</sup>Тонкость здесь состоит в том, что в Стандартной модели и многих её расширениях не существует калибровочно-инвариантных и локальных параметров порядка, которые различали бы фазы с нарушенной и ненарушенной электрослабой симметрией. Другими словами, эти “фазы” в действительности не различимы, и электрослабого фазового перехода может не быть вообще. Мы

поля, и произошло спонтанное нарушение электрослабой симметрии  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  до электромагнитной  $U(1)_{em}$ .

В зависимости от того, с каких максимальных температур началась горячая стадия расширения Вселенной, и от того, как устроена физика на сверхмалых расстояниях и при сверхвысоких энергиях, во Вселенной могли происходить фазовые переходы при ещё более высоких температурах. Так, если во Вселенной были температуры порядка  $10^{16}$  ГэВ (что является очень сильным и, по-видимому, мало реалистичным предположением), а физика при таких энергиях описывается теорией Большого объединения, то во Вселенной должен был произойти фазовый переход Большого объединения при температуре, сравнимой с  $M_{GUT} \sim 10^{16}$  ГэВ. Не исключено, что фазовые переходы происходили и при промежуточных температурах  $M_{EW} \ll T \ll M_{GUT}$ .

Изучение фазовых переходов в остывающей Вселенной представляет не только академический интерес, но и позволяет пролить свет на некоторые загадки современной космологии. Среди них можно отметить проблемы барионной асимметрии и тёмной материи. Фазовые переходы ответственны за возможное образование топологических дефектов в ранней Вселенной и играют важную роль в некоторых инфляционных моделях.

В этой Главе мы вспомним общую классификацию фазовых переходов и познакомимся с методами, позволяющими описывать фазовые переходы в ранней Вселенной. В основном мы будем обсуждать теории с механизмом Хиггса и интересоваться фазовыми переходами, приводящими к спонтанному нарушению соответствующей симметрии. Важным примером здесь является Стандартная модель, в которой возможен электрослабый фазовый переход; именно этот пример мы будем иметь в виду в дальнейшем. Как обычно в теории поля, применимость аналитических методов ограничена теориями с малыми константами связи (это свойство имеет не только электрослабый сектор Стандартной модели, но и квантовая хромодинамика при высоких температурах  $T \gg 1$  ГэВ), однако мы увидим, что этого недостаточно: детальное описание фазовых переходов возможно лишь тогда, когда масса бозона Хиггса в вакууме достаточно мала. Тем не менее, аналитические методы нередко позволяют сделать качественно правильные выводы относительно типа соответствующего фазового перехода и определить наиболее важные космологические следствия. Полученные результаты будут использованы в Главах, посвящённых бариогенезису и топологическим дефектам.

В теориях, где константы связи не малы, аналитическое изучение фазовых переходов “из первых принципов”, как правило, невозможно, и наиболее надёжным источником информации о них являются численные методы в рамках теории поля на решётке. Важным примером являются переходы конфайнмент-деконфайнмент и переход с нарушением/восстановлением киральной симметрии в КХД. Они происходят при температуре  $T \sim 200$  МэВ, когда “константа” связи КХД,  $\alpha_s(T)$ , велика. Мы не будем сколько-нибудь подробно изучать фазовые переходы КХД в этой книге, хотя нет сомнений, что они действительно происходили в ранней Вселенной (в предположении, что во Вселенной действительно реализовывались температуры  $T \gtrsim 200$  МэВ). Дело в том, что эти фазовые переходы, по-видимому, не оставили “следов” в современной Вселенной, доступных экспериментальной проверке (исключение составляют довольно экзотические предложения, например, формирование кварковых “самородков” с большим количеством странных кварков [32] в процессе

---

подробнее обсудим этот вопрос в разделе 10.2.

фазового перехода КХД; упомянем в этой связи ещё об аксионах как претендентах на роль тёмной материи, один из механизмов генерации которых основан на самом факте кирального фазового перехода в ранней Вселенной и мало чувствителен к динамике этого перехода см раздел 9.7.1).

## 10.1 Типы фазовых переходов

Существование фазовых переходов обусловлено несовпадением свойств основных состояний теории при нулевой и отличной от нуля температурах. Как мы покажем ниже, в теориях с механизмом Хиггса это связано с появлением нетривиальных добавок, зависящих от температуры, к эффективному потенциалу теории. При конечных температурах равновесное состояние среды соответствует минимуму большого термодинамического потенциала. Как мы обсуждали в Главе 5, химические потенциалы в ранней Вселенной при интересующих нас температурах  $T \gtrsim 1$  ГэВ пренебрежимо малы, и большой термодинамический потенциал сводится к свободной энергии  $F$ , так что в дальнейшем мы будем рассматривать именно свободную энергию того или иного состояния первичной плазмы. Чтобы понять, чему равно среднее значение хиггсовского поля  $\langle\phi\rangle_T$  при температуре  $T$ , рассмотрим систему, в которой среднее хиггсовского поля зафиксировано и равно  $\phi$  всюду в пространстве, а в остальном имеет место термодинамическое равновесие. Свободная энергия такой системы зависит, разумеется, от выбранного значения  $\phi$ , а также от температуры. В силу пространственной однородности свободная энергия пропорциональна пространственному объёму  $\Omega$ ,

$$F = \Omega V_{eff}(T, \phi) . \quad (10.1)$$

Эффективным потенциалом называют функцию  $V_{eff}(T, \phi)$  — плотность свободной энергии среды при температуре  $T$ , при условии, что среднее хиггсовского поля однородно и положено равным  $\phi$ . В термодинамическом равновесии свободная энергия находится в минимуме по отношению ко всем макроскопическим параметрам, включая среднее хиггсовского поля. Поэтому  $\langle\phi\rangle_T$  является абсолютным минимумом эффективного потенциала  $V_{eff}(T, \phi)$  при фиксированной температуре (аргумент  $T$  мы будем в дальнейшем часто опускать).

При нулевой температуре свободная энергия сводится к энергии системы, а эффективный потенциал совпадает со скалярным потенциалом  $V(\phi)$ , входящим в действие теории поля.<sup>3</sup> При конечных температурах  $V_{eff}(T, \phi)$  не совпадает с  $V(\phi)$ . В результате, например, симметрия, спонтанно нарушенная при нулевой температуре, может *восстанавливаться* при высоких температурах. Это общее утверждение, относящееся к любой системе. В частности, такое явление имеет место в Стандартной модели физики частиц.<sup>4</sup> При нулевой температуре основное состояние не инвариантно относительно калибровочных  $SU(2)_w \times U(1)_y$  преобразований — симметрия спонтанно нарушена до калибровочной группы  $U(1)_{em}$  благодаря ненулевому вакуумному среднему

$$v = \langle\phi\rangle \approx 247 \text{ ГэВ}$$

<sup>3</sup>В действительности и при нулевой температуре эффективный потенциал не совпадает со скалярным потенциалом, фигурирующим в классическом действии. Это связано с наличием квантовых поправок. В теориях со слабой связью квантовые поправки к эффективному потенциалу часто оказываются малыми.

<sup>4</sup>Подчеркнём ещё раз, что здесь мы огрубляем ситуацию, см. обсуждение в разделе 10.2.

дублета бозонов Хиггса (см. рис. 10.1a). При ненулевой температуре эффектив-

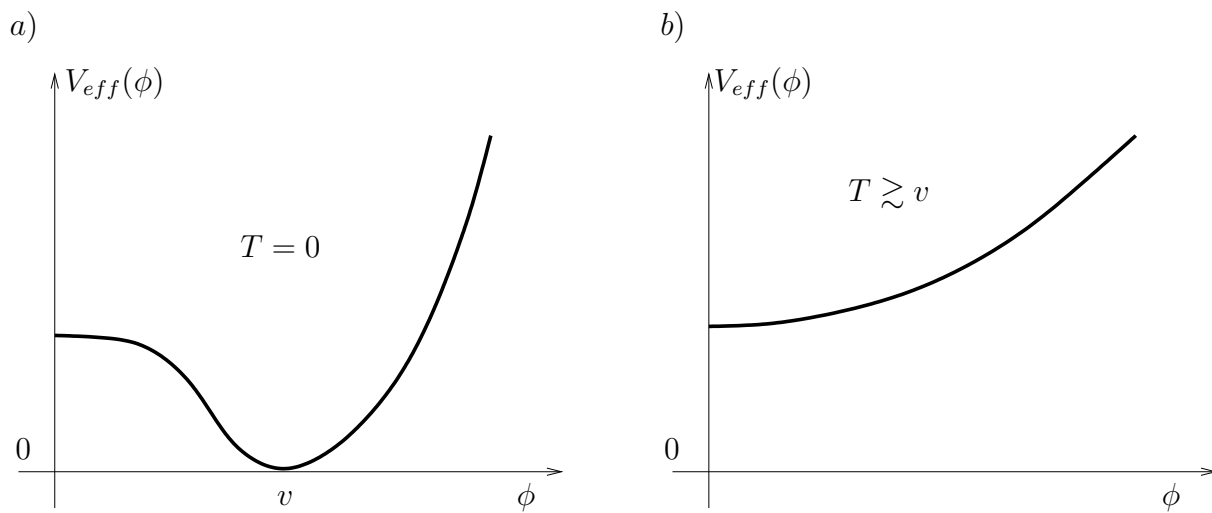


Рис. 10.1: Форма эффективного потенциала хиггсовского поля при нулевой (а) и высокой (б) температурах.

ный потенциал хиггсовского сектора Стандартной модели получает дополнительные вклады, растущие с увеличением температуры. С учётом этих вкладов среднее значение поля Хиггса оказывается равным нулю при высоких температурах  $T \gtrsim v$ , т.е. симметрия восстанавливается (см. рис. 10.1b).

С понижением температуры переход от  $\langle \phi \rangle_T = 0$  к  $\langle \phi \rangle_T \neq 0$  происходит при некоторой температуре  $T_c$  — температуре фазового перехода, и в зависимости от параметров теории может быть довольно продолжительным или почти мгновенным, происходить сразу во всём объёме системы, или в отдельных её частях.

Традиционно выделяют два типа фазовых переходов — фазовые переходы I рода и II рода. С точки зрения общего формализма термодинамики фазовый переход I рода сопровождается скачком теплоёмкости (в теории поля этому отвечает скачок среднего поля  $\langle \phi \rangle_T$  как функции температуры, см. рис. 10.2a), в то время как для

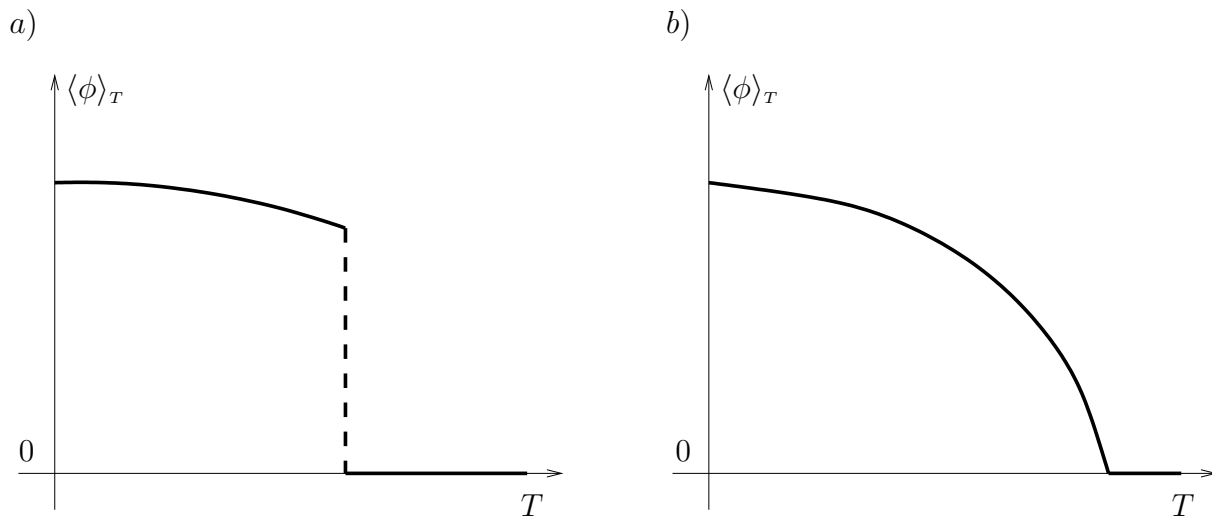


Рис. 10.2: Величина среднего поля  $\langle \phi \rangle_T$  как функция температуры для систем с фазовым переходом I рода (а) и II рода (б).

фазового перехода II рода характерно непрерывное поведение теплоёмкости (и сред-

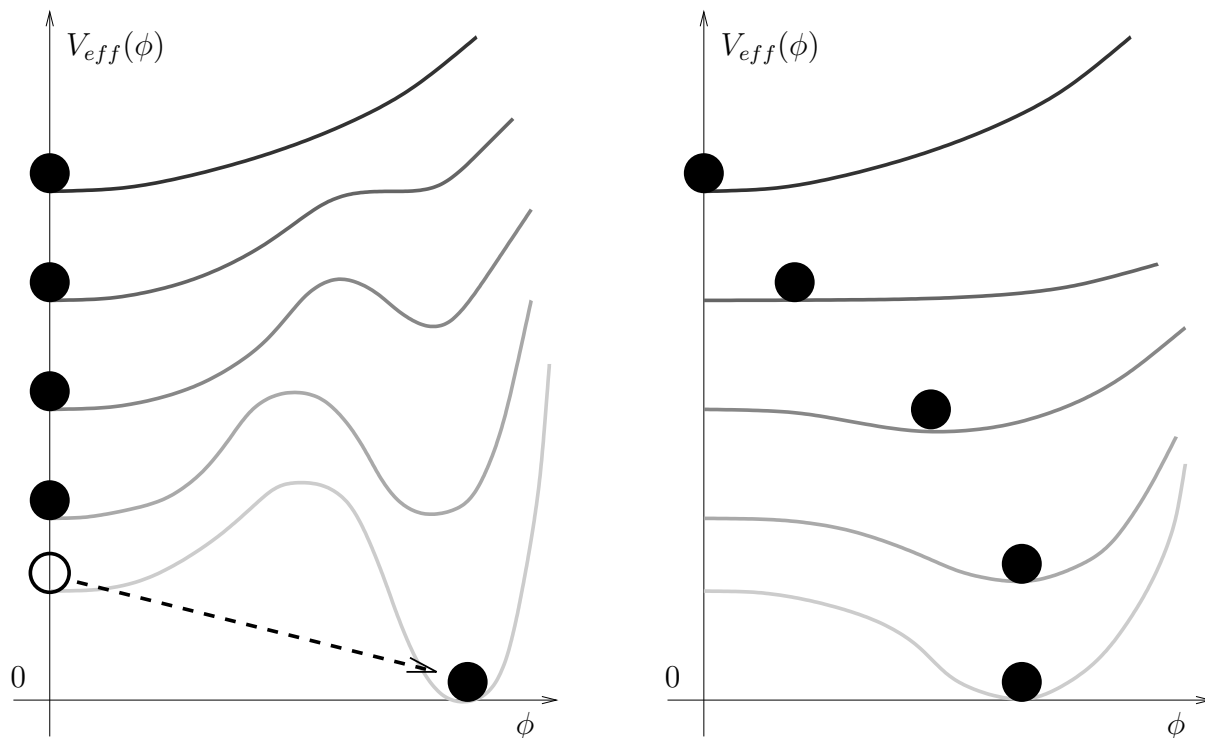


Рис. 10.3: Формы эффективного потенциала  $V_{eff}(\phi)$  при различных температурах: более высоким температурам соответствуют более тёмные кривые, изображённые выше. Левая половина рисунка относится к системам с фазовым переходом I рода, правая — к системам с фазовым переходом II рода. Чёрные кружки показывают состояние системы — величину среднего поля  $\langle\phi\rangle_T$ .

него поля  $\langle\phi\rangle_T$ ) при изменении температуры (см. рис. 10.2b). Это отличие можно проиллюстрировать, изобразив на графиках характерные для фазовых переходов I и II родов семейства эффективных потенциалов  $V_{eff}(\phi, T)$  как функции  $\phi$  при различных значениях температуры  $T$ , см. рис. 10.3. Левая половина рисунка относится к фазовым переходам I рода, завершающимся скачкообразным изменением значения  $\langle\phi\rangle_T$ . Правая половина рисунка относится к фазовому переходу II рода — непрерывному изменению температурного среднего поля  $\langle\phi\rangle_T$ .

Самым известным примером фазового перехода I рода является кипение жидкости. Примерами фазового перехода II рода служат переходы в ферромагнетиках, переходы порядок-беспорядок в сплавах металлов, переходы в состояния сверхпроводимости и сверхтекучести.

Представление о различных фазах, в которых может находиться система, и о соответствующих фазовых переходах имеет наиболее простой смысл в тех случаях, когда фазы различаются симметрией и/или имеется параметр (его называют *параметром порядка*), равный нулю в одной фазе и отличный от нуля в другой. Указанные выше примеры фазовых переходов II рода относятся к этой категории (параметром порядка в ферромагнетике служит спонтанная намагниченность, в сверхпроводнике — плотность конденсата куперовских пар и т.д.). К этой категории относится и киральный фазовый переход КХД, параметром порядка здесь служит кварковый конденсат. Если же система такова, что в ней параметра порядка нет, то в ней также возможны фазовые переходы, но их существование или отсутствие может зависеть



от внутренних или внешних параметров. Известный пример — переход вода–пар, который является фазовым переходом I рода при низких давлениях, и не является фазовым переходом вообще при высоких давлениях. В последнем случае свойства среды (например плотность) непрерывно, хотя и довольно быстро, меняются с изменением температуры; в этом случае говорят, что имеет место не фазовый переход, а гладкий кроссовер. Эта же ситуация реализуется в электрослабом секторе Стандартной модели физики частиц: если все остальные параметры модели фиксированы, то при малой вакуумной массе хиггсовского бозона происходит фазовый переход I рода при температуре  $T \sim 100$  ГэВ (в этом мы убедимся в разделе 10.2), а при большой массе имеет место гладкий кроссовер [33].

Динамика протекания фазовых переходов совершенно различна для фазовых переходов I и II рода. Нас интересует случай, когда темп изменения температуры со временем мал по сравнению с характерным темпом взаимодействий частиц в среде; именно этот случай реализуется в ранней Вселенной. При фазовом переходе II рода характеристики среды (например, среднее значение  $\langle\phi\rangle_T$ ) медленно меняются сразу во всём пространстве при медленном уменьшении температуры; в каждый момент времени среда находится в состоянии, близком к состоянию термодинамического равновесия. Это же относится и к гладкому кроссоверу. Иная ситуация имеет место при фазовом переходе I рода. До фазового перехода среднее значение  $\langle\phi\rangle_T$  равно нулю, но как только минимум эффективного потенциала с  $\phi = \langle\phi\rangle_T \neq 0$  станет глубже минимума с  $\phi = 0$ , термодинамически выгодным станет основное состояние с  $\langle\phi\rangle_T \neq 0$ , см. рис. 10.4. Сразу во всём пространстве переход из состояния с  $\langle\phi\rangle = 0$  в состояние с  $\langle\phi\rangle_T \neq 0$  произойти не может: среднее значение поля  $\phi$  при таком переходе изменялось бы сразу во всём пространстве от  $\phi = 0$  до  $\phi = \langle\phi\rangle_T$ , и в системе с бесконечным объёмом свободная энергия (10.1) в промежуточных состояниях была бы бесконечно велика по сравнению с её начальным значением (соответствующим  $\phi = 0$ ). Переход из состояния с  $\phi = 0$  в состояние с  $\phi = \langle\phi\rangle_T$  происходит путём образования пузырей новой фазы, их последующего расширения и слияния, см. рис. 10.5. Образование в среде с  $\phi = 0$  пузырька, внутри которого  $\phi = \langle\phi\rangle_T \neq 0$ , — это локальный в пространстве процесс, и он может происходить за счёт тепловых флуктуаций.<sup>5</sup> Если образовавшийся пузырёк имеет достаточно большой размер, то термодинамически выгодным является его последующее расширение, поскольку отрицательная (по сравнению с исходным состоянием  $\phi = 0$ ) свободная энергия внутренней части пузырька пропорциональна его объёму, а положительная свободная энергия поверхности (стенки) пропорциональна её площади. Расширяющиеся пузырьки сталкиваются своими стенками, и после этого процесса “кипения” система в конечном итоге возвращается в пространственно-однородное состояние термодинамического равновесия, но уже с  $\phi = \langle\phi\rangle_T \neq 0$ , а высвободившаяся свободная энергия переходит в тепло.

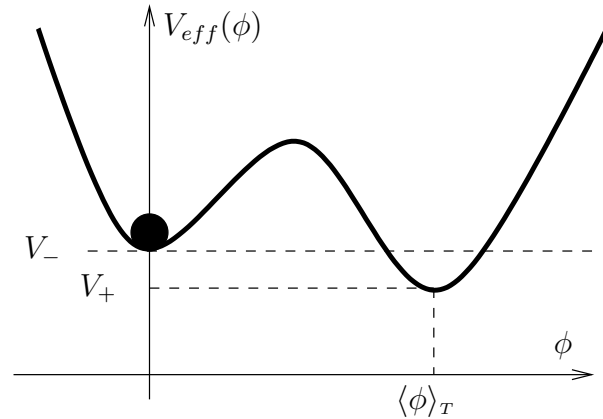


Рис. 10.4: Вид эффективного потенциала системы, в которой происходит фазовый переход I рода.

<sup>5</sup>Иногда доминирующим процессом является квантовое туннелирование.

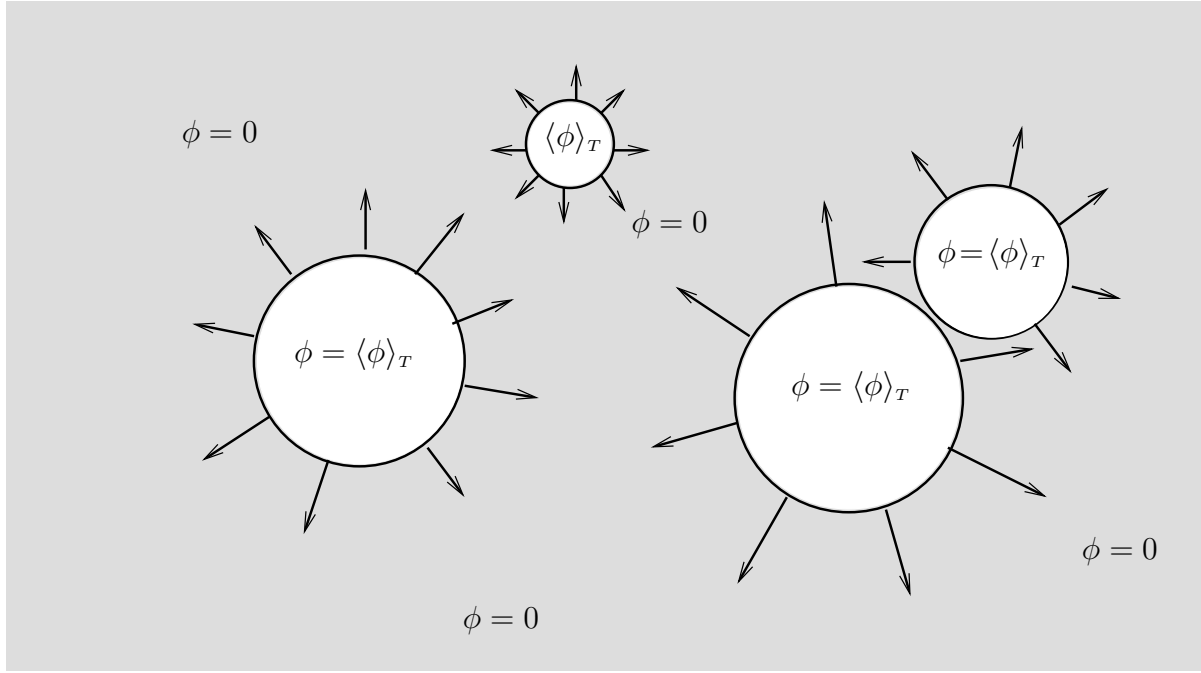


Рис. 10.5: Образование пузырей нового вакуума при фазовом переходе I рода.

Описанный процесс “кипения” среды — это сильно неравновесный процесс. Мы уже отмечали, что в эволюции горячей Вселенной наиболее важны этапы, когда космическая плазма не находится в состоянии термодинамического равновесия. Поэтому именно фазовые переходы I рода, в отличие от фазовых переходов II рода и переходов типа гладкого кроссовера, представляют особый интерес для космологии.

Оценим вероятность образования пузыря новой фазы при температуре  $T$ . Пусть  $V_- = V_{eff}(T, \phi = 0)$  — плотность свободной энергии старой фазы, а  $V_+ = V_{eff}(T, \phi = \langle \phi \rangle_T)$  — плотность свободной энергии новой фазы,  $V_+ < V_-$ , см. рис. 10.4. Свободная энергия пузыря размера  $R$ , отсчитываемая от свободной энергии среды с  $\phi = 0$  без пузыря, складывается из двух частей — объёмной и поверхностной. Первая связана с тем, что внутри пузыря плотность свободной энергии  $V_+$  меньше плотности энергии окружающей среды; она отрицательна и равна

$$\frac{4}{3}\pi R^3 (V_+ - V_-) .$$

Поверхностная часть возникает из-за того, что поле  $\phi$  вблизи поверхности неоднородно и отличается и от нуля, и от  $\langle \phi \rangle_T$ ; вклад в неё вносят как эффективный потенциал  $V_{eff}(\phi)$ , так и градиентные слагаемые в свободной энергии — функционале  $F[\phi(\mathbf{x})]$ . Поверхностное слагаемое в свободной энергии пропорционально площади поверхности пузыря и равно  $4\pi R^2 \cdot \mu$ , где  $\mu$  — свободная энергия единицы поверхности (поверхностное натяжение). Таким образом, свободная энергия пузыря размера  $R$ , отсчитываемая от свободной энергии старой фазы, равна (см. рис. 10.6)

$$F(R) = 4\pi R^2 \mu - \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \Delta V , \quad (10.2)$$

где

$$\Delta V = V_- - V_+ > 0$$

— разность плотностей свободной энергии старой и новой фаз (скрытая теплота фазового перехода). Из (10.2) видно, что при достаточно малых размерах свободная энергия пузырька убывает с *уменьшением*  $R$ ; это означает, что спонтанно образовавшийся пузырёк малого размера будет схлопываться за счёт сил поверхностного натяжения, и система возвратится в исходное однородное состояние с  $\phi = 0$ . Наоборот, при достаточно больших  $R$  свободная энергия убывает с *ростом*  $R$ , т.е. пузырёк будет неограниченно расширяться, и система перейдёт в новую фазу. Минимальный размер, с которого пузырёк начнёт расширяться, определяется уравнением

$$\frac{\partial F}{\partial R} = 0 ,$$

т.е. он равен

$$R_c = \frac{2\mu}{\Delta V} . \quad (10.3)$$

Пузырёк такого размера называют критическим пузырём; его свободная энергия положительна и равна

$$\begin{aligned} F_c &= 4\pi R_c^2 \mu - \frac{4\pi}{3} R_c^3 \cdot \Delta V \\ &= \frac{16\pi}{3} \frac{\mu^3}{\Delta V} . \end{aligned} \quad (10.4)$$

Отметим, что как размер критического пузыря, так и его свободная энергия растут при уменьшении  $\Delta V$  — разности плотностей свободной энергии старой и новой фазы.

Спонтанное образование пузырей новой фазы в горячей среде происходит за счёт тепловых флуктуаций, т.е. тепловых скачков на вершину барьера, изображённого на рис. 10.6. Вероятность такого скачка в единицу времени в единице объёма определяется в основном больцмановским фактором  $e^{-F_c/T}$ :

$$\Gamma = AT^4 e^{-\frac{F_c}{T}} \quad (10.5)$$

(формула Аррениуса), где множитель  $T^4$  введён из соображений размерности, а предэкспонента  $A$  не слишком сильно зависит от температуры и других параметров. Отметим, что формула (10.5) справедлива при  $F_c \gg T$ , т.е. когда вероятность образования пузырька мала. Из этой формулы и (10.4) сразу следует, что при конечном темпе остывания среда некоторое время находится в переохлаждённом состоянии с  $\phi = 0$ , когда термодинамически уже выгодна новая фаза, но  $\Delta V \equiv V_- - V_+$  всё ещё настолько мало, что темп образования пузырей меньше темпа остывания. В космологическом контексте образование пузырей новой фазы начинает эффективно происходить тогда, когда вероятность образования одного пузыря в хаббловском объёме за хаббловское время становится порядка единицы, т.е.

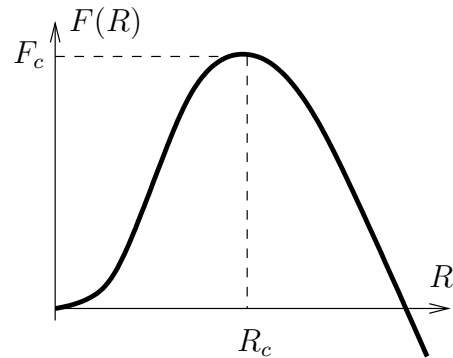


Рис. 10.6: Свободная энергия пузыря новой фазы как функция его радиуса.

$$AT^4 e^{-\frac{F_c}{T}} \sim H^4(T) = \left( \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \right)^4 . \quad (10.6)$$

В конкретных моделях это соотношение определяет, в какой степени переохлаждается космическая плазма до фазового перехода, и какая скрытая теплота  $\Delta V$  выделяется в результате фазового перехода. Можно сделать, впрочем, и общий вывод о картине фазового перехода первого рода во Вселенной (если такие происходили): фазовый переход начинается тогда, когда в хаббловском объёме образуются *единичные* пузырьки. Их размер в момент образования определяется микроскопической физикой <sup>6</sup> и составляет величину, много меньшую хаббловского размера  $H(T)$ , а расстояние между их центрами сравнимо с хаббловским размером. Пузыри успевают расшириться на много порядков до того, как их стенки начнут сталкиваться, а новых пузырьков за это время образуется мало.

Для примера, при  $T \sim 100$  ГэВ (электрослабый масштаб) хаббловский размер составляет

$$H^{-1} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \sim 1 \text{ см}.$$

Размер пузырька в момент образования составляет, грубо говоря, величину порядка  $T^{-1}$  (в действительности он на один-два порядка больше), т.е.  $R_c \sim 10^{-16}$  см. Итак, фазовый переход во Вселенной происходит путём образования в кубическом сантиметре космической плазмы нескольких пузырьков субъядерного размера, их расширения до макроскопических размеров и слияния в результате столкновения стенок.

В заключение обсудим в общих чертах, как найти поверхностное натяжение стенки пузыря. Мы будем пренебрегать кривизной стенки (т.е. считать размер пузыря  $R$  большим) и считать разность свободных энергий старой и новой фазы  $\Delta V$  малой величиной. В этом случае конфигурация поля  $\phi_w(r)$  в области стенки является минимумом свободной энергии  $F(\phi(r))$  как функционала теперь уже неоднородного поля  $\phi(r)$ . При этом с одной стороны стенки, при  $r \ll R$  (т.е. внутри пузыря), поле стремится к  $\phi = \phi_+$ , а с другой стороны стенки, при  $r \gg R$  — к  $\phi = 0$ . Если  $R$  достаточно велико, то внутри пузыря координату  $(r - R)$  можно формально считать стремящейся к  $-\infty$ , и записать граничные условия как

$$\phi_w(x) \rightarrow \langle \phi \rangle_T \quad \text{при} \quad (r - R) \rightarrow -\infty, \quad (10.7)$$

$$\phi_w(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (r - R) \rightarrow +\infty. \quad (10.8)$$

Будем предполагать, что температурные поправки к градиентному члену в функционале энергии малы (это предположение действительно выполняется в теориях со слабой связью). Тогда свободная энергия (отсчитываемая от свободной энергии старой фазы) как функционал поля  $\phi(r)$  запишется в виде

$$F[\phi] = \int_0^\infty 4\pi r^2 dr \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V_{eff}(\phi) - V_- \right]. \quad (10.9)$$

При большом размере пузыря толщина стенки мала по сравнению с  $R$ , и медленно меняющийся фактор  $4\pi r^2$  можно считать постоянным в области стенки, т.е.

$$F[\phi] = 4\pi R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{r} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\tilde{r}} \right)^2 + V_{eff}(\phi) - V_- \right], \quad (10.10)$$

---

<sup>6</sup>С точностью до  $\ln \frac{M_{Pl}^*}{T}$ , как это следует из (10.3), (10.4) и (10.6).

где

$$\tilde{r} = r - R ,$$

и мы формально распространили интегрирование по этой переменной до  $-\infty$  (ср. с (10.7)). Конфигурация поля  $\phi_w(r)$  удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа для экстремума функционала (10.10),

$$\frac{d^2\phi}{d\tilde{r}^2} = \frac{\partial V_{eff}(\phi)}{\partial\phi} . \quad (10.11)$$

Это уравнение формально совпадает с уравнением движения одномерной классической механики частицы в потенциале

$$U(\phi) = -V_{eff}(\phi) ,$$

причём в роли времени выступает  $\tilde{r}$ , и в пренебрежении величиной  $\Delta V$  справедливо  $U(\langle\phi\rangle_T) = U(0)$ , т.е. потенциал  $U(\phi)$  имеет два равновысоких максимума, см. рис. 10.7а. Решение  $\phi_w(r)$  уравнения (10.11) описывает “скатывание” частицы с правого

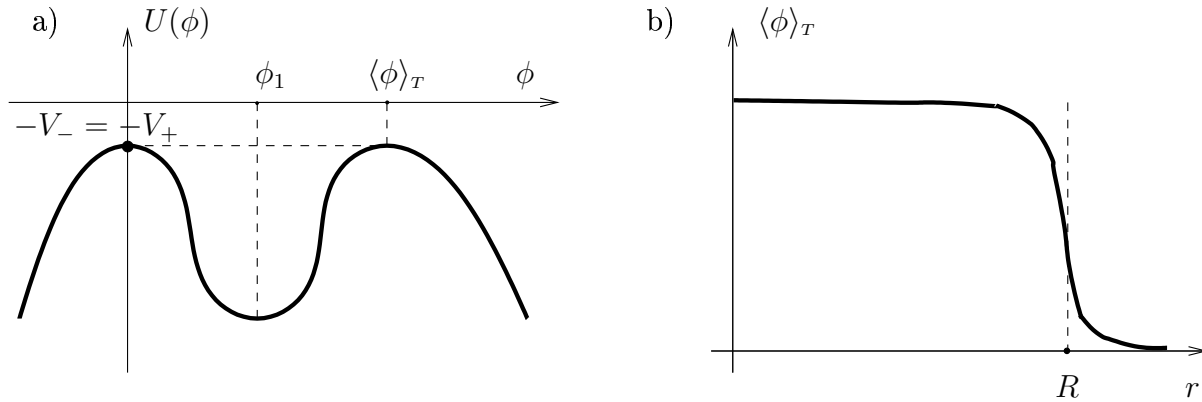


Рис. 10.7: а) Вид потенциала с двумя вырожденными максимумами; б) Вид конфигурации поля, образующей решение с пузырьком нового вакуума.

горба, в соответствии с (10.7), и “закатывание” её за бесконечное “время” на левый горб, см. (10.8). Используя аналогию с классической частицей, нетрудно найти решение уравнения (10.11) с граничными условиями (10.7), (10.8) в квадратурах,

$$\int_{\phi_1}^{\phi_w} \frac{d\phi}{\sqrt{2(V_{eff} - V_-)}} = -(R - r) , \quad (10.12)$$

где предел интегрирования выбран так, что при  $r = R$  поле  $\phi(r)$  имеет промежуточное значение между  $\phi = 0$  и  $\phi = \langle\phi\rangle_T$ . Конфигурация  $\phi_w(r)$  схематически изображена на рис. 10.7б. Отметим, что в одномерной теории скалярного поля с вырожденными минимумами скалярного потенциала для этого решения используют термин “кинк”. С учётом (10.12) свободная энергия стенки (10.10) равна

$$F_w = 4\pi R^2 \mu ,$$

где

$$\mu = \int_0^{\langle\phi\rangle_T} \sqrt{2[V_{eff}(\phi) - V_-]} d\phi . \quad (10.13)$$

Отметим, что коэффициент поверхностного натяжения  $\mu$  конечен в пределе  $\Delta V \rightarrow 0$ .

▷ *Задача 1. Проверить справедливость формул (10.12), (10.13).*

Выражение (10.2) для свободной энергии пузыря, как и анализ поведения поля вблизи его стенки, справедливы, когда толщина стенки мала по сравнению с размером пузыря  $R$ , т.е. работает тонкостенное приближение. В соответствии с (10.3) оно действительно работает, если разность свободных энергий  $\Delta V$  является малым параметром. В противном случае конфигурацию критического пузыря нужно получать, находя экстремум (седловую конфигурацию) функционала свободной энергии (10.9), при этом единственным граничным условием является  $\phi(r \rightarrow \infty) = 0$ . Подробности можно найти в книге [34].

▷ *Задача 2. Пусть эффективный потенциал имеет вид*

$$V_{eff}(\phi) = \frac{\lambda}{4} \phi^2 (\phi - v)^2 - \epsilon \phi^2,$$

где  $\lambda$ ,  $v$  и  $\epsilon$  — параметры модели, принимающие положительные значения. При каком соотношении между этими параметрами справедливо тонкостенное приближение? Найти поверхностное натяжение и толщину стенки в тонкостенном приближении, а также размер критического пузыря  $R_c$ ; оценить вероятность образования пузыря новой фазы внутри фазы с  $\phi = 0$  в тонкостенном приближении при температуре  $T$ .

Сделаем в заключение замечание о распаде ложного вакуума при нулевой температуре. Речь идёт о моделях со скалярным полем, в которых скалярный потенциал (при нулевой температуре) имеет локальный минимум (при  $\phi \neq 0$ ), т.е. имеет вид, изображённый на рис. 10.8. Состояние, в котором среднее значение поля пространственно однородно и равно нулю, является метастабильным; его называют ложным вакуумом. Распад ложного вакуума также происходит путём спонтанного образования пузырей новой фазы, однако в отличие от среды при конечной температуре, пузырь возникает не за счёт тепловых флуктуаций, а в результате туннельного процесса. Описание соответствующих туннельных переходов в квазиклассическом приближении приведено, например, в книге [34]. В теориях со слабой связью вероятность образования пузыря экспоненциально мала,

$$\Gamma \propto e^{-\frac{\text{const}}{\alpha}},$$

где  $\alpha$  — малая константа связи. Наконец, в некотором диапазоне температур возможна ситуация, когда при образовании пузыря доминирующую роль играет комбинация тепловой флуктуации и туннельного процесса.

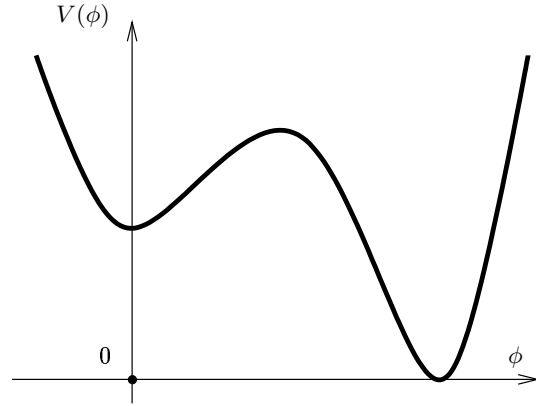


Рис. 10.8: Вид скалярного потенциала с двумя невырожденными минимумами.

## 10.2 Эффективный потенциал в однопетлевом приближении

В соответствии с (10.1) эффективный потенциал представляет собой плотность свободной энергии плазмы при условии, что среднее хиггсовское поле принимает значение  $\phi$  всюду в пространстве. Свободная энергия  $F$  системы связана с её энергией  $E$  и энтропией  $S$  известным из термодинамики соотношением  $F = E - TS$ , так что для плотности свободной энергии имеем

$$f = \rho - Ts,$$

где, как обычно,  $\rho$  и  $s$  — это плотность энергии и плотность энтропии, соответственно. Из раздела 5.2 мы знаем, что плотность энтропии выражается через плотность энергии и давление,

$$s = \frac{\rho + p}{T},$$

поэтому плотность свободной энергии равна <sup>7</sup>

$$f = -p .$$

Итак, для вычисления эффективного потенциала необходимо найти давление в системе при условии, что среднее хиггсовского поля зафиксировано равным  $\phi$  во всём пространстве.

Мы будем рассматривать теории с малыми константами связи при интересующих нас температурах. Например, при температуре  $T \sim 100$  ГэВ, характерной для электрослабых взаимодействий, космическая плазма состояла из кварков, лептонов,  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонов, бозонов Хиггса, а также фотонов и глюонов, константы взаимодействия которых между собой были малы. В этом разделе мы пренебрежём взаимодействиями между частицами в космической плазме, т.е. будем рассматривать свободную энергию идеального газа элементарных частиц. Тем не менее, свободная энергия этого газа нетривиально зависит от среднего значения  $\phi$  поля Хиггса, поскольку от него зависят массы частиц, а, следовательно, и их вклады в давление. По причинам, которые изложены в Приложении D, приближение идеального газа при вычислении эффективного потенциала называют однопетлевым приближением.

В этом приближении давление является суммой вклада самого однородного поля  $\phi$  и вкладов каждого типа частиц и античастиц, т.е.

$$f = V_{eff}(T, \phi) = V(\phi) + \sum_i f_i , \quad (10.14)$$

где  $V(\phi)$  — скалярный потенциал, входящий в действие скалярного поля<sup>8</sup>

$$S_\phi = \int [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)] d^4x . \quad (10.15)$$

Первый член в (10.14) возникает из-за того, что тензор энергии-импульса для постоянного по времени и однородного в пространстве скалярного поля равен

$$T_{\mu\nu}(\phi) = g_{\mu\nu} \cdot V(\phi) ,$$

т.е. однородное скалярное поле вносит вклад в давление, равный  $p(\phi) = T_{11} = T_{22} = T_{33} = -V(\phi)$ . Это, разумеется, — переформулировка того факта, что в пустоте свободная энергия совпадает с энергией, и её плотность равна  $V(\phi)$  для однородного скалярного поля. В дальнейшем мы будем считать, что скалярный потенциал даётся стандартным выражением

$$V(\phi) = \lambda \left( \phi^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 ,$$

где  $v$  — вакуумное среднее скалярного поля при нулевой температуре, а  $\lambda$  — константа самодействия хиггсовского поля, причём  $\lambda \ll 1$ .

---

<sup>7</sup> Тот факт, что среда стремится перейти в состояние с наименьшей свободной энергией, имеет простое физическое истолкование: в этой фазе давление максимально, и достаточно большая область этой фазы, образовавшаяся внутри фазы с меньшим давлением, будет расширяться, “расталкивая” среду с меньшим  $p$ .

<sup>8</sup> В Стандартной модели физики частиц хиггсовское поле является комплексным дублетом, кинетический член в лагранжиане которого соответствует формуле (B.7). С этим связан выбор коэффициента перед кинетическим слагаемым в (10.15). Связь рассматриваемого здесь поля  $\phi$  с хиггсовским бозоном Стандартной модели имеет вид  $\phi(x) = \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}}$ .

Второе слагаемое в (10.14) — это вклад среды в приближении невзаимодействующих частиц, при этом

$$f_i = -p_i(T, m_i(\phi)) ,$$

где  $p_i(T, m_i(\phi))$  — вклад в давление частиц и античастиц  $i$ -го типа, масса которых равна  $m_i$  и зависит от  $\phi$ . Согласно разделу 5.1 имеем

$$f_i = -p_i = -\frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{k^2 + m_i^2}}{T}} \mp 1} , \quad (10.16)$$

где  $g_i$  — число спиновых состояний, и введено обозначение  $k \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2}$ , верхний знак относится к бозонам, а нижний — к фермионам. Вклады тяжёлых частиц с  $m_i \gg T$  в свободную энергию экспоненциально малы, поэтому интерес представляет случай  $m_i \lesssim T$ .

Интеграл (10.16) не удаётся взять аналитически. Поэтому мы проанализируем его для частного случая высоких температур,  $T \gg m$ , и используем разложение по  $m/T$  (индекс  $i$  мы будем опускать, если это не будет приводить к недоразумениям). Такой подход называют высокотемпературным разложением. В безразмерных переменных

$$x = k/T \quad \text{и} \quad z_i = m_i/T$$

выражения (10.16) примут вид

$$f_i = -\frac{g_i}{6\pi^2} T^4 \cdot I(z_i)_\mp , \quad I(z)_\mp = \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + z^2}} \mp 1} . \quad (10.17)$$

Нас интересует поведение этих интегралов при малых  $z$ .

В нулевом порядке по  $z$  вклады  $f_i$  соответствуют давлениям свободных газов безмассовых частиц (см. раздел 5.1); они не зависят от  $\phi$ , и мы их будем опускать. Подынтегральное выражение в (10.17) является функцией  $z^2$ , и можно было бы ожидать, что  $I(z)$  представляет собой ряд по  $z^2$ . Первый член этого ряда равен

$$I(z) = z^2 \left( \frac{dI}{dz^2} \right)_{z^2=0} = -\frac{z^2}{2} \left( \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x \mp 1} + \int_0^\infty \frac{x^2 e^x dx}{(e^x \mp 1)^2} \right) . \quad (10.18)$$

Фигурирующие здесь интегралы конечны, так что первый нетривиальный член высокотемпературного разложения действительно квадратичен по  $z \equiv \phi/T$ . Выполняя интегрирование с использованием формул, приведённых в конце раздела 5.1 (при этом второе слагаемое в (10.18) удобно проинтегрировать по частям), получаем в этом порядке

$$V_{eff}(\phi) = \lambda \left( \phi^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 + \frac{T^2}{24} \left[ \sum_{\text{бозоны}} g_i m_i^2(\phi) + \frac{1}{2} \sum_{\text{фермионы}} g_i m_i^2(\phi) \right] . \quad (10.19)$$

Из этого выражения сразу следует важный вывод о том, что в теориях типа Стандартной модели симметрия не нарушена при высоких температурах, хотя она нарушена при  $T = 0$ .

Действительно, в таких моделях частицы приобретают массы именно благодаря конденсату скалярного поля, т.е.

$$m_i(\phi) = h_i \phi , \quad (10.20)$$



где  $h_i$  — константы связи. Исключение составляет лишь сам хиггсовский бозон, вклад которого в (10.19) мал, и мы им будем пренебрегать. В Стандартной модели для кварков и заряженных лептонов, обозначаемых символом  $f$ , и  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонов соотношение (10.20) имеет конкретный вид

$$m_f(\phi) = y_f \phi, \quad M_W(\phi) = \frac{g}{\sqrt{2}} \phi, \quad M_Z(\phi) = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{\sqrt{2}} \phi, \quad (10.21)$$

где  $y_f$  — юкавские константы, а  $g$  и  $g'$  — калибровочные константы связи (обозначения и подробности см. в Приложении В). В вакууме  $\phi = v/\sqrt{2}$ , и мы возвращаемся к известным формулам для масс частиц (см. Приложение В), а именно

$$m_f(\phi) = \frac{y_f}{\sqrt{2}} v, \quad M_W(\phi) = \frac{g}{2} v, \quad M_Z(\phi) = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} v. \quad (10.22)$$

Если включить в эффективный потенциал только выписанные в (10.19) слагаемые, то с учётом (10.20) поведение эффективного потенциала вблизи  $\phi = 0$  имеет вид

$$V_{eff}(\phi) = \left( -\lambda v^2 + \frac{\alpha}{24} T^2 \right) \phi^2 + \lambda \phi^4 \quad (10.23)$$

(не зависящие от  $\phi$  слагаемые опущены), где

$$\alpha = \sum_{\text{бозоны}} g_i h_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\text{фермионы}} g_i h_i^2 \quad (10.24)$$

— положительная величина. При низких температурах выражение (10.23) имеет минимум при  $\phi \neq 0$  (симметрия нарушена), а при высоких температурах единственным минимумом служит минимум  $\phi = 0$ , соответствующий восстановленной симметрии. Минимум при  $\phi = 0$  исчезает и превращается в максимум, когда первое слагаемое в (10.23) меняет знак, т.е. при температуре (смысл обозначений будет ясен из дальнейшего)

$$T_{c2} = 2v \left( \frac{6\lambda}{\alpha} \right)^{1/2}. \quad (10.25)$$

В дальнейшем при общем обсуждении теорий с малыми константами связи мы будем считать, что существенные константы  $h_i$  малы и имеют порядок  $h \ll 1$ , а

$$\lambda \sim h^2,$$

так что масса бозона Хиггса,  $m_h \sim \sqrt{\lambda} v$  имеет тот же порядок величины, что массы остальных частиц, дающих заметные вклады в эффективный потенциал. В таком предположении оценка для критической температуры имеет вид

$$T_{c2} \sim v,$$

как это следует из (10.24) при не слишком большом числе типов частиц.

В Стандартной модели основной вклад в  $\alpha$  дают наиболее тяжёлые частицы —  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозоны и  $t$ -кварк, и сравнение формул (10.20), (10.21) и (10.22) даёт

$$\alpha = \frac{2}{v^2} (6M_W^2 + 3M_Z^2 + 6m_t^2),$$

где имеются в виду массы при нулевой температуре. Здесь мы учли, что  $W^+$ - и  $W^-$ -бозоны вместе имеют шесть поляризаций,  $Z$ -бозон имеет три поляризации, а  $t$ -кварк вместе со своей античастицей — четыре; кроме того,  $t$ -кварк может находиться в трёх состояниях по цвету. Вспоминая ещё, что масса бозона Хиггса равна

$$m_h = \sqrt{2\lambda}v ,$$

получаем следующее однопетлевое выражение для критической температуры  $T_{c2}$  в Стандартной модели

$$\begin{aligned} T_{c2} &= \left( \frac{6m_h^2}{6M_W^2 + 3M_Z^2 + 6m_t^2} \right)^{1/2} \cdot v \\ &= 121 \cdot \left( \frac{m_h}{100 \text{ ГэВ}} \right) \text{ ГэВ} \end{aligned}$$

(напомним, что  $M_W = 80.4$  ГэВ,  $M_Z = 91.2$  ГэВ,  $m_t \approx 175$  ГэВ,  $v = 247$  ГэВ, см. Приложение В).

Если бы высокотемпературное разложение интегралов (10.16) действительно представляло собой ряд по  $z^2 \equiv m^2(\phi)/T^2$ , то можно было бы заключить, что мы имеем дело с фазовым переходом II рода: поправки четвёртого и более высоких порядков по  $\phi$  малы по сравнению с членами, выписанными в (10.23) (см. ниже), а положение минимума выражения (10.23) плавно меняется в сторону больших  $\phi$ , начиная с  $\phi = 0$ , при уменьшении температуры от  $T_{c2}$  до нуля, так что поведение выражения (10.23) соответствует правому рис. 10.3. Однако на самом деле интегралы (10.16) не аналитичны по  $z^2$ , и однопетлевой эффективный потенциал в действительности соответствует фазовому переходу I рода. Отсутствие аналитичности видно из поведения вкладов в интегралы (10.17) из области малых импульсов  $k \ll T$ , т.е.  $x \ll 1$  (инфракрасная область). При малых  $z$  и  $x$  разложение экспоненты в подынтегральных выражениях даёт

$$\begin{aligned} I_-^{(IR)} &= \int_0^\Lambda \frac{x^4 dx}{x^2 + z^2}, \quad \text{бозоны} \\ I_+^{(IR)} &= \frac{1}{2} \int_0^\Lambda \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \quad \text{фермионы}, \end{aligned} \tag{10.26}$$

где  $\Lambda \ll 1$  — фиктивный параметр, ограничивающий инфракрасную область. Формальное разложение подынтегральных выражений в этих формулах по  $z^2$  привело бы в порядке  $z^4$  к вкладам типа

$$\begin{aligned} &z^4 \int_0^\Lambda \frac{dx}{x^2}, \quad \text{бозоны} \\ &z^4 \int_0^\Lambda \frac{dx}{x}, \quad \text{фермионы}. \end{aligned}$$

Первый из них расходится на нижнем пределе интегрирования линейно, а второй — логарифмически. Поэтому можно ожидать, что помимо вычисленного выше вклада порядка  $z^2$  бозоны дают вклад порядка  $z^3$ , а фермионы — вклад порядка  $z^4 \ln z$ . Вклады последнего типа соответствуют членам в эффективном потенциале, имеющим вид

$$m_i^4(\phi) \ln \frac{\phi}{T} = h_i^4 \phi^4 \ln \frac{\phi}{T}. \tag{10.27}$$

Большинство из них мало интересны, поскольку при  $\lambda \gg h_i^4$  (что выполняется при не слишком малой массе хиггсовского бозона) они малы по сравнению с членом  $\lambda\phi^4$ , происходящим из скалярного потенциала  $V(\phi)$ . Лишь, вклады, обусловленные  $t$ -кварком, оказываются существенными при определении некоторых параметров фазового перехода, что мы увидим ниже. Наоборот, члены порядка  $z^3$  существенны для описания фазового перехода: именно благодаря этим членам переход (в рамках однопетлевого приближения) является переходом I рода.

Для вычисления члена порядка  $z^3$  в бозонном интеграле  $I_-$  разобьём этот интеграл на две части, введя фиктивный параметр  $\Lambda$ ,

$$I_- = \int_{\Lambda}^{\infty} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + z^2}} - 1} + I_-^{(IR)}.$$

Первое слагаемое здесь аналитично по  $z^2$ , а во втором слагаемом можно разложить экспоненту и ограничиться членом (10.26), т.е. записать

$$I_-^{(IR)} = \int_0^{\Lambda} (x^2 - z^2) dx + z^4 \int_0^{\Lambda} \frac{dx}{x^2 + z^2}.$$

Первое слагаемое в этом выражении снова аналитично по  $z^2$ , а второе даёт интересный нас вклад порядка  $z^3$ ,

$$I_-^{(IR)} \longrightarrow \frac{\pi}{2} z^3 + \mathcal{O}\left(\frac{z^4}{\Lambda}\right).$$

В результате эффективный потенциал в однопетлевом приближении имеет вид

$$V_{eff}(\phi) = \lambda \left( \phi^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 + \frac{T^2}{24} \left( \sum_{\text{бозоны}} g_i m_i^2(\phi) + \frac{1}{2} \sum_{\text{фермионы}} g_i m_i^2(\phi) \right) - \frac{T}{12\pi} \sum_{\text{бозоны}} g_i m_i^3(\phi) + \mathcal{O}\left( m_i^4(\phi) \ln \frac{m_i(\phi)}{T} \right).$$

В моделях, где массы частиц связаны с хиггсовским средним соотношением (10.20), это выражение переписывается в виде

$$V_{eff}(\phi) = \frac{\alpha}{24} (T^2 - T_{c2}^2) \phi^2 - \gamma T \phi^3 + \lambda \phi^4, \quad (10.28)$$

где параметр  $\gamma$  положителен и равен

$$\gamma = \frac{1}{12\pi} \sum_{\text{бозоны}} g_i |h_i|^3 = \frac{\sqrt{2}}{6\pi} \sum_{\text{бозоны}} g_i \left( \frac{m_i}{v} \right)^3, \quad (10.29)$$

а остальные обозначения введены в (10.24) и (10.25).

▷ **Задача 3.** Вычислить слагаемые порядка  $\phi^4 \ln \frac{\phi}{T}$  в высокотемпературном разложении эффективного потенциала, используя соотношение (10.20). Показать, что при  $\lambda \sim h_i^2$  (масса бозона Хиггса сравнима с массами остальных частиц) и  $h_i \ll 1$  (константы связи малы) эти слагаемые малы по сравнению с выписанными в (10.28) во всей интересной области изменения  $\phi$ , т.е.  $0 < \phi \lesssim v$ .

Поведение эффективного потенциала (10.28) как функции температуры соответствует левому рис. 10.3, т.е. фазовому переходу I рода. Экстремумы эффективного потенциала определяются уравнением

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi} = \frac{\alpha}{12} (T^2 - T_{c2}^2) \phi - 3\gamma T \phi^2 + 4\lambda \phi^3 = 0. \quad (10.30)$$

При температуре  $T_{c0}$  такой, что

$$9\gamma^2 T_{c0}^2 = \frac{4\alpha\lambda}{3} (T_{c0}^2 - T_{c2}^2),$$

у эффективного потенциала появляются два экстремума при  $\phi \neq 0$  — минимум и максимум. Видно, что эта температура лишь ненамного превышает  $T_{c2}$ : при  $\lambda \sim h^2$  (где  $h$  — характерная константа связи) справедливы оценки  $\gamma \sim h^3$ ,  $\alpha\lambda \sim h^4$ , так что

$$\frac{T_{c0}^2 - T_{c2}^2}{T_{c2}^2} = \frac{27\gamma^2}{4\alpha\lambda} \sim h^2. \quad (10.31)$$

Из-за малого отличия  $T$  от  $T_{c2}$  в интересной области температур можно заменить  $T$  на  $T_{c2}$  во втором слагаемом в (10.30). Существенно, что второй минимум эффективного потенциала (если  $\phi = 0$  считать первым минимумом) появляется при отличном от нуля  $\phi = \Phi_c(T_{c0})$

$$\Phi_{c0} = \Phi_c(T_{c0}) = \frac{3\gamma}{8\lambda} T_{c0}. \quad (10.32)$$

С понижением температуры второй минимум становится глубже, эффективный потенциал в этом минимуме сравнивается с эффективным потенциалом в минимуме  $\phi = 0$  при температуре  $T_{c1}$ , причём выполняется как уравнение (10.30), так и уравнение<sup>9</sup>  $V_{eff} = 0$ . Решение этой системы уравнений даёт первую критическую температуру  $T_{c1}$ ,

$$\frac{T_{c1}^2 - T_{c2}^2}{T_{c2}^2} = \frac{6\gamma^2}{\alpha\lambda},$$

и положение второго минимума при этой температуре

$$\Phi_{c1} = \Phi_c(T_{c1}) = \frac{\gamma}{2\lambda} T_{c1}. \quad (10.33)$$

С учётом (10.29) в пределе слабой связи,  $h \ll 1$ , это значение гораздо меньше критической температуры,  $\Phi_c(T_{c1}) \sim hT_{c1}$ . При дальнейшем понижении температуры до второй критической температуры  $T_{c2}$  минимум эффективного потенциала при  $\phi = 0$  пропадает и превращается в максимум. В этот момент второй минимум находится при

$$\Phi_{c2} = \Phi_c(T_{c2}) = \frac{3\gamma}{4\lambda} T_{c2}. \quad (10.34)$$

Таким образом, изменение однопетлевого эффективного потенциала, изображённое на рис. 10.3 слева, происходит в теориях с малыми константами связи в узком интервале температур вблизи критической температуры (10.25),  $T_{c0} \leq T \leq T_{c2}$ , где

---

<sup>9</sup>Напомним, что мы отбросили не зависящие от  $\phi$  слагаемые в эффективном потенциале, т.е. отсчитываем его от значения в фазе  $\phi = 0$ .

$T_{c0}$  определяется соотношением (10.31). При этом сразу после фазового перехода среднее значение поля Хиггса значительно меньше его вакуумного среднего,

$$\Phi_c \sim \frac{\gamma}{\lambda} T_{c2} \sim h T_{c2} \sim h v \ll v .$$

Отметим, что условие применимости высокотемпературного разложения формально выполняется в теориях со слабой связью, поскольку

$$m_i(\Phi) = h_i \Phi \sim h^2 T_{c2} \ll T_{c2} .$$

Ещё одно замечание касается скрытой теплоты фазового перехода. При  $T = T_{c2}$  значение эффективного потенциала в минимуме (10.34), отсчитанное от его значения при  $\phi = 0$ , равно

$$V_{eff}(T_{c2}, \Phi_c(T_{c2})) = -\frac{27}{256} \frac{\gamma^4}{\lambda^3} T_{c2}^4 .$$

Это значение (с обратным знаком) определяет максимальную скрытую теплоту перехода, которая по порядку величины равна

$$-V_{eff} \sim h^6 T_{c2}^4 \ll T_{c2}^4 . \quad (10.35)$$

Таким образом, в результате фазового перехода выделяется мало энергии по сравнению с энергией частиц в плазме, плотность которой по порядку величины равна  $T_c^4$ . В результате фазового перехода космическая плазма подогревается слабо.

▷ *Задача 4. Используя выражение (10.28) для эффективного потенциала и результаты предыдущего раздела, найти профиль стенки критического пузыря и его коэффициент поверхностного натяжения  $\mu$  при температуре, близкой к  $T_{c1}$ . Найти температуру, при которой темп образования пузырей становится порядка хаббловского, т.е. Вселенная “закипает”. Каково при этом соотношение между размером пузыря и хаббловским размером? Найти соотношение между выделившейся в этот момент скрытой теплотой перехода и плотностью энергии частиц в плазме, уточнив тем самым оценку (10.35). Провести численные оценки для Стандартной модели с массой бозона Хиггса 40 ГэВ (экспериментально запрещено) и 120 ГэВ.*

Высокотемпературное разложение интегралов (10.16) заведомо работает при малых значениях  $\phi$ . Поэтому сделанный на его основе вывод о том, что в рамках использованного в этом разделе однопетлевого приближения фазовый переход является переходом I рода, с этой точки зрения обосновано. В то же время, для однопетлевого вычисления критических температур  $T_{c0}$  и  $T_{c1}$ , средних значений  $\Phi_{c0}$ ,  $\Phi_{c1}$ ,  $\Phi_{c2}$  и других характеристик фазового перехода использование высокотемпературного разложения отнюдь не обязательно. Интегралы (10.16) достаточно просто вычислить численно, и таким образом найти точный однопетлевой эффективный потенциал. Соответствующие графики для Стандартной модели приведены на рис. 10.9, 10.10.

Видно, что при  $\phi \lesssim T$  полученные с использованием высокотемпературного разложения результаты для эффективного потенциала с разумной точностью согласуются с точным однопетлевым вычислением. В то же время, результаты для ряда характеристик фазового перехода совпадают лишь качественно, по порядку величины (см. рис. 10.11). Для аналитических оценок этих характеристик оказываются важными опущенные нами старшие по  $m/T$  поправки. Действительно, отношения  $\Phi_c(T_{c1})/T_{c1}$

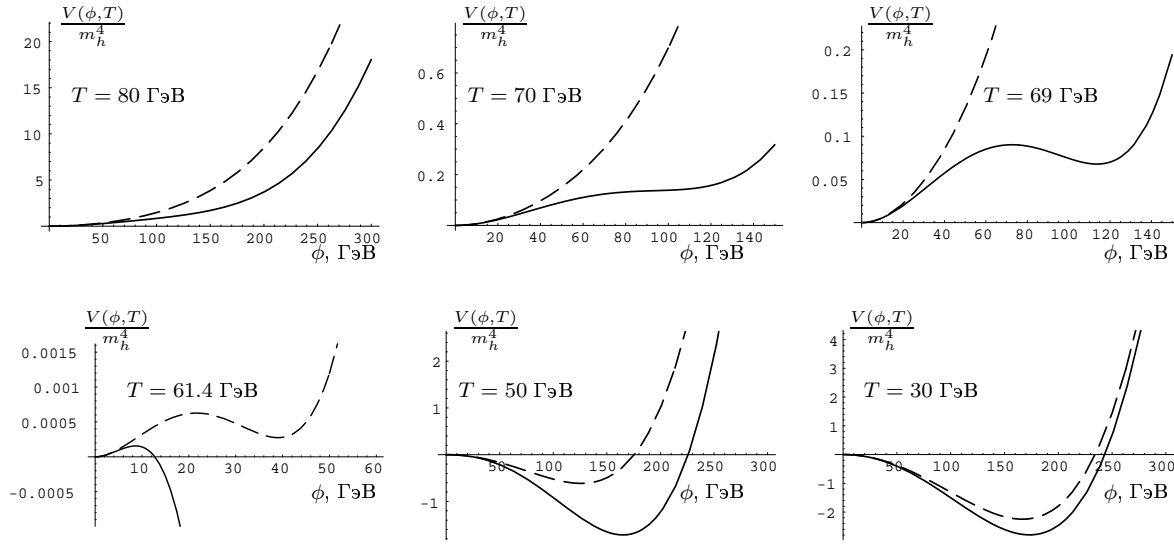


Рис. 10.9: Эффективные однопетлевые потенциалы при разных значениях температуры  $T$ , полученные численно (сплошные линии) и аналитически с использованием высокотемпературного разложения (пунктирные линии) для массы хиггсовского бозона  $m_h = 50$  ГэВ. Следует обратить внимание на различия в масштабах по осям для разных температур.

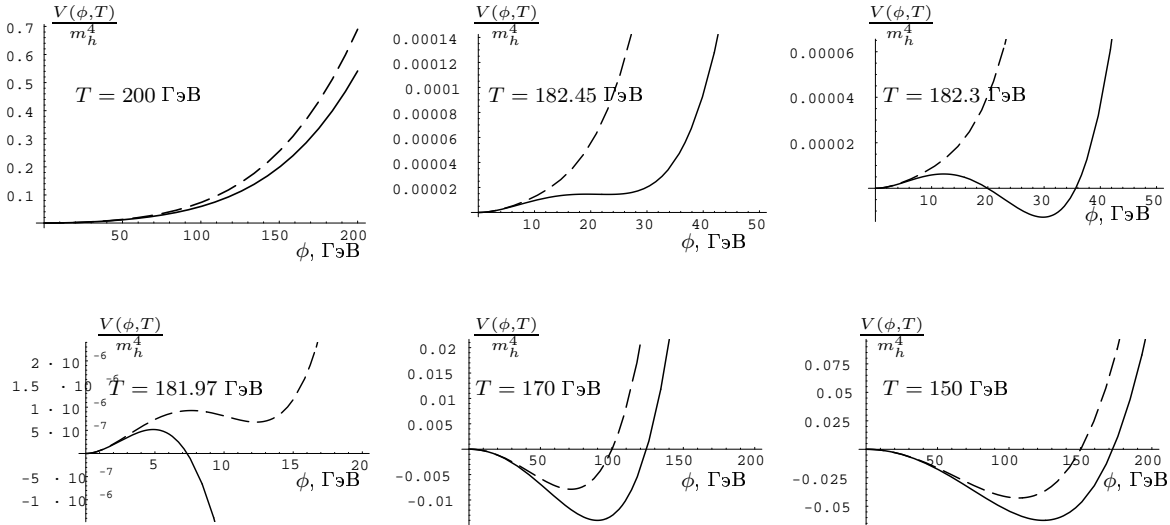


Рис. 10.10: То же, что и на рис. 10.9, но для массы хиггсовского бозона  $m_h = 150$  ГэВ.

и  $\Phi_c(T_{c2})/T_{c2}$  обратно пропорциональны коэффициенту при  $\phi^4$  в эффективном потенциале (см. формулы (10.33), (10.34)), а именно этот коэффициент получает заметный вклад при учёте опущенных нами следующих членов разложения (10.27).

▷ **Задача 5.** В рамках высокотемпературного разложения вычислить величины  $\Phi_c(T_{c1})/T_{c1}$  и  $\Phi_c(T_{c2})/T_{c2}$  с учётом вкладов вида (10.27). Убедиться, что полученные результаты лучше согласуются с точными численными результатами.

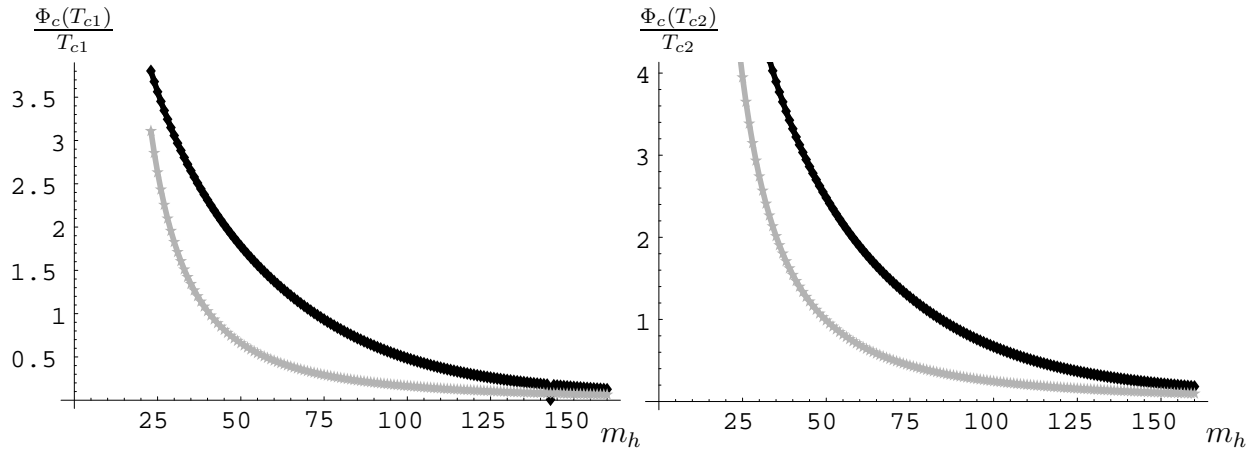


Рис. 10.11: Сравнение численных результатов (чёрные линии) с аналитическими результатами, полученными с использованием высокотемпературного разложения (серые линии) для однопетлевых величин а)  $\Phi_c(T_{c1})/T_{c1}$  и б)  $\Phi_c(T_{c2})/T_{c2}$  при различных массах бозона Хиггса  $m_h$ .

Гораздо более серьёзным вопросом является вопрос о применимости самого однопетлевого приближения, и, говоря шире, о применимости теории возмущений по константам связи при конечных температурах. Обсуждению этих вопросов посвящён следующий раздел. Мы увидим, в частности, что однопетлевое приближение применимо для описания фазового перехода только при небольших нуль-температурных массах бозона Хиггса; в Стандартной модели однопетлевое приближение теории возмущений *не работает* для описания фазового перехода, с учётом экспериментального ограничения  $m_h > 114$  ГэВ.

### 10.3 Инфракрасная проблема

В этом разделе мы увидим, что при конечных температурах теория возмущений по константам связи применима далеко не всегда, даже если эти константы связи малы. Обсудим этот вопрос сначала на качественном уровне. Физическая причина неприменимости теории возмущений состоит в том, что функции распределения *бозонов*  $f_B = [\exp(\omega/T) - 1]^{-1}$  велики при малых энергиях частицы  $\omega$ , а именно,  $f_B \sim T/\omega$ . Из-за этого взаимодействие между бозонами при низких энергиях усилено в среде, и в качестве эффективной константы связи выступает  $\tilde{g}^2 \sim g^2 T/\omega$ , где  $g$  — константа связи исходной четырёхмерной теории.<sup>10</sup> Для векторных частиц с нулевыми пространственными импульсами  $\omega = M_V(\phi) \sim g\phi$ , где  $\phi$  — среднее хиггсовского поля,  $g$  — калибровочная константа связи, так что эффективная константа связи велика при малых значениях  $\phi$ ,

$$\tilde{g}^2 \sim \frac{gT}{\phi}. \quad (10.36)$$

Вычисление эффективного потенциала по теории возмущений оправдано тогда, когда  $\tilde{g}^2 \ll 1$ , т.е.

$$\phi \gg gT. \quad (10.37)$$

<sup>10</sup>Мы получим этот результат на формальном уровне в конце этого раздела.

Отсюда следует, что эффективный потенциал невозможно вычислить по теории возмущений вблизи  $\phi = 0$ . Более того, описанная в предыдущем разделе картина фазового перехода первого рода справедлива только тогда, когда положение второго минимума эффективного потенциала, заданное формулами (10.32), (10.33) или (10.34), удовлетворяет соотношению  $\Phi_c \gg gT_c$ . В терминах констант связи это ограничение имеет вид

$$\lambda \ll \frac{\gamma}{g}.$$

Учитывая, что  $\gamma \sim g^3$  (см. (10.29)), и опуская численные множители (они в действительности работают в сторону усиления ограничения), получим отсюда  $\lambda \ll g^2$ , т.е. в терминах нуль-температурных масс

$$m_h^2 \ll M_W^2. \quad (10.38)$$

Уточнить эту оценку трудно: найти более аккуратно, до каких именно значений  $m_h$  имеет место фазовый переход первого рода, аналитически не удаётся. Тем не менее, ограничение (10.38) показывает, что однопетлевые результаты раздела 10.2 скорее всего не имеют отношения к реальности в Стандартной модели с учётом экспериментального ограничения  $m_h > 114$  ГэВ.

Поскольку указанная трудность связана с взаимодействиями частиц среды с низкими энергиями, её называют инфракрасной проблемой. Главную роль при этом играют взаимодействия калибровочных бозонов между собой, имеющиеся в любой неабелевой калибровочной теории.

Рассматривая Стандартную модель и её обобщения, нужно иметь в виду ещё одно обстоятельство. Само хиггсовское поле  $\phi$  в Стандартной модели калибровочным инвариантом не является. Калибровочно-инвариантными являются величины типа  $\phi^\dagger \phi$  ( $H^\dagger H$ , см. Приложение В), однако они инвариантны относительно всех симметрий лагранжиана, поэтому не могут служить параметрами порядка. Иными словами, “фазы” с “нарушенной” и “ненарушенной” симметрией, по-видимому, в действительности не различимы<sup>11</sup>. Если это так, то вместо фазового перехода при высоких температурах может иметь место гладкий кроссовер. Именно картина гладкого кроссовера наблюдается в решёточных исследованиях Стандартной модели при высоких температурах для  $m_h > 80$  ГэВ.

Убедимся на формальном уровне, что применимость теории возмущений для вычисления эффективного потенциала действительно ограничена средними хиггсовского поля, удовлетворяющими соотношению (10.37). Нас будут интересовать вклады в эффективный потенциал, связанные с взаимодействием калибровочных бозонов между собой. Эти вклады, как и в разделе 10.2, зависят от среднего поля  $\phi$  через массы векторных бозонов (10.21), т.е.

$$M(\phi) \sim g\phi,$$

где мы опустили индексы, обозначающие  $W$ - и  $Z$ -бозоны, пренебрегли различием  $M_W$  и  $M_Z$  и факторами порядка единицы.

Как показано в Приложении Д, эффективный потенциал даётся функциональным интегралом

$$e^{-\beta V(\phi)} = \int \mathcal{D}A_\mu e^{-S^{(\beta)}[A]}, \quad (10.39)$$

где мы опустили все поля, кроме калибровочных. Здесь  $\beta = T^{-1}$ , функционал  $S^{(\beta)}[A]$  — евклидово действие на интервале евклидова времени  $0 \leq \tau \leq \beta$ ,

$$S^{(\beta)}[A] = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^b F_{\mu\nu}^b + \frac{M^2(\phi)}{2} A_\mu^b A_\mu^b \right], \quad (10.40)$$

<sup>11</sup> Оговорка здесь связана с имеющимся в литературе утверждением о существовании “скрытой” симметрии и нелокального параметра порядка в Стандартной модели [35].



суммирование ведётся с евклидовой метрикой. Интегрирование в (10.39) ведётся по полям  $A_\mu^b(\mathbf{x}, \tau)$ , периодичным по  $\tau$  с периодом  $\beta$ .

В силу периодичности, поля  $A_\mu^b(\mathbf{x}, \tau)$  можно представить в виде дискретной суммы

$$A_\mu(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} a_\mu(\mathbf{x}) + \sum_{n=\pm 1, \dots} \frac{1}{\sqrt{\beta}} a_\mu^{(n)}(\mathbf{x}) e^{i\omega_n \tau}, \quad (10.41)$$

где

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \equiv 2\pi n T$$

— мацубаровские частоты; мы опустили групповой индекс и явно выделили слагаемые в (10.41) с нулевой мацубаровской частотой. После подстановки разложения (10.41), действие будет представлять собой действие трёхмерной евклидовой теории с бесконечным набором полей  $a_\mu(\mathbf{x})$ ,  $a_\mu^{(n)}(\mathbf{x})$ . Нас будет интересовать инфракрасная область, точнее, область пространственных импульсов

$$|\mathbf{p}| \ll gT.$$

При таких импульсах существенны только лёгкие трёхмерные поля, чья масса много меньше  $gT$ . Заметим, прежде всего, что  $a_0$ ,  $a_0^{(n)}$  лёгкими полями не являются: они приобретают дебаевскую массу  $m_D \sim gT$  (сравни с разделом D.5). Поэтому поля  $a_0$ ,  $a_0^{(n)}$  можно из рассмотрения исключить. Далее, поля  $a_i^{(n)}$  с  $n \neq 0$  также являются тяжёлыми трёхмерными полями: слагаемое  $F_{0i}^a F_{0i}^a$  в исходном лагранжиане приводит к появлению члена

$$\sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \int d^3x \omega_n^2 a_i^{(n)} a_i^{(-n)},$$

т.е. массового члена в трёхмерной теории с большими массами  $|\omega_n|$ . В результате лёгкими полями являются только поля  $a_i(\mathbf{x})$ , т.е. однородные в евклидовом времени компоненты пространственных вектор-потенциалов  $A_i$ . Подставляя выражение  $A_i(\mathbf{x}) = \beta^{-1/2} a_i(\mathbf{x})$  в действие (10.40), получим эффективное трёхмерное действие, описывающее инфракрасные свойства теории при конечных температурах

$$S^{eff} = \int d^3x \left( \frac{1}{4} f_{ij}^b f_{ij}^b + \frac{1}{2} M^2(\phi) a_i^b a_i^b \right), \quad (10.42)$$

где

$$f_{ij}^b = \partial_i a_j^b - \partial_j a_i^b + g\sqrt{T} f^{bcd} a_i^c a_j^d \quad (10.43)$$

и  $f^{bcd}$  — структурные константы неабелевой калибровочной группы (в случае калибровочной группы  $SU(2)$  имеем  $f^{bcd} = \epsilon^{bcd}$ ). Фактор  $T^{1/2} = \beta^{-1/2}$  возник в (10.43) из-за нормировки в (10.41), подобранной так, чтобы квадратичная часть трёхмерного действия (10.42) имела канонический вид.

Отвлекаясь от основного изложения, сделаем замечание, касающееся фермионов. В рамках описываемого подхода все трёхмерные фермионы являются тяжёлыми, поскольку они антипериодичны по  $\beta$ , и все их мацубаровские частоты  $\omega_{n'} = 2\pi T n'$ ,  $n' = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$  отличны от нуля и пропорциональны  $T$ . Поэтому фермионные поля несущественны с точки зрения инфракрасных свойств теории. Это следует и из соображений, изложенных в начале этого раздела: функции распределения фермионов  $f_F = [\exp(\omega/T) + 1]^{-1}$  не растут при низких энергиях  $\omega$ .

Возвращаясь к действию (10.42), заметим, что оно представляет собой действие трёхмерных векторных полей с массой  $M(\phi)$  и размерной константой связи

$$g^{(3)} = g\sqrt{T}. \quad (10.44)$$

Отношение размерных величин  $[g^{(3)}]^2/M(\phi)$  и представляет собой эффективную константу связи (10.36). Действительно, в рамках теории возмущений эффективный потенциал (точнее,  $-\beta V(\phi)$ ) даётся суммой одночастично-неприводимых диаграмм без внешних линий (см. Приложение D), типа изображённой на рис. 10.12. В данном случае речь идёт о диаграммах в трёхмерной теории с действием (10.42). Диаграммы с  $n$  петлями дают вклад в  $\beta V_{eff}$ , пропорциональный  $[g^{(3)}]^{2(n-1)}$ , и просто из размерных соображений этот вклад имеет порядок

$$\beta V_{eff}^{(n)} \sim \frac{[g^{(3)}]^{2(n-1)}}{[M(\phi)]^{n-4}} = [M(\phi)]^3 \left( \frac{[g^{(3)}]^2}{M(\phi)} \right)^n.$$

Итак, параметром разложения в теории возмущений служит  $[g^{(3)}]^2/M(\phi)$ , т.е. теория возмущений применима при<sup>12</sup>

$$M(\phi) \gg g^2 T,$$

<sup>12</sup>В случае полей  $a_0$  и  $a_i^{(n)}$  роль  $M(\phi)$  выполняют дебаевская масса  $m_D \sim gT$  и  $\omega_n \sim T$ , соответственно, так что эти поля действительно несущественны в инфракрасной области при достаточно малых  $g$ .



# Глава 11

## Генерация барионной асимметрии

Как мы обсуждали в разделе 5.2, в современной Вселенной антибарионы отсутствуют, а современная концентрация барионов характеризуется величиной

$$\eta_B = \frac{n_{B,0}}{n_{\gamma,0}} \simeq 6.15 \cdot 10^{-10} ,$$

Отношение плотности барионного числа к плотности энтропии на достаточно поздних этапах эволюции равно (см. раздел 5.2)

$$\Delta_B = \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} \simeq 0.86 \cdot 10^{-10} , \quad (11.1)$$

Эта величина остаётся постоянной на горячей стадии расширения Вселенной, если в космической плазме отсутствуют процессы с несохранением барионного числа и процессы с большим выделением энтропии. Одна из задач космологии состоит в объяснении происхождения барионной асимметрии (11.1). При этом, как мы обсуждали в разделах 1.5.5 и 5.2, начальное состояние выбирается симметричным по отношению к барионному числу.

Нужно сразу подчеркнуть, что однозначного ответа на вопрос о механизме генерации барионной асимметрии пока нет. Было предложено несколько механизмов, однако сказать, какой из них действительно ответственен за генерацию наблюдаемой барионной асимметрии, пока нельзя. Вообще говоря, барионная асимметрия могла образоваться как на горячей стадии, так и на предшествующей ей стадии пост-инфляционного разогрева. Последняя имеет место в инфляционной теории и понимается как стадия, в которой частицы и поля во Вселенной ещё далеки от термодинамического равновесия. Стадию пост-инфляционного разогрева мы будем обсуждать во второй части книги, а в этой Главе рассмотрим некоторые механизмы генерации барионной асимметрии, которые могли работать на горячей стадии. Обсудим прежде всего общие условия, необходимые для генерации барионной асимметрии.

Помимо барионной асимметрии в современной (и в ранней) Вселенной может иметься, и наверняка имеется, лептонная асимметрия. Однако если она не слишком велика, то определить её значение в экспериментах или наблюдениях не представляется возможным (пока?), поскольку лептонная асимметрия заключена в избытке реликтовых нейтрино над антинейтрино или наоборот (плотность электронов равна плотности протонов в силу электронейтральности), а точное измерение концентрации реликтовых нейтрино надолго останется нерешённой проблемой.

## 11.1 Необходимые условия генерации асимметрии

Для того, чтобы на каком-то этапе эволюции Вселенной произошла генерация барионной асимметрии, необходимо выполнение трёх условий; их называют условиями Сахарова. А именно, должны иметь место:

1. Несохранение барионного числа.
2. Нарушение  $C$ - и  $CP$ -симметрий.
3. Нарушение термодинамического равновесия.

То, что первое условие действительно необходимо для превращения барион-симметричной среды в барион-асимметричную, очевидно. Далее, если бы  $C$ - или  $CP$ -симметрия была точной, то процессы с участием кварков и процессы с участием антикварков происходили бы одинаково, и генерация асимметрии была бы невозможна.

На формальном уровне последнее утверждение следует из закона эволюции матрицы плотности,

$$\rho(t) = e^{-i\hat{H}(t-t_i)} \rho(t_i) e^{i\hat{H}(t-t_i)} , \quad (11.2)$$

где  $\hat{H}$  — гамильтониан системы,  $t_i$  — начальный момент времени. Симметрия относительно  $C$ - или  $CP$ -преобразований означает, что соответствующий унитарный оператор  $U_C$  или  $U_{CP}$  коммутирует с гамильтонианом; например, для  $CP$ -симметрии

$$U_{CP} \hat{H} U_{CP}^{-1} = \hat{H} .$$

Отсюда следует, что

$$U_{CP} \rho(t) U_{CP}^{-1} = \rho(t) ,$$

если начальное состояние среды (в момент  $t_i$ ) симметрично, т.е.  $U_{CP} \rho(t_i) U_{CP}^{-1} = \rho(t_i)$ . Отсюда, и из нечётности оператора барионного числа,  $U_{CP} \hat{B} U_{CP}^{-1} = -\hat{B}$ , сразу следует, что если в начальный момент  $\langle \hat{B}(t_i) \rangle = 0$ , то

$$\langle \hat{B}(t) \rangle = \text{Tr} (\hat{B} \rho(t)) = 0 ,$$

т.е. среднее значение барионного числа в среде равно нулю в любой момент времени; среда остаётся барион-симметричной.

Наконец, третье условие также достаточно очевидно. В ситуации, когда имеет место термодинамическое равновесие по отношению к процессам с несохранением барионного числа, среда эволюционирует в состояние с нулевым химическим потенциалом, т.е. с нулевой плотностью барионного числа. Барионная асимметрия в этой ситуации не генерируется, а наоборот, в общем случае, вымывается.

Это рассуждение нуждается, впрочем, в уточнении. Оно буквально справедливо, если барионное число является единственным существенным квантовым числом. Мы увидим, что в Стандартной модели физики частиц и её расширениях существенными являются также лептонные числа, причём при температурах выше  $T \sim 100$  ГэВ барионное число само по себе не сохраняется, но сохраняются его линейные комбинации с лептонными числами, в частности,  $(B - L)$ , где  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$  — полное лептонное число. В состоянии термодинамического равновесия с ненулевым  $(B - L)$  выполняется

$$B = C \cdot (B - L) , \quad L = (C - 1) \cdot (B - L) , \quad (11.3)$$

где константа  $C$  — порядка (но меньше) единицы, т.е. барионное число отлично от нуля. Это обстоятельство лежит в основе механизма лептогенезиса: при достаточно высоких температурах генерируется лептонная асимметрия (и, следовательно,  $(B -$

$L$ )) за счёт процессов, не описываемых Стандартной моделью, а затем она частично перерабатывается, уже в результате электрослабых процессов Стандартной модели, в барионную асимметрию.

Подчёркнём, что все три перечисленных в начале раздела необходимых условия должны выполняться на одном и том же этапе эволюции Вселенной — этапе генерации барионной асимметрии (в сценарии лептогенезиса на этапе генерации лептонной асимметрии должно иметь место несохранение лептонного числа, а не барионного). Вообще говоря, каждый из перечисленных в этих условиях эффектов является в той или иной степени малым, что и приводит к малому значению барионной асимметрии. Мы рассмотрим, каким образом выполняются указанные условия, на конкретных примерах в последующих разделах.

В заключение этого раздела убедимся, что независимо от механизма генерации барионной асимметрии, сам факт её существования приводит к отсутствию реликтового антивещества во Вселенной.

Для оценки остаточной концентрации антибарионов (антипротонов, антинейтронов) запишем уравнение для плотности числа антибарионов  $n_{\bar{B}}$ . Изменение числа антибарионов в сопутствующем объёме происходит, во-первых, за счёт их аннигиляции с барионами среды,

$$\frac{d(n_{\bar{B}}a^3)^{\text{анн}}}{dt} = -\Gamma_{\text{анн}} \cdot n_{\bar{B}}a^3,$$

где

$$\Gamma_{\text{анн}} = \sigma_{\text{анн}} \cdot v \cdot n_B, \quad (11.4)$$

— вероятность аннигиляции антибариона в среде с барионами в единицу времени. Здесь  $\sigma_{\text{анн}}$  — сечение аннигиляции (различием между сечениями аннигиляции антипротонов и антинейтронов пренебрегаем); в нерелятивистском случае  $\sigma_{\text{анн}} = \sigma_0/v$  (см. раздел 9.3), а

$$\sigma_0 \sim 1 \text{ Фм}^2 = 10^{-26} \text{ см}^2 \sim 25 \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (11.5)$$

В формуле (11.4)  $n_B = \eta_B \cdot n_\gamma$  — плотность числа барионов.

Конкурирующий с аннигиляцией процесс — это рождение барион-антибарионных пар в столкновениях между частицами среды. В термодинамическом равновесии число антибарионов (в сопутствующем объёме) меняться не должно, поэтому при равновесной концентрации антибарионов вклады аннигиляции и рождения должны в точности компенсировать друг друга. Следовательно, вклад парного рождения равен

$$\frac{d(n_{\bar{B}}a^3)^{\text{рожд}}}{dt} = \Gamma_{\text{анн}} \cdot n_{\bar{B}}^{\text{eq}}a^3,$$

где  $n_{\bar{B}}^{\text{eq}}$  — равновесная концентрация антибарионов. В итоге для полного изменения числа антибарионов получим уравнение Больцмана

$$\frac{d(n_{\bar{B}}a^3)}{dt} = -\Gamma_{\text{анн}} \cdot (n_{\bar{B}}a^3 - n_{\bar{B}}^{\text{eq}}a^3). \quad (11.6)$$

▷ *Задача 1. Получить уравнение (11.6), исходя из уравнения (5.54). Указание: учесть, что  $\Gamma_{\text{анн}} = \tau_{\text{анн}}^{-1}$  — вероятность аннигиляции одного антибариона в единицу времени (т.е.  $\tau_{\text{анн}}$  — время жизни антибариона в среде). Воспользоваться соотношением (5.47) и учесть, что концентрация барионов гораздо выше концентрации антибарионов, а потому концентрация барионов близка к равновесной.*

Если вероятность аннигиляции  $\Gamma_{\text{анн}}$  велика, то концентрация антибарионов близка к равновесной. Такая ситуация, как мы сейчас увидим, имеет место при достаточно высоких температурах. Равновесие сильно нарушается тогда, когда необходимый для его поддержания темп изменения числа антибарионов становится велик по сравнению с реальным темпом процессов аннигиляции и рождения. Смена режимов происходит в момент, когда

$$\left| \frac{d(n_{\bar{B}}^{\text{eq}} a^3)}{dt} \right| \sim \Gamma_{\text{анн}} \cdot n_{\bar{B}}^{\text{eq}} a^3. \quad (11.7)$$

В это время количество антибарионов в сопутствующем объёме замораживается.

Чтобы оценить температуру, при которой выполняется соотношение (11.7), и концентрацию антибарионов  $n_{\bar{B}} \approx n_{\bar{B}}^{\text{eq}}$  в этот момент, нам осталось найти равновесную концентрацию антибарионов как функцию температуры. Учтём, что в равновесии химические потенциалы частиц и античастиц равны и противоположны по знаку, и запишем для концентраций барионов и антибарионов, считая  $T \ll m_p$  (отличием масс протона  $m_p$  и нейтрона  $m_n$  пренебрегаем, спиновые факторы не выписываем)

$$\begin{aligned} n_B^{\text{eq}} &= \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_p - \mu_B}{T}}, \\ n_{\bar{B}}^{\text{eq}} &= \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_p + \mu_B}{T}}. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Отметим, что при  $T \ll m_p$  конечное (не экспоненциально малое) значение  $n_B^{\text{eq}}$  имеет место только при  $\mu_B = m_p + O(T)$ . Из (11.8) имеем, с учётом  $n_B = \eta_B \cdot n_\gamma$ ,

$$\begin{aligned} n_{\bar{B}}^{\text{eq}} &= \frac{1}{n_B} \left( \frac{m_p T}{2\pi} \right)^3 e^{-\frac{2m_p}{T}}, \\ &\sim \frac{m_p^3}{\eta_B} \cdot e^{-\frac{2m_p}{T}}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Эта величина быстро меняется с температурой при  $T \ll m_p$ , поэтому

$$\left| \frac{d(n_{\bar{B}}^{\text{eq}} a^3)}{dt} \right| = \left| a^3 \frac{dn_{\bar{B}}^{\text{eq}}}{dt} \right|.$$

С учётом равенства  $|\dot{T}/T| = H(T) = T^2/M_{Pl}^*$  имеем из (11.9)

$$\left| a^3 \frac{dn_{\bar{B}}^{\text{eq}}}{dt} \right| \sim a^3 \frac{m_p}{T} H \cdot n_{\bar{B}}^{\text{eq}}.$$

Соотношение (11.7) сводится теперь к

$$\frac{m_p}{T} H \equiv \frac{m_p}{T} \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \sim \Gamma_{\text{анн}} \sim \sigma_0 \eta_B T^3.$$

Отсюда для температуры выхода из равновесия получим

$$T \sim \left( \frac{m_p}{M_{Pl}^* \cdot \eta_B \cdot \sigma_0} \right)^{1/2} \sim 10 \text{ кэВ}. \quad (11.10)$$

При такой температуре концентрация антибарионов фантастически мала: из (11.9) имеем

$$n_{\bar{B}} \sim 10^{-10^5}, \quad (11.11)$$

(неважно, в каких единицах). В видимой части Вселенной не осталось ни одного реликтового бариона.

Разумеется, при столь малом числе антибарионов методы статистической физики, на которых основывалось приведённое здесь вычисление, можно поставить под сомнение. Однако не подлежит сомнению сам факт того, что в барион-асимметричной Вселенной все антибарионы выгорают в результате их аннигиляции с барионами.

▷ *Задача 2. Решить уравнение Больцмана (11.6) в квадратурах. Вычислив полученный интеграл методом перевала, найти температуру, при которой возникает наибольший вклад в современное значение  $n_{\bar{B}}$ , уточнив тем самым оценку (11.10). Найти выражение для современного значения  $n_{\bar{B}}$ . Сопоставится ли численное значение с (11.11)?*

▷ *Задача 3. Найти концентрацию реликтовых позитронов в современную эпоху.*

## 11.2 Несохранение барионного и лептонных чисел во взаимодействиях частиц.

В этом разделе мы обсудим два механизма нарушения барионного числа. Один из них скорее всего реализуется в природе, поскольку он имеется уже в Стандартной модели физики частиц. Другой механизм характерен для теорий Большого объединения. Хотя прямых экспериментальных доказательств Большого объединения калибровочных взаимодействий пока не существует, эта гипотеза выглядит весьма правдоподобной. Наконец, мы увидим в дальнейшем, что для генерации барионной асимметрии могут быть существенными и процессы с несохранением лептонных чисел; один из механизмов этого несохранения мы обсудим в конце раздела.

### 11.2.1 Электрослабый механизм

Несохранение барионного и лептонных чисел в Стандартной модели имеет непертурбативный характер; его не видно на уровне диаграмм теории возмущений. Мы здесь дадим лишь самое общее представление об этом механизме; заинтересованный читатель может узнать подробности в книге [34] или в обзорах по этому вопросу.

Существенную роль в обсуждаемом эффекте (его называют эффектом т'Хоофта) играют калибровочные взаимодействия подгруппы  $SU(2)_W$  группы Стандартной модели  $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U_Y$  (см. Приложение В). В этих взаимодействиях участвуют *левые* кварки и лептоны. Наивно, лагранжиан инвариантен относительно общих фазовых вращений всех кварковых полей (соответствующая симметрия приводила бы к сохранению барионного числа  $B$ ), а также фазовых вращений лептонов каждого поколения по-отдельности (три лептонных числа,  $L_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , см. Приложение В). Однако на квантовом уровне соответствующие токи  $j_\mu^B$ ,  $j_\mu^{L_n}$  имеют аномалии

$$\partial^\mu j_\mu^B = 3 \frac{g^2}{16\pi^2} V^{\mu\nu} {}^a \tilde{V}_{\mu\nu}^a, \quad (11.12)$$

$$\partial^\mu j_\mu^{L_n} = \frac{g^2}{16\pi^2} V^{\mu\nu} {}^a \tilde{V}_{\mu\nu}^a, \quad n = 1, 2, 3, \quad (11.13)$$

где  $V_{\mu\nu}^a = \partial_\mu V_\nu^a - \partial_\nu V_\mu^a + g\epsilon^{abc}V_\mu^b V_\nu^c$  — напряжённость калибровочного поля группы  $SU(2)_w$ ,  $\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\lambda\rho a}$ ,  $g$  — калибровочная константа связи группы  $SU(2)_w$ . Причина этой аномалии состоит именно в том, что левые и правые фермионы взаимодействуют с полем  $A_\mu^a$  по-разному<sup>1</sup> (в данном случае правые фермионы вообще с ним не взаимодействуют).

Соотношения (11.12) указывают на то, что барионное и лептонные числа не сохраняются<sup>2</sup>, если в вакууме или в среде возникают ненулевые калибровочные поля:

$$\begin{aligned}\Delta B = B(t_f) - B(t_i) &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \partial^\mu j_\mu^B \\ &= 3 \int_{t_i}^{t_f} d^4x \frac{g^2}{16\pi^2} V^{\mu\nu a} \tilde{V}_{\mu\nu}^a, \end{aligned} \quad (11.14)$$

где  $t_i$  и  $t_f$  — начальный и конечный моменты времени; аналогичное равенство справедливо и для каждого из лептонных чисел. Нарушение барионного числа возникает тогда, когда интеграл (11.14) отличен от нуля; для этого требуются сильные поля,  $F_{\mu\nu}^a \propto \frac{1}{g}$ . Энергия таких полей отлична от нуля и пропорциональна  $\frac{1}{g^2}$ . Таким образом, мы приходим к заключению, что нарушение барионного и лептонного чисел связано с преодолением энергетического барьера, см. рис. 11.1. Оценка для его высоты имеет вид

$$E_{sph} \sim \frac{M_W}{g^2},$$

где множитель  $M_W$  вставлен из соображений размерности<sup>3</sup> (все поля группы  $SU(2)_w$  имеют массу  $M_W$ , если различием между массами  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонов пренебречь, т.е. положить  $\sin\theta_w = 0$ , где  $\theta_w$  — слабый угол смешивания, см. Приложение В). Аккуратное вычисление для высоты барьера даёт

$$E_{sph} = \frac{2M_W}{\alpha_w} B\left(\frac{m_h}{M_W}\right),$$

где

$$\alpha_w \equiv \frac{g^2}{4\pi},$$

а значение функции  $B(m_h/M_W)$  изменяется в пределах [39] от

$$B = 1.56, \quad \frac{m_h}{M_W} \ll 1,$$

до

$$B = 2.72, \quad \frac{m_h}{M_W} \gg 1.$$

Таким образом, в Стандартной модели высота энергетического барьера составляет 7.5 – 13 ТэВ.

<sup>1</sup>В квантовой хромодинамике левые и правые кварки взаимодействуют с глюонами одинаково, поэтому в сильных взаимодействиях барионное число сохраняется.

<sup>2</sup>Мы здесь не обсуждаем, в результате какого именно физического механизма изменяется число кварков и лептонов в системе; см. по этому поводу [34] и ссылки там.

<sup>3</sup>Обозначение  $E_{sph}$  связано со следующим обстоятельством. Высота энергетического барьера равна энергии седловой конфигурации — экстремума функционала статической энергии. Эту конфигурацию называют сфалероном, sphaleron (от греческого *σφαλερον* — ненадёжное, готовое упасть).



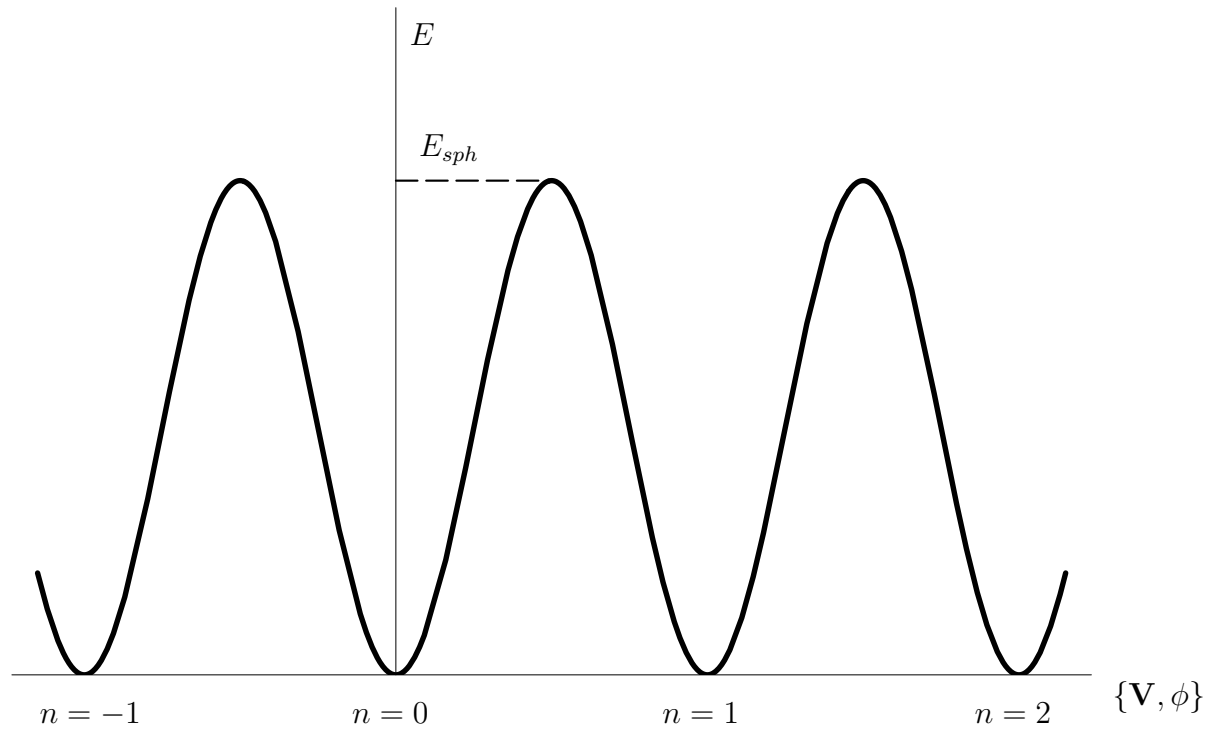


Рис. 11.1: Схематическое изображение статической энергии как функционала классических калибровочных и хиггсовских полей. Горизонтальная ось соответствует (бесконечномерному) пространству всех полевых конфигураций  $\{\mathbf{V}, \phi\}$ . Абсолютные минимумы, нумеруемые целым числом  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — чисто калибровочные конфигурации с нулевой энергией, в которых поля  $\mathbf{V}(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x})$  имеют различные топологические свойства (топологически различные вакуумы). Интеграл в правой части (11.14) равен единице при изменении полей от вакуума с топологическим числом  $n$  к вакууму с числом  $(n+1)$  и равен нулю, если поля эволюционируют в окрестности какого-то одного вакуума. “Максимум” с энергией  $E_{sph}$  на самом деле является седловой точкой: вдоль одного направления в конфигурационном пространстве статическая энергия понижается, а вдоль всех остальных направлений — увеличивается.

При нулевой температуре (и нулевой плотности фермионов) преодоление энергетического барьера, а значит, несохранение барионного и лептонных чисел, возможно только за счёт квантового туннелирования. Такое туннелирование описывается инстантоном<sup>4</sup>, и вероятность его экспоненциально подавлена

$$\Gamma \propto e^{-\frac{4\pi}{\alpha_W}}.$$

С учётом того, что  $\alpha_W \sim 1/30$ , фактор подавления здесь чрезвычайно мал,  $\Gamma \propto 10^{-165}$ . В обычных условиях процессов с нарушением барионного числа практически не происходит.

Иная ситуация имеет место при конечных температурах: в этом случае преодоление энергетического барьера возможно в результате тепловых скачков на его вершину (точнее, седловую точку). При не слишком высоких температурах самая наивная

<sup>4</sup>В данном случае речь идёт об инстантонах Белафина–Полякова–Шварца–Тюпкина в неабелевых калибровочных теориях.

оценка подавления таких скачков даётся больцмановским фактором для конфигурации с энергией  $E_{sph}$ ,

$$\Gamma_{sph} \propto e^{-\frac{E_{sph}}{T}}.$$

Эта оценка, однако, неверна при наиболее интересных температурах, когда фактор подавления не слишком мал. Вероятность реализации той или иной конфигурации определяется не её энергией, а её *свободной* энергией. В данном случае главный эффект состоит в том, что среднее хиггсовского поля, а значит и  $M_W$ , зависит от температуры, см. Главу 10. Поэтому более аккуратная оценка имеет вид:

$$\Gamma_{sph} = C \cdot T^4 e^{-\frac{F_{sph}(T)}{T}}, \quad (11.15)$$

где

$$F_{sph}(T) = \frac{2M_W(T)}{\alpha_W} B\left(\frac{m_h}{M_W}\right), \quad (11.16)$$

причём можно считать, что аргументом функции  $B$  по-прежнему служит отношение нуль-температурных масс (в действительности это не совсем верно, но для дальнейших оценок последнее обстоятельство не слишком существенно ввиду слабой зависимости  $B$  от своего аргумента). Величина  $\Gamma_{sph}$  представляет собой вероятность перехода через энергетический барьер в единичном объёме в единицу времени, поэтому в (11.15) выделен фактор  $T^4$  из соображений размерности. Предэкспонента  $C$  — безразмерная и зависит от температуры, среднего значения хиггсовского поля и констант связи; в дальнейшем мы, тем не менее, будем полагать

$$C \sim 1,$$

поскольку наиболее существенным в (11.15) является экспоненциальный фактор.

Итак, при не слишком высоких температурах вероятность электрослабых процессов с несохранением барионного числа даётся формулой (11.15). Эта формула, однако, перестаёт работать при высоких температурах, когда  $F_{sph} \lesssim T$ , и экспоненциальное подавление отсутствует. Последняя ситуация имеет место, в частности, в фазе с ненарушенной электрослабой симметрией<sup>5</sup>, когда  $\langle\phi\rangle = 0$  и, следовательно,  $M_W(T) = 0$ . В этом случае можно воспользоваться размерной оценкой

$$\Gamma_{sph} = \kappa' \alpha_W^5 T^4, \quad (11.17)$$

где  $\kappa'$  — численный коэффициент. Оценка (11.17) отчасти вытекает из результатов раздела 10.3. Мы в нём видели, что в теории при высоких температурах и  $M_W(T) = 0$  имеется непертурбативный параметр  $g_3^2 = g^2 T$ . Темп сфалеронных переходов в основном определяется этим параметром; отсюда и из соображений размерности следовала бы оценка  $\Gamma_{sph} \sim g_3^4 \sim (\alpha_W T)^4$ . Дополнительный фактор  $\alpha_W$  возникает благодаря специфически плазменным эффектам [40]. Коэффициент  $\kappa'$  найден из решёточных вычислений и оказался довольно большим [41]

$$\kappa' \simeq 25.$$

Отметим, что если в формулу (11.15) вместо  $M_W(T)$  подставить непертурбативный масштаб  $g_3^2$ , то свободная энергия сфалерона будет порядка температуры, т.е. больцмановское подавление будет действительно отсутствовать.

---

<sup>5</sup>Мы здесь пользуемся общепринятой, хотя и не вполне корректной терминологией, см. обсуждение в Главе 10.

Воспользуемся оценками (11.15) и (11.17), чтобы найти, при каких температурах электрослабые процессы с несохранением барионного числа находятся в термодинамическом равновесии в ранней Вселенной. Эти процессы являются быстрыми в расширяющейся Вселенной, если в течение хаббловского времени каждая частица имеет возможность принять участие хотя бы в одном из них, т.е.  $n\Gamma_{sph} \gtrsim H$ , где  $n \sim T^3$  — плотность числа частиц в среде. Таким образом, термодинамическое равновесие по отношению к сфалеронным процессам имеет место, когда

$$\frac{\Gamma_{sph}}{T^3} \gtrsim H(T) = \frac{T^2}{M_{Pl}^*} \quad (11.18)$$

При высоких температурах используем (11.17) и получим

$$T \lesssim T_{sph} \sim 10^{12} \text{ ГэВ} . \quad (11.19)$$

При относительно низких температурах требование (11.18) приводит к ограничению

$$\frac{M_W(T)}{T} \lesssim \frac{\alpha_W}{2B(m_h/M_W)} \ln \frac{M_{Pl}^*}{T} .$$

С учётом грубой оценки  $T \sim 100$  ГэВ, достаточной в аргументе логарифма, имеем численно

$$\frac{M_W(T)}{T} \lesssim \frac{0.66}{B(m_h/M_W)} \sim 0.24 - 0.43 , \quad (11.20)$$

в зависимости от нуль-температурной массы бозона Хиггса. Итак, электрослабые процессы с несохранением барионного числа находятся в термодинамическом равновесии в широком интервале температур от, грубо говоря, 100 ГэВ до  $10^{11}$  ГэВ.

В заключение этого раздела остановимся на правилах отбора для электрослабых процессов с несохранением барионного числа. Они следуют из соотношений (11.12), (11.13) и имеют вид

$$\Delta B = 3\Delta L_e = 3\Delta L_\mu = 3\Delta L_\tau .$$

Иными словами, сохраняющимися величинами являются три линейно-независимых комбинации барионного и лептонных чисел, которые можно выбрать в виде

$$(B - L) , \quad (L_e - L_\mu) , \quad (L_e - L_\tau) . \quad (11.21)$$

При температурах  $100 \text{ ГэВ} \lesssim T \lesssim 10^{11} \text{ ГэВ}$  плотности этих чисел, вообще говоря, могут быть отличны от нуля, а сами барионное и лептонные числа подстраиваются так, чтобы большой термодинамический потенциал был минимален.

Найдём в качестве примера плотности барионного и лептонного чисел при температурах выше электрослабого фазового перехода, но ниже (11.19), полагая заданной плотность  $(B - L)$  и считая плотности различных лептонных чисел одинаковыми. Вычисление проведём в рамках Стандартной модели физики частиц с  $\nu_f$  поколениями фермионов и  $\nu_s$  дублетами скаляров Хиггса. Квантовые числа всех частиц Стандартной модели приведены в Приложении В, причём выше электрослабого фазового перехода удобно работать в терминах хиггсовских скаляров, образующих дублеты с компонентами  $h^+$  и  $h^0$ , соответствующих им античастиц, а также безмассовых калибровочных бозонов с двумя поляризациями. Для вычисления плотностей чисел всех частиц введём химические потенциалы ко всем сохраняющимся квантовым числам. В данном случае существенными квантовыми числами являются  $(B - L)$  и слабый гиперзаряд  $Y$  (см. задачу 2 раздела 5.1). В результате частицы и античастицы типа  $I$  будут обладать химическими потенциалами: для частиц это

$$\mu_I = \mu(B_I - L_I) + \mu_Y \frac{Y_I}{2} ,$$

а для античастиц  $\mu_{\bar{I}} = -\mu_I$ . Здесь  $B_I$ ,  $L_I$  и  $Y_I$  — барионное число, лептонное число и слабый гиперзаряд частицы  $I$ ,  $\mu$  и  $\mu_Y$  — химические потенциалы к  $(B-L)$  и  $Y/2$ . Например, для левого электрона и нейтрино

$$\mu_\nu = \mu_{e_L} = -\mu - \frac{1}{2}\mu_Y,$$

для заряженного и нейтрального скаляров (компонент одного из хиггсовских дублетов)

$$\mu_{h^+} = \mu_{h^0} = \frac{1}{2}\mu_Y$$

и т.д. Воспользуемся результатами задачи 2 раздела 5.1 и запишем для асимметрии плотности числа фермионов типа  $F$  всех поколений

$$n_F - n_{\bar{F}} = \Delta n_F = \frac{1}{2}\nu_f \cdot \mu_F \frac{T^2}{3},$$

и для асимметрии плотности числа скаляров типа  $H$

$$n_H - n_{\bar{H}} = \Delta n_H = \nu_s \cdot \mu_H \cdot \frac{T^2}{3}$$

(считаем эти значения малыми, т.е.  $\mu_I \ll T$ ). Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \Delta n_{h^+} + \Delta n_{h^0} &= \nu_s \cdot \mu_Y \cdot \frac{T^2}{3}, \\ \Delta n_\nu + \Delta n_{l_L} &= \nu_f \left( -\frac{1}{2}\mu_Y - \mu \right) \cdot \frac{T^2}{3}, \\ \Delta n_{l_R} &= \frac{1}{2}\nu_f (-\mu_Y - \mu) \cdot \frac{T^2}{3}, \\ \Delta n_{u_L} + \Delta n_{d_L} &= \nu_f \left( \frac{1}{6}\mu_Y + \frac{1}{3}\mu \right) \cdot 3 \cdot \frac{T^2}{3}, \\ \Delta n_{u_R} &= \frac{1}{2}\nu_f \left( \frac{2}{3}\mu_Y + \frac{1}{3}\mu \right) \cdot 3 \cdot \frac{T^2}{3}, \\ \Delta n_{d_R} &= \frac{1}{2}\nu_f \left( -\frac{1}{3}\mu_Y + \frac{1}{3}\mu \right) \cdot 3 \cdot \frac{T^2}{3}, \end{aligned} \quad (11.22)$$

где фактор 3 в последних трёх выражениях учитывает число цветов кварков. Калибровочные векторные бозоны имеют нулевые барионное и лептонные числа и слабый гиперзаряд, поэтому асимметрия для них отсутствует.

Учтём, что среда нейтральна по отношению ко всем калибровочным зарядам (это — аналог условия электронейтральности обычной плазмы). В частности, плотность слабого гиперзаряда равна нулю,

$$\sum_I Y_I \cdot \Delta n_I = 0.$$

Используя (11.22), получим

$$\nu_f \left[ \frac{5}{3}\mu_Y + \frac{4}{3}\mu \right] + \frac{1}{2}\nu_s \cdot \mu_Y = 0. \quad (11.23)$$

Отсюда видно, для чего мы ввели химический потенциал  $\mu_Y$ : если бы мы изначально положили  $\mu_Y = 0$ , то при  $\mu \neq 0$  среда не была бы нейтральной по отношению к слабому гиперзаряду.

Исключив с помощью уравнения (11.23) один из химических потенциалов, например  $\mu$ , выразим все асимметрии (11.22) через единственный оставшийся химический потенциал. В результате для избытка барионного числа, который будем обозначать просто  $B$ , получим

$$\begin{aligned} B &\equiv \frac{1}{3} (\Delta n_{u_L} + \Delta n_{d_L} + \Delta n_{u_R} + \Delta n_{d_R}) \\ &= -\frac{T^2}{3} \left( \frac{1}{2}\nu_f + \frac{1}{4}\nu_s \right) \mu_Y, \end{aligned} \quad (11.24)$$

а избыток лептонного числа равен

$$L = \frac{T^2}{3} \left( \frac{7}{8}\nu_f + \frac{9}{16}\nu_s \right) \mu_Y.$$

Таким образом, значение  $(B-L)$ , которое считаем фиксированным, связано с  $\mu_Y$  соотношением

$$B-L = -\frac{T^2}{3} \left( \frac{11}{8}\nu_f + \frac{13}{16}\nu_s \right) \mu_Y.$$

Вновь используя (11.24), получим окончательно

$$B = \frac{8\nu_f + 4\nu_s}{22\nu_f + 13\nu_s} \cdot (B - L) , \quad (11.25)$$

что и даёт константу  $C$ , фигурирующую в (11.3). В природе число фермионных поколений (с массами ниже или порядка электрослабого масштаба) равно 3, и в случае одного хиггсовского дублета имеем

$$C = \frac{8\nu_f + 4\nu_s}{22\nu_f + 13\nu_s} (\nu_f = 3, \nu_s = 1) = \frac{28}{79} . \quad (11.26)$$

Подчёркнём, что это значение, как и весь анализ, справедливо только выше электрослабого фазового перехода; ниже фазового перехода, точнее, при  $M_W(T) \sim T$  параметр  $C$  становится функцией отношения  $M_W(T)/T$  и несколько (хотя и несильно) отличается от (11.26), см., например, [42].

▷ **Задача 4.** Для температур выше температуры электрослабого фазового перехода ввести, помимо  $\mu$  и  $\mu_Y$ , химический потенциал  $\mu_3$  к диагональной (третьей) компоненте слабого изоспина  $T^3$ , найти асимметрии плотностей всех частиц, включая векторные бозоны, и показать, что требование равенства нулю плотности слабого изоспина в среде эквивалентно условию  $\mu_3 = 0$  при любых  $\mu$  и  $\mu_Y$ . Примечание: этот результат перестаёт быть справедливым ниже температуры фазового перехода.

▷ **Задача 5.** В случае температуры выше температуры электрослабого фазового перехода рассмотреть общую ситуацию, когда плотности всех трёх сохраняющихся чисел (11.21) отличны от нуля. Показать, что плотность барионного числа по-прежнему определяется формулой (11.25).

## 11.2.2 Нарушение барионного числа в теориях Большого объединения

Другой механизм нарушения барионного и лептонных чисел возникает в теориях Большого объединения. В них имеются новые сверхмассивные частицы — векторы и скаляры (а в суперсимметричных теориях — и фермионы) — во взаимодействиях которых с обычными кварками и лептонами барионное и лептонные числа нарушаются уже на уровне теории возмущений. Например, возможна вершина типа изображённой на рис. 11.2а, описывающая взаимодействие векторного бозона  $V$  с

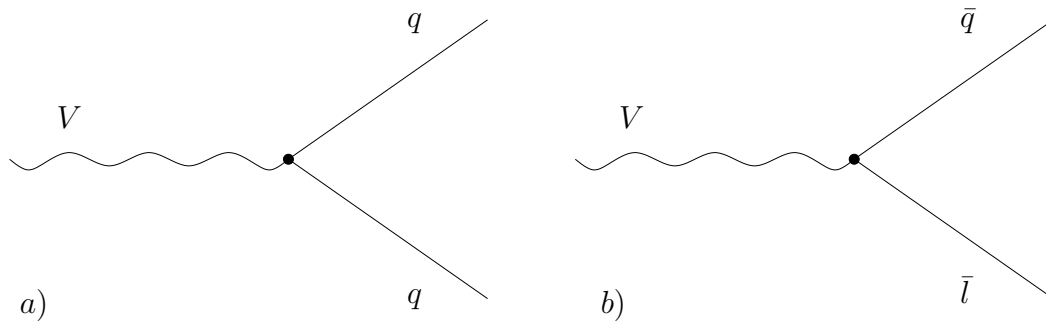


Рис. 11.2: Взаимодействие векторного бозона с кварками  $q$ , антикварками  $\bar{q}$  и антилептонами  $\bar{l}$ .

двумя кварками (в отличие от калибровочных вершин Стандартной модели, в которых фигурируют кварк и антикварк). Наличие такой вершины ещё не означает несохранения барионного числа: если бы существовала только она, то бозону  $V$  можно было бы приписать барионное число  $\frac{2}{3}$ , и тогда барионное число сохранялось бы. Однако если имеется и вершина типа изображённой на рис. 11.2б (почему на нём показан антилептон, а не лептон, будет ясно из дальнейшего), то нарушение

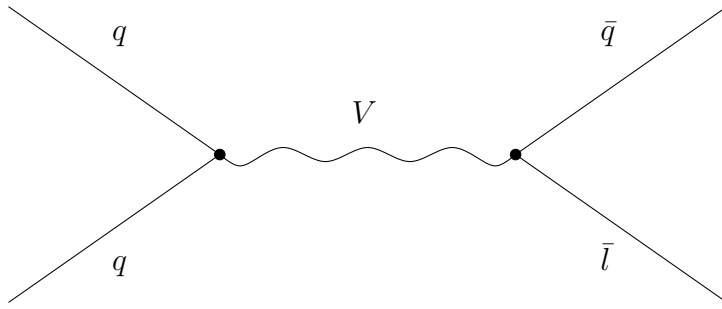


Рис. 11.3: Процесс с обменом векторным бозоном  $V$ , приводящий к нарушению барионного числа.

барионного числа действительно имеет место: например, обмен бозоном  $V$  приводит к процессу, изображённому на рис. 11.3, в котором барионное число явным образом не сохраняется.

Взаимодействия рис. 11.3 приводят к нестабильности протона, см. рис. 11.4. На время жизни протона имеются жёсткие экспериментальные огра-

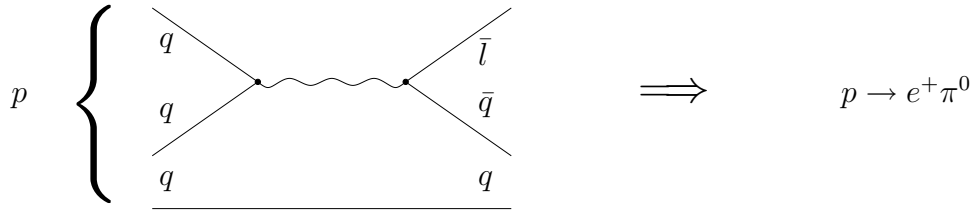


Рис. 11.4: Диаграмма, приводящая к распаду протона.

ничения: в зависимости от моды распада

$$\tau_p > 10^{32} - 10^{33} \text{ лет} . \quad (11.27)$$

Отсюда следуют сильные ограничения на параметры взаимодействий с нарушением барионного числа. Из диаграммы рис. 11.4 получаем следующую оценку для ширины распада протона,

$$\Gamma_p \equiv \frac{1}{\tau_p} \sim \frac{\alpha_V^2}{M_V^4} m_p^5 ,$$

где  $\alpha_V = \frac{g_V^2}{4\pi}$ ,  $g_V$  — константа связи, имеющаяся в каждой из вершин; фактор  $M_V^{-2}$  в амплитуде (т.е.  $M_V^{-4}$  в ширине) возник из-за пропагатора  $V$ -бозона, а фактор  $m_p^5$  поставлен из размерных соображений. Отсюда и из (11.27) получаем ограничение

$$M_V \gtrsim 10^{16} \text{ ГэВ} . \quad (11.28)$$

Таким образом, взаимодействия, о которых идёт речь, могут быть существенными для космологии, только если во Вселенной достигались температуры, сравнимые с масштабом Большого объединения (см., впрочем, сноску в начале этой Главы),

$$M_{GUT} \sim 10^{15} - 10^{16} \text{ ГэВ} . \quad (11.29)$$

Если в теорию не включать новых фермионов, а ограничиться только фермионами Стандартной модели, то взаимодействия, нарушающие барионное число, описываются диаграммами рис. 11.2, причём в 11.2b фигурирует именно антилептон. Это следует из инвариантности относительно калибровочной группы Стандартной модели, как мы увидим в конце раздела. С точки зрения генерации барионной асимметрии замечательным является тот факт, что все эти взаимодействия сохраняют

$(B - L)$ , если векторным бозонам  $V$  и аналогичным им скалярным бозонам  $S$  приписывать  $(B - L) = \frac{2}{3}$ . Поэтому генерация барионной асимметрии только за счёт этих взаимодействий невозможна: такая генерация происходила бы при температурах выше электрослабого фазового перехода, при этом  $(B - L)$  оставалось бы равным нулю, и процессы, рассмотренные в предыдущем разделе, приводили бы к практически полному вымыванию барионной асимметрии. Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и в суперсимметричных теориях.

Если в теории имеются новые фермионы, то  $(B - L)$  может не сохраняться во взаимодействиях, нарушающих барионное число. Простой пример получается, если к фермионам Стандартной модели добавить фермион  $\Lambda_L$ , обладающий нулевыми

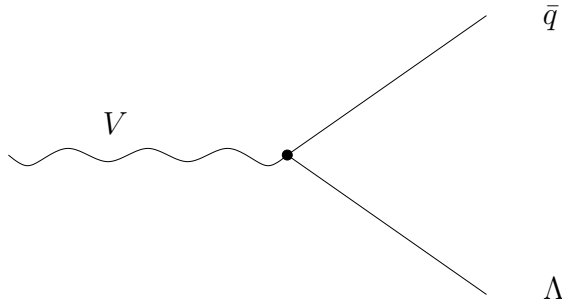


Рис. 11.5: Вершина взаимодействия, нарушающая  $(B - L)$ .

барионным и лептонным числами и нейтральный по отношению ко всем калибровочным взаимодействиям Стандартной модели. Тогда наряду с вершинами рис. 11.2 возможны вершины, изображённые на рис. 11.5. Конечные состояния, показанные на рис. 11.2 имеют  $(B - L) = \frac{2}{3}$ , в то время как конечные состояния, изображённые на рис. 11.5 имеют  $(B - L) = -\frac{1}{3}$ , что и говорит о нарушении  $(B - L)$ . Другая возможность состоит в том, что  $\Lambda_L$  является лептоном, т.е. имеет лептонное число  $L = 1$ .

Причина, по которой в теориях Большого объединения имеются взаимодействия типа изображённых на рис. 11.2a,b, — следующая. Большое объединение сильных и электрослабых взаимодействий подразумевает, что все эти калибровочные взаимодействия при сверхвысоких энергиях являются единым взаимодействием. Иными словами, калибровочная группа Стандартной модели  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U_Y$  является подгруппой простой калибровочной группы  $G$ , а известные фермионы образуют (возможно, при добавлении новых фермионов) представления группы  $G$ . Отсюда сразу следует, что в мультиплете, частью которого является лептонный дублет (и в мультиплете, возможно другом, которому принадлежит правый заряженный лептон), должны иметься фермионы, нетривиально преобразующиеся относительно группы  $SU(3)_c$ , т.е. обладающие цветом. Если не вводить слишком много новых фермионов, то эти цветные партнёры лептонов следует отождествить с обычными кварками. Далее, поскольку кварки и лептоны теперь находятся вместе в одном калибровочном мультиплете, должны существовать калибровочные бозоны, обладающие взаимодействием типа изображённого на рис.11.2b. В одном мультиплете с цветными частицами, образующими дублет относительно группы  $SU(2)_w$ , могут быть цветные частицы, синглетные относительно  $SU(2)_w$ . Иными словами, в мультиплете группы  $G$ , содержащем левые кварковые дублеты, могут иметься  $SU(2)_w$ -синглетные цветные фермионы, которые также должны быть левыми. Таковыми являются левые антикварки. Итак, возможны мультиплеты группы  $G$ , содержащие как кварки, так и антикварки, что приводит к взаимодействиям типа изображённого на рис.11.2a.

Простейшим примером (однако, по-видимому, не реалистичным) служит теория с калибровочной группой  $G = SU(5)$ , в алгебру которой калибровочные алгебры Стандартной модели вложены следующим образом:

$$\begin{aligned} SU(3)_c &: \begin{pmatrix} SU(3) & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \\ SU(2)_w &: \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} \\ 0_{2 \times 3} & SU(2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.30)$$

$$U(1)_Y : \quad Y = \sqrt{\frac{5}{3}} T^{24}, \quad T^{24} = \frac{1}{2\sqrt{15}} \cdot \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) \quad (11.31)$$

(индексы в (11.30) обозначают размерности матриц;  $0_{m \times n}$  — нулевая матрица). В этой модели нет необходимости вводить новые фермионы, если расположить фермионы одного поколения Стандартной модели в одном представлении  $\bar{\mathbf{5}}$  (антифундаментальное представление  $SU(5)$ ) и одном представлении  $\mathbf{10}$  (антисим-

метричное представление  $SU(5)$ ):

$$\bar{\mathbf{5}} = \left( d_L^{(c)1}, d_L^{(c)2}, d_L^{(c)3}, e_L^-, \nu_e \right),$$

$$\mathbf{10} = \begin{pmatrix} 0 & u_L^{(c)3} & -u_L^{(c)2} & u_L^1 & d_L^1 \\ -u_L^{(c)3} & 0 & u_L^{(c)1} & u_L^2 & d_L^2 \\ u_L^{(c)2} & -u_L^{(c)1} & 0 & u_L^3 & d_L^3 \\ -u_L^1 & -u_L^2 & -u_L^3 & 0 & e_L^+ \\ -d_L^1 & -d_L^2 & -d_L^3 & -e_L^+ & 0 \end{pmatrix},$$

где верхний индекс относится к цвету, а  $u_L^{(c)}$  и  $d_L^{(c)}$  обозначают поля левых антикварков (антитриплетов относительно  $SU(3)_c$  и  $SU(2)_W$ -синглетов).

- ▷ **Задача 6.** Показать, что в описанной модели все фермионы имеют в точности квантовые числа фермионов Стандартной модели по отношению к группе  $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U_Y$ , вложенной в  $SU(5)$  согласно (11.30), (11.31).

Калибровочные бозоны образуют присоединённое представление  $SU(5)$  (24-плет). Помимо известных калибровочных бозонов, соответствующих алгебрам (11.30), (11.31), имеется ещё 12 бозонов, поля которых вложены в алгебру  $SU(5)$  следующим образом

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V_\mu^1 & U_\mu^1 \\ 0 & 0 & 0 & V_\mu^2 & U_\mu^2 \\ 0 & 0 & 0 & V_\mu^3 & U_\mu^3 \\ V_\mu^{1*} & V_\mu^{2*} & V_\mu^{3*} & 0 & 0 \\ U_\mu^{1*} & U_\mu^{2*} & U_\mu^{3*} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где каждое из полей  $U_\mu^a$ ,  $V_\mu^a$  комплексное и описывает два векторных бозона. Взаимодействия этих бозонов с кварками и лептонами имеют в точности вид, изображённый на рис. 11.2a,b.

- ▷ **Задача 7.** Выписать все члены лагранжиана взаимодействия бозонов  $V_\mu$  и  $U_\mu$  с кварками и лептонами. Указание: для компактности записи учесть, что поля  $(V_\mu, U_\mu)$  вместе образуют  $SU(2)_W$ -дублет и являются  $SU(3)_c$ -триплетами.

Масштаб (11.29) появляется в теории естественным образом. С учётом квантовых эффектов (петель) “константы связи” в калибровочных теориях в действительности слабо (логарифмически) зависят от энергии (точнее, от переданного импульса  $Q$ ). При низких энергиях значения калибровочных констант группы  $SU(3)_c$ ,  $SU(2)_W$  и  $U(1)_Y$  Стандартной модели сильно различаются, однако при увеличении энергии они сближаются, как схематично показано на рис. 11.6. В *суперсимметричном расширении* Стандартной модели все три константы принимают одно и то же значение  $\alpha_{GUT} \approx 1/25$  при  $Q = M_{GUT} \approx 10^{16}$  ГэВ. Именно так и должно быть в теории, где при энергиях выше  $M_{GUT}$  имеется единое калибровочное взаимодействие, характеризующееся одной константой связи. Объединение констант является сильнейшим аргументом, свидетельствующим как об объединении всех трёх калибровочных взаимодействий в теории Большого объединения, так и о наличии в природе суперсимметрии и суперсимметричном расширении Стандартной модели при сравнительно низких энергиях.

Продолжая общее рассмотрение, обсудим, какие ограничения на структуру взаимодействий с несохранением барионного числа накладывают симметрии Стандартной модели физики частиц. Будем пока считать, что других фермионов, кроме известных кварков и лептонов, нет. В этой Главе все фермионы Стандартной модели удобно считать левыми, т.е. вместо правых полей кварков и заряженных лептонов  $U_R$ ,  $D_R$  и  $E_R$  удобно ввести левые поля, обозначаемые  $U_L^{(c)}$ ,  $D_L^{(c)}$  и  $E_L^{(c)}$  и описывающие левые антикварки и антилептоны. Они являются синглетами по отношению к группе  $SU(2)_W$ , анти-триплетами ( $U_L^{(c)}$ ,  $D_L^{(c)}$ ) и синглетами ( $E_L^{(c)}$ ) по отношению к группе цвета  $SU(3)_c$  и имеют слабые гиперзаряды противоположного знака по отношению к соответствующим частицам, т.е.

$$Y_{U_L^{(c)}} = -\frac{4}{3}, \quad Y_{D_L^{(c)}} = \frac{2}{3}, \quad Y_{E_L^{(c)}} = 2.$$

Слабые гиперзаряды левых дублетов равны, как обычно,

$$Y_{Q_L} = \frac{1}{3}, \quad Y_{L_L} = -1.$$

В терминах левых полей единственный лоренц-инвариантный тип перенормируемого взаимодействия с векторными полями имеет вид

$$\bar{\psi}_L^{(a)} \gamma^\mu V_\mu \psi_L^{(b)} \propto V \bar{\psi}^{(a)} \psi^{(b)}, \quad (11.32)$$



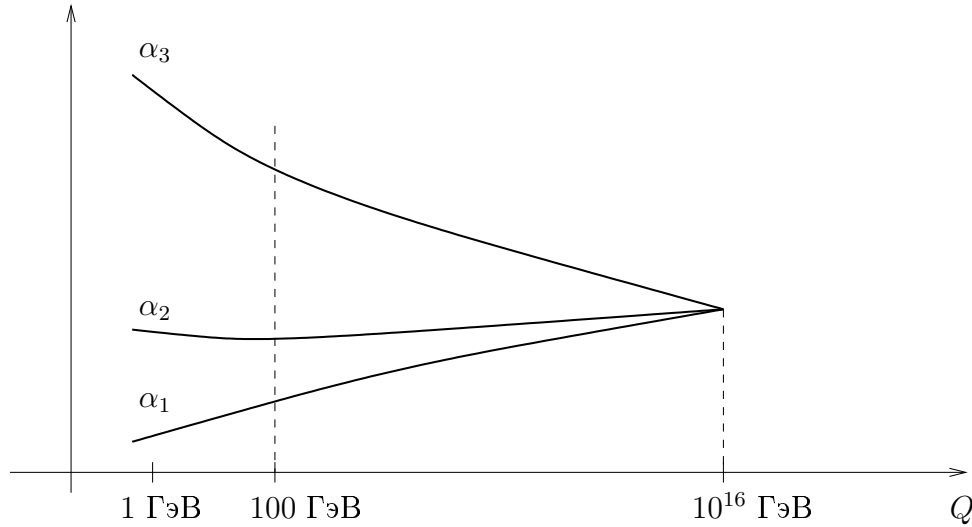


Рис. 11.6: Схематическое изображение эволюции калибровочных констант с переданным импульсом в суперсимметричном расширении Стандартной модели.  $\alpha_3 \equiv \alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi}$  и  $\alpha_2 \equiv \alpha_w \equiv \frac{g^2}{4\pi}$ , где  $g_s$  и  $g$  — константы групп  $SU(3)_c$  и  $SU(2)_w$ ;  $\alpha_1 = \frac{5}{3} \frac{g'^2}{4\pi}$ , где  $g'$  — константа группы  $U(1)_Y$ ; фактор  $\frac{5}{3}$  здесь связан с отличием нормировки генератора  $U(1)_Y$  от стандартной нормировки генераторов группы Большого объединения (в частности, след генератора  $T^{24}$  в  $SU(5)$ , равный стандартному значению  $\frac{1}{2}$ , отличается от следа квадрата генератора  $Y$  именно этим фактором, см. (11.31); отсюда калибровочные константы  $SU(5)$  и  $U(1)_Y$  связаны соотношением  $g_{SU(5)} = \sqrt{\frac{5}{3}} g'$ .

а взаимодействие юкавского типа со скалярным полем  $S$  может иметь только вид (ср. с майорановским массовым членом нейтрино, Приложение С)

$$\bar{\psi}_L^{(c)} S \psi_L \propto S \psi^{(a)} \psi^{(b)} \quad \text{или} \quad \bar{\psi}_L S \psi_L^{(c)} \propto S \bar{\psi}^{(a)} \bar{\psi}^{(b)}, \quad (11.33)$$

где в качестве  $\psi^{(a)}$ ,  $\psi^{(b)}$  могут фигурировать различные фермионные поля Стандартной модели. Подчеркнём, что в (11.32) фигурируют как  $\psi$ , так и  $\bar{\psi}$ , а в (11.33) — только  $\psi$  или только  $\bar{\psi}$ .

Взаимодействия (11.32), (11.33) должны быть инвариантны относительно всех калибровочных симметрий Стандартной модели. Как мы сейчас увидим, это требование накладывает жёсткие ограничения на их структуру.

Прежде всего, если имеется вершина рис. 11.2а, то  $V$  должен быть антитриплетом или секстетом по цвету (поскольку для представлений группы  $SU(3)_c$  справедливо  $\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{6} + \bar{\mathbf{3}}$ ). В последнем случае других вершин нет (из инвариантности относительно  $SU(3)_c$ ), и этот случай неинтересен. Если  $V$  — антитриплет, то инвариантность относительно  $SU(3)_c$  разрешает ещё две вершины: вершину рис. 11.2б и аналогичную вершину с лептоном вместо антилептона. Это же справедливо для скаляра  $S$ . Случай (анти)триплетных бозонов в действительности исчерпывает все возможности несохранения барионного числа в перенормируемых взаимодействиях, совместных с инвариантностью относительно  $SU(3)_c$ .

▷ **Задача 8.** Доказать, последнее утверждение.

Дальнейшие ограничения накладывает инвариантность относительно  $SU(2)_w$  и слабого гиперзаряда. Начнём со случая векторных частиц  $V$ . Учитывая, что  $U_L^{(c)}$  и  $D_L^{(c)}$  являются полями *анти*-кварков, получим, что имеются две комбинации полей, взаимодействие типа (11.32) с которыми приводит к вершине рис. 11.2а:

$$\bar{U}_L^{(c)} Q \quad \left( \mathbf{2}, \frac{5}{3} \right) \quad (11.34)$$

$$\bar{D}_L^{(c)} Q \quad \left( \mathbf{2}, -\frac{1}{3} \right) \quad (11.35)$$

(в скобках указано представление группы  $SU(2)_w$  — в данном случае дублетное  $\mathbf{2}$  — и слабый гиперзаряд соответствующего оператора). Такие же квантовые числа должна иметь комбинация антикварка и лептона

(или антилептона) с которой взаимодействует поле  $V$ . Дублетными по  $SU(2)_W$  являются комбинации

$$\begin{aligned}\bar{Q}E_L^{(c)} & \left(2, \frac{5}{3}\right) \\ \bar{L}U_L^{(c)} & \left(2, \frac{1}{3}\right) \\ \bar{L}D_L^{(c)} & \left(2, \frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

(напомним, что для группы  $SU(2)$  дублетное представление совпадает со своим сопряжённым). Видно, что единственная возможность состоит в том, что векторный бозон  $V$  является дублетом относительно  $SU(2)_W$ , имеет слабый гиперзаряд  $\frac{5}{3}$  и участвует во взаимодействиях вида

$$V^\dagger \bar{U}_L^{(c)} Q + V^\dagger \bar{Q} E_L^{(c)} + V^\dagger \bar{L} D_L^{(c)} + h.c. ,$$

где лоренцева структура и константы связи не выписаны. В терминах исходных кварков и лептонов вершины с участием верхней и нижней компонент дублета  $V$  изображены на рис. 11.7.

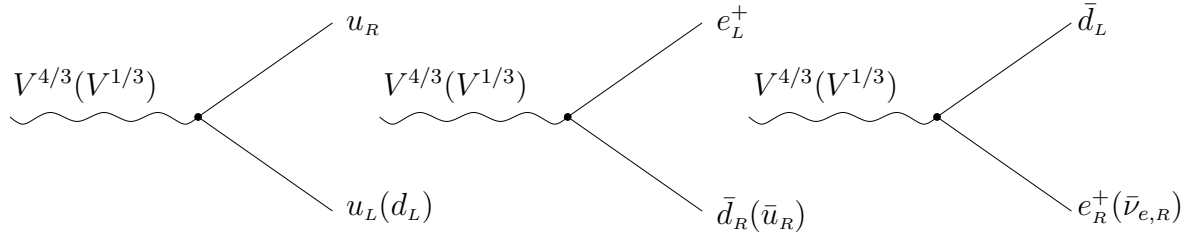


Рис. 11.7: Взаимодействие векторных бозонов, нарушающие барионное число.  $V^{4/3}$  и  $V^{1/3}$  обозначают верхнюю и нижнюю компоненту слабого дублета,  $4/3$  и  $1/3$  — электрические заряды соответствующих частиц. Показаны взаимодействия с лептонами и кварками первого поколения; на самом деле в каждой из внешних линий может фигурировать любая линейная комбинация кварковых или лептонных полей всех поколений, обладающая указанными на рисунке квантовыми числами.

Обратимся теперь к скалярам. В этом случае взаимодействия типа (11.33), приводящие к вершине типа изображённой на рис. 11.2а, могут включать комбинации

$$Q_L Q_L \quad \left(3, \frac{1}{3}\right) \quad (11.36)$$

$$Q_L Q_L \quad \left(1, \frac{1}{3}\right) \quad (11.37)$$

$$\bar{U}_L^{(c)} \bar{U}_L^{(c)} \quad \left(1, \frac{4}{3}\right) \quad (11.38)$$

$$\bar{U}_L^{(c)} \bar{D}_L^{(c)} \quad \left(1, \frac{1}{3}\right) \quad (11.39)$$

$$\bar{D}_L^{(c)} \bar{D}_L^{(c)} \quad \left(1, -\frac{2}{3}\right) \quad (11.40)$$

Имеется единственная триплетная по  $SU(2)_W$  комбинация типа (11.33), включающая один антикварк и приводящая к вершине типа изображённой на рис. 11.2b:

$$\bar{Q} \bar{L} \quad \left(3, \frac{1}{3}\right) , \quad (11.41)$$

и синглетные комбинации

$$\bar{Q} \bar{L} \quad \left(1, \frac{1}{3}\right) , \quad (11.42)$$

$$U_L^{(c)} E_L^{(c)} \quad \left(1, \frac{1}{3}\right) , \quad (11.43)$$

$$D_L^{(c)} E_L^{(c)} \quad \left(1, \frac{4}{3}\right) . \quad (11.44)$$

Таким образом, триплетный относительно  $SU(2)_W$  скаляр со слабым изоспином  $\frac{1}{3}$  может взаимодействовать с комбинациями (11.36), (11.41), синглетный скаляр со слабым изоспином  $\frac{1}{3}$  — с комбинациями (11.37), (11.39), (11.42) и (11.43), а синглетный скаляр со слабым изоспином  $\frac{4}{3}$  — с комбинациями (11.38) и (11.44), см. таблицу 11.1. Все эти взаимодействия имеют структуру вершин, изображённую на рис. 11.8. Итак, мы

	Квантовые числа относительно $SU(3)_c \times SU(2)_W \times U_Y$	Взаимодействует с
вектор $V$	$\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2}, \frac{5}{3}$	$U_R Q_L, \bar{Q}_L \bar{E}_R, \bar{L} \bar{D}_R$
скаляр $S_1$	$\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, \frac{1}{3}$	$Q_L Q_L, \bar{Q}_L \bar{L}$
скаляр $S_2$	$\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3}$	$Q_L Q_L, U_R D_R, \bar{Q}_L \bar{L}, \bar{U}_R \bar{E}_R$
скаляр $S_3$	$\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{4}{3}$	$U_R U_R, \bar{D}_R \bar{E}_R$

Таблица 11.1: Взаимодействия, нарушающие барионное число, в терминах обычных кварковых и лептонных полей.

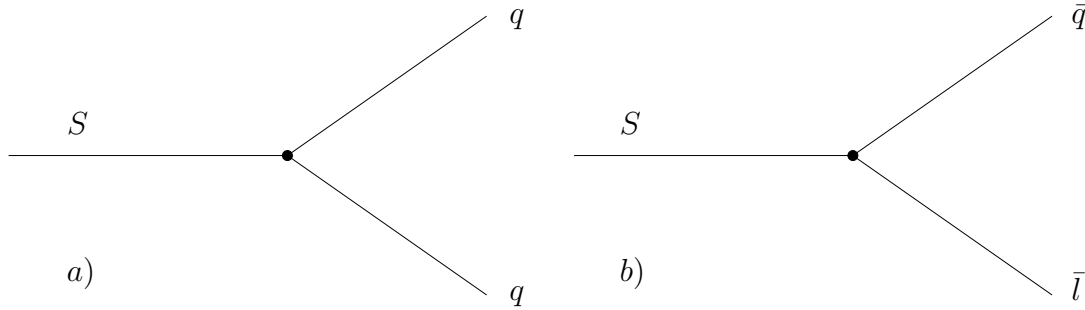


Рис. 11.8: Во взаимодействиях со скалярами, как и с векторами, сохраняется заряд  $(B - L)$ .

убедились, что в отсутствие новых фермионов заряд  $(B - L)$  должен сохраняться.

Рассмотрим теперь взаимодействия, включающие синглет — фермион  $\Lambda_L$ . Антитриплетные по цвету комбинации, участвующие во взаимодействиях с векторами  $V$  типа изображённых на рис. 11.5, имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{Q}_L \Lambda_L & \quad \left( \mathbf{2}, -\frac{1}{3} \right) \\ \bar{\Lambda}_L U_L^{(c)} & \quad \left( \mathbf{1}, -\frac{4}{3} \right) \\ \bar{\Lambda}_L D_L^{(c)} & \quad \left( \mathbf{1}, \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Первая из этих комбинаций имеет квантовые числа, совпадающие с (11.35), так что векторный бозон с такими квантовыми числами (и антитриплетный по цвету) действительно может иметь как вершину рис. 11.2а, так и вершину рис. 11.5. Скалярные комбинации антикварков и новых фермионов имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{Q}_L \bar{\Lambda}_L & \quad \left( \mathbf{2}, -\frac{1}{3} \right) \\ U_L^{(c)} \Lambda_L & \quad \left( \mathbf{1}, -\frac{4}{3} \right) \\ D_L^{(c)} \Lambda_L & \quad \left( \mathbf{1}, \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Две последние имеют те же квантовые числа, что (11.38) и (11.39), соответственно, поэтому возможны два типа скаляров, обладающих как вершинами типа рис. 11.8а, так и вершинами типа рис. 11.5.

Нейтральный фермион  $\Lambda_L$  может иметь майорановскую массу, см. Приложение С.

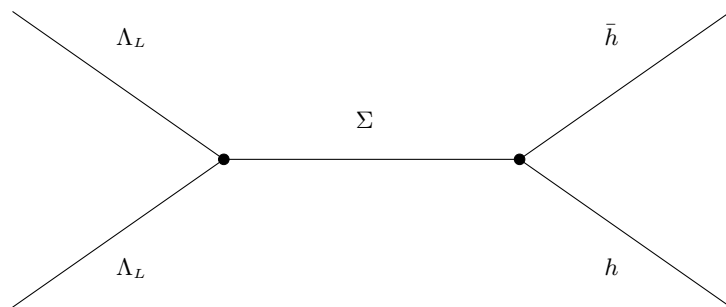


Рис. 11.9: Пример диаграммы, приводящей к аннигиляции двух  $\Lambda_L$ .

Если он стабилен, то он космологически разрешён (а при подходящих значениях параметров может выступать в роли частицы тёмной материи), если возможна аннигиляция двух  $\Lambda_L$  (например, в пару хиггсовских бозонов за счёт обмена новым нейтральным скаляром  $\Sigma$ , см. рис. 11.9), причём сечение аннигиляции должно быть достаточно велико.<sup>6</sup> В то же время, если барионная асимметрия генерируется в процессах типа изображённых на рис. 11.2 и 11.5, то должны быть запрещены (или сильно подавлены) взаимодействия с обычными лептонами и хиггсовским дублетом типа

$$h_\Lambda \tilde{H}^\dagger \Lambda_L L + h.c. \quad (11.45)$$

приводящие к вершине рис. 11.10 (такие вершины разрешены по калибровочным квантовым числам Стандартной модели).

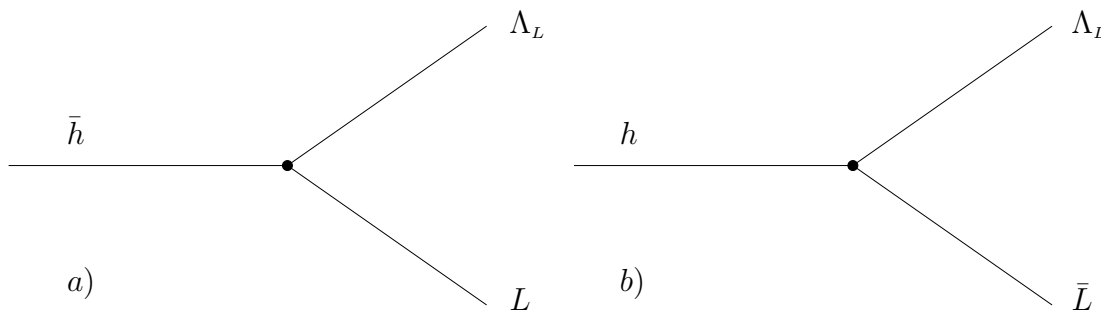


Рис. 11.10: Вершины взаимодействия с хиггсовским бозоном, нарушающие лептонное число.

дартной модели). В таких взаимодействиях нарушалось бы лептонное число и заряд  $(B - L)$ , что вместе с электрослабым нарушением барионного и лептонного чисел приводило бы к вымыванию барионной асимметрии.

► **Задача 9.** Считая, что массы частиц  $\Lambda_L$  и  $\Sigma$  малы по сравнению с массами бозонов  $V$  и  $S$ , участвующих во взаимодействиях с нарушением барионного числа, и что при энергиях ниже  $m_V, m_S$  частицы  $\Lambda_L$  участвуют только во взаимодействиях рис. 11.9, найти космологические ограничения на параметры этих взаимодействий (массы  $m_\Lambda, m_\Sigma$  и юкавские константы). Отдельно рассмотреть случаи  $m_\Lambda \gg m_\Sigma$  и  $m_\Lambda \ll m_\Sigma$ . При каких значениях параметров фермион  $\Lambda_L$  будет частицей тёмной материи?

► **Задача 10.** Пусть фермион  $\Lambda_L$  имеет майорановскую массу  $m_\Lambda \gg m_H$ , где  $m_H$  — масса бозона Хиггса Стандартной модели.

1. При каких значениях юкавской константы  $h_\Lambda$  в (11.45) взаимодействия рис. 11.10 несущественны с точки зрения космологии? Считать, что процессы аннигиляции рис. 11.9 приводят к пренебрежимо малой концентрации частиц  $\Lambda$  при низких температурах.
2. Взаимодействия (11.45) приводят к вкладам в массы обычных нейтрино за счёт механизма качелей (см. Приложение С). С учётом результатов предыдущего пункта найти ограничение на эти вклады.

► **Задача 11.** Пусть взаимодействия рис. 11.9 отсутствуют, а взаимодействия рис. 11.10 имеются. Пусть барионная асимметрия генерируется во Вселенной при  $T \gg m_\Lambda$  (например, в распадах сверхтяжёлых скалярных бозонов  $S$  по каналам рис. 11.8a и 11.5b). Считая, что фермионы  $\Lambda_L$  имеют большую майорановскую массу  $m_\Lambda \gg m_H$ , найти ограничения на  $m_\Lambda$  и  $h_\Lambda$  из требований: (а) барионная асимметрия должна сохраниться до современной эпохи; (б) фермионы  $\Lambda_L$  должны распасться задолго до эпохи нуклеосинтеза. Оценить при этих условиях вклад взаимодействий (11.45) в майорановскую массу обычных нейтрино.

<sup>6</sup>Именно благодаря наличию таких процессов лептонное число фермиона  $\Lambda_L$  естественно положить равным нулю.

Минимальная с точки зрения расширения Стандартной модели возможность того, что нейтральный фермион  $\Lambda_L$  имеет лептонное число  $+1$ , лептонное число сохраняется при энергиях и температурах ниже  $M_{GUT}$ , а новый лептон имеет короткое время жизни, состоит в том, что  $\Lambda_L$  является левой компонентой дираковского фермиона  $\Lambda$ . Тогда в лагранжиан Стандартной модели можно добавить слагаемые (кинетический член для  $\Lambda$  не выписываем)

$$M_\Lambda \bar{\Lambda} \Lambda + h_\Lambda \bar{\Lambda} \tilde{H}^\dagger L + h.c. ,$$

Если масса  $\Lambda$  велика по сравнению с массой хиггсовского бозона,  $M_\Lambda > m_H$ , то лептон  $\Lambda$  будет распадаться в основном по каналам  $\Lambda \rightarrow h^0 \nu$ ,  $\Lambda \rightarrow h^\pm l^\mp$ ; при  $M_\Lambda < m_H$  распад будет идти за счёт обмена бозоном Хиггса. Такой тяжёлый нейтральный лептон с малым временем жизни космологически разрешён.

▷ *Задача 12.* Остаются ли в только что описанном расширении Стандартной модели безмассовые нейтрино?

### 11.2.3 Несохранение лептонных чисел и майорановские массы нейтрино

Как обсуждается в Приложении С, один из привлекательных способов объяснить малые массы известных нейтрино состоит в добавлении к Стандартной модели физики частиц новых фермионных полей  $N_L^\alpha$ , которые мы будем считать левыми дублетами. Индекс  $\alpha$  нумерует эти поля; хотя это и не совсем обязательно, мы будем в дальнейшем считать, что новых полей — три (по числу поколений фермионов Стандартной модели), т.е.  $\alpha = 1, 2, 3$ . Поля  $N_L^\alpha$  имеют майорановские массы и взаимодействуют с лептонами и хиггсовским полем Стандартной модели (только такое взаимодействие разрешено инвариантностью относительно калибровочной группы Стандартной модели, если не вводить в рассмотрение неперенормируемые взаимодействия), так что лагранжиан, включающий  $N_L^\alpha$ , имеет вид (кинетический член имеет стандартный вид, и мы его не выписываем)

$$\mathcal{L} = \frac{M_\alpha}{2} \bar{N}_L^{(c)\alpha} N_L^\alpha + \left( y_{\alpha\beta} \bar{N}_L^{(c)\alpha} \tilde{H}^\dagger L^\beta + h.c. \right) , \quad (11.46)$$

где  $L^\alpha$  — левые лептонные дублеты Стандартной модели,  $\tilde{H}$  связано с хиггсовским полем Стандартной модели  $H$  соотношением (см. Приложение В)  $\tilde{H}_i = \epsilon_{ij} H_j^*$ ,  $i, j = 1, 2$  — индекс дублетного представления группы  $SU(2)_W$ , суммирование по  $\alpha, \beta$  подразумевается, юкавские константы  $y_{\alpha\beta}$  принимают, вообще говоря, комплексные значения, а массы  $M_\alpha$  — действительны.

В пренебрежении вторым членом в (11.46) (это приближение очень хорошо выполняется в данном контексте) поля  $N_L^\alpha$  описывают три частицы (фермиона) с массой  $M_\alpha$ . Юкавское взаимодействие в (11.46) приводит к тому, что эти частицы распадаются. Нас будет интересовать случай высоких температур, когда среднее хиггсовского поля равно нулю (см. Главу 10). В этом случае дублет скаляров  $H$  описывает скалярные частицы (две электрически нейтральные и одну заряженную). Считая, что  $M_\alpha \gg v$ , получим, что выписанный в (11.46) член юкавского взаимодействия описывает распад (рис. 11.11a),

$$N_\alpha \rightarrow h l_\beta , \quad (11.47)$$

где  $l_\beta$  обозначает обычный заряженный лептон или нейтрино поколения  $\beta$ , а  $h$  — одну из хиггсовских частиц. Эрмитово сопряжённый член взаимодействия описывает распад, в конечном состоянии которого присутствует антилептон<sup>7</sup> (рис. 11.11b),

$$N_\alpha \rightarrow h \bar{l}_\beta . \quad (11.48)$$

<sup>7</sup>Вообще говоря, в (11.47) и (11.48) фигурируют различные скалярные частицы. Здесь и далее это обстоятельство будет несущественно для нас, и мы будем использовать для этих скаляров одно и то же обозначение  $h$ .

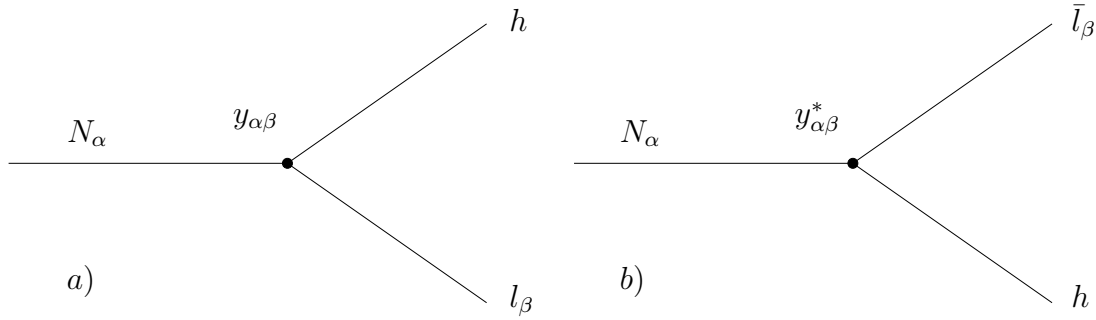
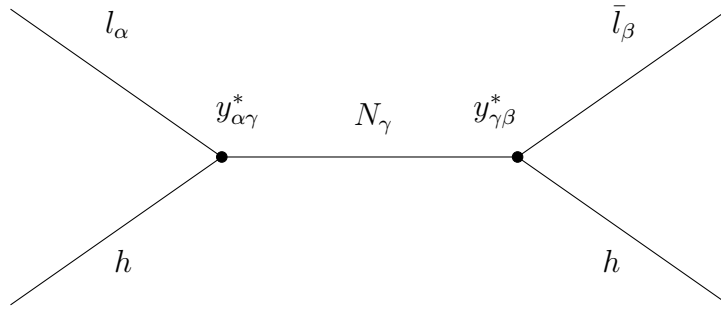


Рис. 11.11: Диаграммы распада тяжёлого нейтрино.

Ясно, что существование обоих этих процессов означает, что лептонные числа не сохраняются, какие бы лептонные числа не приписать фермионам  $N_\alpha$ . Этот же вывод



следует из возможности рассеяния (рис. 11.12)

$$hl_\alpha \rightarrow h\bar{l}_\beta$$

и из существования безнейтринного двойного  $\beta$ -распада. Для дальнейшего полезно отметить, что по порядку величины ширина распада частиц  $N_\alpha$  равна

Рис. 11.12: Диаграмма рассеяния нейтрино, сопровождающегося нарушением лептонных чисел.

$$\Gamma_{N_\alpha} \sim \frac{y^2}{8\pi} M_\alpha. \quad (11.49)$$

Более точно, полная ширина распада даётся величиной (считая  $M_\alpha \gg v$ )

$$\Gamma_{N_\alpha} = \sum_\beta \frac{|y_{\alpha\beta}|^2}{8\pi} M_\alpha.$$

Подчеркнём, что в *древесном приближении* парциальные ширины распадов (11.47) и (11.48) одинаковы

$$\Gamma(N_\alpha \rightarrow hl_\beta) = \Gamma(N_\alpha \rightarrow h\bar{l}_\beta). \quad (11.50)$$

Это не так при учёте петлевых поправок, что крайне существенно с точки зрения генерации барионной асимметрии (см. обсуждение в разделах В.4 и 11.4).

▷ **Задача 13.** Рассмотрим теорию одного левого фермионного поля  $N_L$  (индекс  $L$  в дальнейшем в этих двух задачах опускаем) с лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{N}\gamma^\mu\partial_\mu N + \frac{M}{2}\bar{N}^{(c)}N.$$

Найти уравнение поля и его решения с положительной энергией при  $|\mathbf{p}| \ll M$ , где  $\mathbf{p}$  — трёхмерный импульс. Волновые функции каких частиц они описывают?

▷ **Задача 14.** Проквантовать модель предыдущей задачи. Добавив юкавское слагаемое  $(y\bar{N}^{(c)}\psi\varphi + h.c.)$ , где  $\psi$  и  $\varphi$  — левый фермион и скаляр, соответственно, найти ширины распада  $N \rightarrow \psi\varphi$  и  $N \rightarrow \bar{\psi}\varphi^*$  в *древесном приближении*. Убедиться в справедливости оценки (11.49) и соотношения (11.50) в *древесном приближении*.

## 11.3 Генерация асимметрии в распадах частиц

В теориях, расширяющих Стандартную модель, нередко возникает простой механизм генерации барионной асимметрии Вселенной в распадах частиц. Как мы обсуждали в разделах 11.2.2 и 11.2.3, в таких теориях могут иметься новые тяжёлые частицы, в распадах которых нарушается барионное и/или лептонное число. В действительности существенным является нарушение  $(B - L)$ : в ранней Вселенной распады этих новых тяжёлых частиц происходят при температуре выше температуры электрослабого фазового перехода, поэтому из-за электрослабых процессов, описанных в разделе 11.2.1, барионная асимметрия остаётся<sup>8</sup> во Вселенной, только если на ранних стадиях генерируется отличное от нуля  $(B - L)$ .

Как мы обсуждали в разделе 11.2.2, в теориях Большого объединения возможны, например, процессы распада нового тяжёлого скалярного бозона  $S$  (или векторного бозона  $V$ ) по каналам:

$$\begin{aligned} (1) : \quad & S \rightarrow qq, \quad S \rightarrow \bar{q}l \\ (2) : \quad & S \rightarrow \bar{q}\Lambda \end{aligned} \tag{11.51}$$

где  $q$  и  $l$  обозначают обычные лептоны и кварки, а  $\Lambda$  — новый фермион, нейтральный по отношению к  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$  и имеющий лептонное число 0 или +1 (для определенности будем считать  $L_\Lambda = 0$ ). В конечных состояниях процессов первого и второго типа  $(B - L)$  имеет значения

$$\begin{aligned} (B - L)_{(1)} &= \frac{2}{3}, \\ (B - L)_{(2)} &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Бозон  $S$  — антитриплет по цвету, поэтому в теории должна иметься его античастица  $\bar{S}$  — триплет. Распады последнего по каналам

$$\begin{aligned} (\bar{1}) : \quad & \bar{S} \rightarrow \bar{q}\bar{q}, \quad \bar{S} \rightarrow ql \\ (\bar{2}) : \quad & \bar{S} \rightarrow q\bar{\Lambda} \end{aligned} \tag{11.52}$$

имеют в конечных состояниях

$$\begin{aligned} (B - L)_{(\bar{1})} &= -\frac{2}{3}, \\ (B - L)_{(\bar{2})} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Если при температуре, превышающей массу  $S$ -бозона  $m_S$ , частицы  $S$  и  $\bar{S}$  находятся в термодинамическом равновесии, то их количество, с точностью до цветового и спинового факторов, — такое же, как количество частиц других типов. При понижении температуры термодинамическое равновесие нарушается:  $S$ -бозоны распадаются, а обратный процесс их образования не идёт. В результате возможно образование  $(B - L)$ -асимметрии; для этого требуется, чтобы вероятности распадов (1) и (2) не совпадали с вероятностями распадов  $(\bar{1})$  и  $(\bar{2})$ , соответственно. Обозначим парциальные ширины процессов (1), (2),  $(\bar{1})$  и  $(\bar{2})$ , через  $\Gamma_{(1)}$ ,  $\Gamma_{(2)}$ ,  $\Gamma_{(\bar{1})}$ ,  $\Gamma_{(\bar{2})}$ . В распадах одного

---

<sup>8</sup>Мы обсудим возможность генерации барионной асимметрии за счёт самих электрослабых процессов в разделе 11.5.

$S$ -бозона и одного  $\bar{S}$ -бозона образуется  $(B - L)$ -асимметрия

$$\delta = \frac{1}{\Gamma_{tot}} \left[ \left( \frac{2}{3}\Gamma_{(1)} - \frac{1}{3}\Gamma_{(2)} \right) - \left( \frac{2}{3}\Gamma_{(\bar{1})} - \frac{1}{3}\Gamma_{(\bar{2})} \right) \right],$$

где  $\Gamma_{tot}$  — полная ширина  $S$ -бозона, которая, согласно  $CPT$ -теореме, совпадает с полной шириной  $\bar{S}$ -бозона,

$$\Gamma_{tot} = \Gamma_{(1)} + \Gamma_{(2)} = \Gamma_{(\bar{1})} + \Gamma_{(\bar{2})}$$

(считаем для простоты, что других каналов распада нет). Учитывая последнее равенство, получим для “микроскопической асимметрии”

$$\delta = \frac{\Gamma_{(1)} - \Gamma_{(\bar{1})}}{\Gamma_{tot}}. \quad (11.53)$$

Отличие друг от друга парциальных ширин распадов (1) и  $(\bar{1})$  возможно только благодаря нарушению  $C$ - и  $CP$ -симметрий — так проявляется второе из условий, рассматривавшихся в разделе 11.1.

На уровне древесных диаграмм (см. рис. 11.8a,b) парциальные ширины распадов частицы и античастицы по сопряжённым каналам совпадают, например,

$$\Gamma^{tree}(S \rightarrow qq) = \Gamma^{tree}(S \rightarrow \bar{q}\bar{q}). \quad (11.54)$$

Действительно, с точностью до одинаковых кинематических факторов эти древесные амплитуды равны квадрату модуля константы связи  $g_{(1)}$ , стоящей в вершине взаимодействия, который одинаков для частицы и античастицы. На однопетлевом уровне равенство типа (11.54), вообще говоря, не имеет места (ср. с разделом В.4). Для того, чтобы микроскопическая асимметрия (11.53) была отлична от нуля, достаточно предположить, что помимо бозона  $S$  в теории имеются другие бозоны  $S'$  с теми же квантовыми числами, и что константы связи всех этих бозонов с фермионами комплексны: именно комплексность констант связи обеспечивает  $CP$ -нарушение в моделях рассматриваемого типа. С учётом однопетлевого вклада амплитуда распада  $S$  по каналу  $S \rightarrow qq$  даётся тогда суммой диаграмм, изображённых на рис. 11.13 (есть и другие диаграммы, но для нас достаточно рассмотреть именно эти).

С точностью до общего кинематического фактора парциальная ширина  $\Gamma_{(1)}$  в этом приближении равна (процессом  $S \rightarrow \bar{q}\bar{l}$  для простоты пренебрегаем)

$$\Gamma_{(1)} = \text{const} \cdot |g_{(1)} + Dg_{(2)}g_{(2')}^*g_{(1')}|,$$

где  $D$  — фейнмановский интеграл для однопетлевой диаграммы рис. 11.13, суммирование по всем бозонам  $S'$  подразумевается. Аналогичная амплитуда для античастицы содержит комплексно-сопряжённые константы связи, поэтому

$$\Gamma_{(\bar{1})} = \text{const} \cdot |g_{(1)}^* + Dg_{(2)}^*g_{(2')}g_{(1')}^*|.$$

В результате для микроскопической асимметрии получаем <sup>9</sup>

$$\delta = -2\text{Im}(D) \cdot \frac{\text{Im}\left(g_{(1)}g_{(2)}^*g_{(2')}g_{(1')}^*\right)}{|g_{(1)}|^2 + |g_{(2)}|^2}.$$

<sup>9</sup>Отметим, что в этом приближении  $\delta = 0$ , если имеется только один  $S$ -бозон, так что  $g_{(1')} = g_{(1)}$  и  $g_{(2')} = g_{(2)}$ .



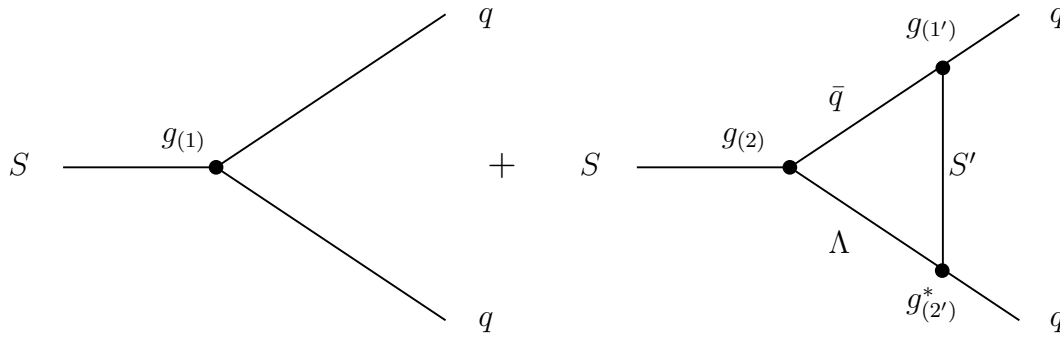


Рис. 11.13: Во втором порядке теории возмущений амплитуда распада  $S \rightarrow qq$  даётся суммой древесной диаграммы и диаграммы с обменами всевозможными бозонами  $S'$ , аналогичными по квантовым числам бозону  $S$ . Показаны константы связи, стоящие в вершинах взаимодействия.

Эта величина пропорциональна, грубо говоря, квадрату константы связи;  $\text{Im}(D)$  содержит дополнительную “петлевую” малость ( $\sim 1/4\pi$ ), так что грубая оценка для  $\delta$  (в предположении, что фазы констант  $g_{(i)}$  и  $g_{(i')}$  не малы и никак не скоррелированы) имеет вид

$$\delta \sim \frac{g^2}{4\pi} f\left(\frac{m_S}{m_{S'}}\right), \quad (11.55)$$

где функция  $f$  отношения масс  $m_S$  и  $m_{S'}$  по порядку величины равна единице при  $m_S \gtrsim m_{S'}$  и убывает с уменьшением  $m_S/m_{S'}$  (массами фермионов мы пренебрегли).

▷ **Задача 15.** Вычислить асимметрию  $\delta$  для рассмотренных процессов, считая  $S$  и  $S'$  скалярами. Найти её зависимость от отношения масс  $S$ - и  $S'$ -бозонов, считая  $m_S \lesssim m_{S'}$  (но не обязательно  $m_S \ll m_{S'}$ ).

Обратимся теперь собственно к генерации космологической  $(B - L)$ -асимметрии. Самая простая ситуация имеет место тогда, когда частицы  $S$  и  $\bar{S}$  находятся в термодинамическом равновесии при  $T \gg m_S$ , а при  $T \lesssim m_S$  доминирующими процессами являются процессы их распада. Как первое предположение, так и второе — нетривиальны: для первого требуется, во-первых, чтобы во Вселенной достигались высокие температуры,  $T \gg m_S$ , и, кроме того, чтобы при таких температурах интенсивно происходили процессы образования и аннигиляции  $S - \bar{S}$  пар. Второе предположение выполняется, только если эти процессы парного рождения и аннигиляции “выключены” при  $T \lesssim m_S$ , и, кроме того, образование частиц  $S$  и  $\bar{S}$  в процессах, обратных к (11.51) и (11.52) (обратные распады) было пренебрежимо мало. Для последнего требуется, чтобы ширина распада  $S$ -частиц была мала по сравнению с темпом расширения при  $T \sim m_S$ ,

$$\Gamma_{tot} \lesssim H(T \sim m_S) = \frac{m_S^2}{M_{Pl}^*}. \quad (11.56)$$

Если все эти условия выполнены, то при  $T \gtrsim m_S$  плотность числа  $S$ -частиц (и их античастиц) — такая же, как всех других ультрарелятивистских частиц в космической плазме,  $n_S \sim T^3$ , т.е.

$$\frac{n_S}{s} \sim \frac{1}{g_*},$$

где по-прежнему  $s$  — это плотность энтропии. В результате последующих распадов  $S$  и  $\bar{S}$  образуется асимметрия

$$\Delta_{B-L} \sim \delta \frac{n_S}{s} \sim \frac{\delta}{g_*}. \quad (11.57)$$

Видно, что в этом случае асимметрия получается достаточно большой даже при малой микроскопической асимметрии: необходимое значение  $\Delta_{B-L} \sim 10^{-10}$  достигается при  $\delta \sim 10^{-8}$  (считаем, что число степеней свободы  $g_*$  при  $T \sim m_S$  не сильно отличается от его значения в Стандартной модели,  $g_*^{\text{CM}} \sim 100$ ).

Условие (11.56) предполагает, что масса  $S$ -частиц весьма велика. Действительно, учитывая оценку

$$\Gamma_{\text{tot}} \sim \frac{g^2}{4\pi} m_S, \quad (11.58)$$

где  $g$  — константа связи  $S$  с фермионами, получим, что условие (11.56) приводится к виду

$$m_S \gtrsim \frac{g^2}{4\pi} M_{Pl}^*, \quad (11.59)$$

Например, для  $g^2/4\pi \sim 10^{-2}$  получаем  $m_S \gtrsim 10^{16}$  ГэВ. Возможность разогрева Вселенной до таких температур представляется весьма проблематичной. При малых константах связи условию (11.59) удовлетворить проще, однако и в этом случае масса  $S$ -частиц должна быть велика. Действительно, если не подгонять параметры, оценка для микроскопической асимметрии имеет вид (11.55), т.е.  $\delta \lesssim g^2/4\pi$ . Вместе с (11.57) требование  $\Delta_{B-L} \sim 10^{-10}$  даёт  $g^2/4\pi \gtrsim 10^{-8}$ , т.е.

$$m_S \gtrsim 10^{10} \text{ ГэВ}.$$

Общее утверждение состоит в том, что генерация асимметрии в распадах частиц может происходить в случае частиц большой массы и, соответственно, при высоких температурах.

Отметим, что в описанном сейчас простом сценарии третье условие из перечисленных в разделе 11.1 (отклонение от термодинамического равновесия) выполняется довольно тривиально: при  $T \lesssim m_S$  процессы распада частиц имеют место, а процессы обратного распада не происходят вовсе.

Рассмотрим теперь случай, когда неравенство (11.56) *не выполняется*. Введём параметр

$$K = \frac{\Gamma_{\text{tot}}}{H(T = m_S)} = \frac{\Gamma_{\text{tot}} M_{Pl}^*}{m_S^2} \quad (11.60)$$

и будем считать его большим,

$$K \gg 1.$$

Зависимость от этого параметра в действительности не очень сильная, т.е. и в этом случае возможна генерация  $(B-L)$ -асимметрии, если величина  $m_S$  достаточно велика. В отличие от предыдущего случая, при оценке асимметрии не приходится делать предположения о том, что  $S$  и  $\bar{S}$  находились в термодинамическом равновесии при  $T \gg m_S$ ; более того, максимальная температура во Вселенной может быть даже несколько меньше  $m_S$ .

Мы убедимся в конце раздела, что при  $K \gg 1$  оценка для  $(B-L)$ -асимметрии имеет вид

$$\Delta_{B-L} = \text{const} \cdot \frac{\delta}{g_* K \ln K}, \quad (11.61)$$

где константа – порядка единицы. Отсюда, как и в случае малых ширин распада (11.56), следует, что массы  $S$ -частиц должны быть весьма велики. Если все существенные константы связи имеют один и тот же порядок величины, то для микроскопической асимметрии имеем оценку (11.55), т.е.  $\delta \lesssim \frac{g^2}{4\pi}$ , а для ширины — оценку (11.56),  $\Gamma_{tot} \sim \frac{g^2}{4\pi} m_S$ . С учётом определения (11.60) имеем поэтому, с точностью до логарифма,

$$m_S \gtrsim \Delta_{B-L} \cdot g_* M_{Pl}^*,$$

т.е.

$$m_S \gtrsim 10^{10} \text{ ГэВ}.$$

Это ограничение можно несколько ослабить, рассматривая модели, где константы связи имеют разные порядки величины (например, константы  $g_{(1')}$  и  $g_{(2')}$  велики по сравнению с  $g_{(1)}$  и  $g_{(2)}$  на диаграмме рис. 11.13), но в любом случае масса  $S$ -частиц оказывается весьма большой.

Суммируя, можно сказать, что распады тяжёлых частиц дают весьма эффективный механизм генерации асимметрии ( $B-L$ ) и, следовательно, барионной асимметрии. Этот механизм может работать в теориях Большого объединения с несохранением ( $B-L$ ). Возможно и его обобщение на суперсимметричные теории Большого объединения, при этом в роли  $S$ -частиц могут выступать как бозоны, так и тяжёлые фермионы. Некоторую (но преодолимую) трудность для теорий Большого объединения представляет тот факт, что характерный масштаб масс в них очень велик (см. (11.27)), и соответствующие температуры могли не достигаться во Вселенной (в большинстве инфляционных моделей это именно так).

Получим оценку (11.61). Будем пока считать, что при  $T \lesssim m_S$  доминирующими процессами являются распады  $S$  и  $\bar{S}$  и обратные распады. Может показаться, что обратные распады, т.е. процессы типа

$$qq \rightarrow S \quad (11.62)$$

должны происходить с очень малой вероятностью, поскольку энергия двух начальных частиц в системе центра масс должна быть подобрана равной массе  $S$ -частицы с точностью порядка её ширины  $\Gamma_{tot}$ . Вероятность обратных процессов, тем не менее, не мала: в термодинамическом равновесии число распадов и обратных распадов  $S$ -частиц должно быть одинаково. Следовательно, если кварки и лептоны имеют равновесные функции распределения, число обратных распадов в единицу времени (в сопутствующем объёме) равно

$$\frac{d(n^{\text{обп.}} a^3)}{dt} = \Gamma_{tot} \cdot n_S^{eq} \cdot a^3, \quad (11.63)$$

где  $n_S^{eq}$  — равновесная концентрация  $S$ -частиц.

► **Задача 16.** Пренебрежём расширением Вселенной. Показать явным вычислением, используя равновесные функции распределения кварков, что скорость процесса обратного рождения (11.62) равна

$$\frac{dn_{qq \rightarrow S}}{dt} = \Gamma(S \rightarrow qq) \cdot n_S^{eq},$$

где  $\Gamma(S \rightarrow qq)$  — парциальная ширина распада  $S \rightarrow qq$ . Указание: ограничиться случаем низких температур,  $T \ll m_S$ ; цвет кварков и  $S$ -частиц не учитывать.

Распады  $S$ -частиц дают следующий вклад в изменение их количества в единицу времени в сопутствующем объёме:

$$\frac{d(n^{\text{расп.}} a^3)}{dt} = -\Gamma_{tot} \cdot n_S \cdot a^3. \quad (11.64)$$

Складывая (11.63) и (11.64), получим уравнение Больцмана для концентрации  $S$ -частиц,

$$\frac{d(n_S a^3)}{dt} = -\Gamma_{tot} \cdot (n_S \cdot a^3 - n_S^{eq} \cdot a^3). \quad (11.65)$$

Рассмотрим теперь плотность  $(B-L)$  в среде (без ограничения общности будем считать, что  $S$ - и  $\bar{S}$ -частицы имеют  $(B-L) = 0$ ), обозначив её  $n_{B-L}$ . Её изменение происходит из-за нескольких факторов. Во-первых, она образуется в результате распадов  $S$  и  $\bar{S}$  со скоростью

$$\delta \cdot \Gamma_{tot} \cdot n_S \cdot a^3$$

(речь всюду идёт об изменении  $(B-L)$  в сопутствующем объёме). Во-вторых, даже если  $(B-L)$  в среде равно нулю,  $CP$ -нарушение в обратных распадах приводит к вкладу

$$-\delta \cdot \Gamma_{tot} \cdot n_S^{eq} \cdot a^3,$$

так что в термодинамическом равновесии  $(B-L)$  не образуется<sup>10</sup>. Наконец, если в среде уже имеется ненулевое  $(B-L)$ , то оно замыкается за счёт образования  $S$ -частиц. Действительно, если в среде больше кварков, чем антикварков, процессов обратного распада  $q\bar{q} \rightarrow S$  происходит больше, чем процессов  $\bar{q}\bar{q} \rightarrow \bar{S}$  (напомним, что мы считаем, что  $S$ -частицы имеют  $B-L=0$ ). Изменение  $(B-L)$  за счёт этого механизма пропорционально полному количеству обратных распадов, т.е. величине (11.63), и избытку фермионов с положительным  $(B-L)$ , т.е. соответствующий вклад равен

$$-c\Gamma_{tot} \cdot n_S^{eq} \cdot a^3 \cdot \frac{n_{B-L}}{n_q},$$

где  $n_q$  — равновесная концентрация кварков, а константа  $c \sim 1$  учитывает количество каналов распада. В итоге получаем уравнение

$$\frac{d(n_{B-L} \cdot a^3)}{dt} = \delta \cdot \Gamma_{tot} \cdot (n_S \cdot a^3 - n_S^{eq} \cdot a^3) - c\Gamma_{tot} \cdot n_S^{eq} \cdot a^3 \cdot \frac{n_{B-L}}{n_q}.$$

Первый член в правой части отвечает за генерацию, а второй — за вымывание  $(B-L)$ .

Удобно использовать уравнение (11.65) и записать

$$\frac{d(n_{B-L} a^3)}{dt} = -\delta \cdot \frac{d(n_S a^3)}{dt} - c\Gamma_{tot} \cdot n_S^{eq} \cdot a^3 \cdot \frac{n_{B-L}}{n_q}. \quad (11.66)$$

Система уравнений (11.65) и (11.66) позволяет найти плотность числа  $S$ -частиц и асимметрию  $(B-L)$  в любой момент времени, если они заданы в некоторый начальный момент  $t_i$ .

Удобно ввести величины

$$N_S = \frac{n_S}{T^3} \quad \text{и} \quad N_{B-L} = \frac{n_{B-L}}{T^3}, \quad (11.67)$$

так что  $n_S a^3 = \text{const} \cdot N_S$ ,  $n_{B-L} a^3 = \text{const} \cdot N_{B-L}$  с одной и той же константой. Кроме того, введём переменную

$$z = \frac{m_S}{T}$$

и воспользуемся тем, что

$$-\frac{\dot{T}}{T} = H(T) = H(T = m_S) \frac{T^2}{m_S^2}.$$

Тогда, с учётом соотношения  $n_q \propto T^3$ , уравнения (11.65) и (11.66) примут вид

$$\frac{dN_S}{dz} = -Kz(N_S - N_S^{eq}), \quad (11.68)$$

$$\frac{dN_{B-L}}{dz} = -\delta \cdot \frac{dN_S}{dz} - \tilde{K}z \cdot N_S^{eq} \cdot N_{B-L}, \quad (11.69)$$

где параметр  $K$  определён в (11.60) и

$$\tilde{K} = c \frac{T^3}{n_q} \cdot K \sim K.$$

Напомним, что нас интересует случай  $K \gg 1$ . Далее, интерес представляет случай низких температур,  $T \ll m_S$ , т.е.  $z \gg 1$ . В этом случае равновесная концентрация  $S$ -частиц равна (спиновый и цветовой факторы не выписываем)

$$n_S^{eq} = \left( \frac{m_S T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_S}{T}},$$

<sup>10</sup>Мы несколько упрощаем изложение: помимо распадов и обратных распадов в динамике  $(B-L)$  играют роль и процессы резонансного рассеяния фермионов между собой. Последующие формулы, тем не менее справедливы: по-существу, они вытекают из того соображения, что в термодинамическом равновесии  $B-L=0$  и  $n_S = n_S^{eq}$ . Нерезонансное рассеяние мы в нашем несколько упрощенном изложении не учитываем, см. в связи с этим раздел 11.4.

т.е. с точностью до несущественной численной постоянной  $\hat{c}$ ,

$$N_S^{eq} = \hat{c} z^{3/2} e^{-z} . \quad (11.70)$$

Таким образом, входящие в уравнения (11.68), (11.69) величины определены явно.

Начнём с уравнения (11.68). Его решение имеет вид

$$N_S(z) = \int_{z_i}^z e^{-\frac{K}{2}(z^2 - z'^2)} K z' N_S^{eq}(z') dz' + e^{-\frac{K}{2}(z^2 - z_i^2)} N_S(z_i) ,$$

где  $z_i \equiv \frac{m_S}{T}$  — начальное значение переменной  $z$ , при котором задана плотность  $S$ -частиц  $N_S(z_i)$ . Из этого решения видно, что при  $K \gg 1$  начальное значение плотности  $S$ -частиц быстро забывается (второе слагаемое быстро стремится к нулю). Далее, при  $K \gg 1$  основной вклад в интеграл даёт область  $z'$  близких к  $z$  (если  $N_S^{eq}(z)$  не слишком мало), поэтому

$$N_S(z) = N_S^{eq} + O\left(\frac{1}{K}\right) . \quad (11.71)$$

Оба этих свойства совершенно очевидны: большое  $K$  соответствует большой вероятности процессов распада и обратного распада, так что  $S$ -частицы находятся в состоянии, близком к термодинамическому равновесию со средой.

Обратимся теперь к уравнению (11.69). Опуская поправки порядка  $K^{-1}$ , его можно записать в виде, учитывающем (11.71):

$$\frac{dN_{B-L}}{dz} = -\delta \cdot \frac{dN_S^{eq}}{dz} - \tilde{K} z \cdot N_S^{eq} \cdot N_{B-L} . \quad (11.72)$$

Отклонение от термодинамического равновесия, приводящее к генерации асимметрии благодаря первому слагаемому в правой части, теперь проявляется довольно тонким образом: хотя концентрация  $S$ -частиц близка к равновесной в каждый момент времени, она всё же изменяется со временем (и, соответственно, с изменением  $z$ ), так что ситуация вполне равновесной не является.

Решение уравнения (11.72) имеет вид

$$N_{B-L}(z) = -\delta \cdot \int_{z_i}^z e^{-I(z',z)} \frac{dN_S^{eq}}{dz'} dz' + e^{-I(z_i,z)} N_{B-L}(z_i) , \quad (11.73)$$

где

$$I(z, z') = \int_z^{z'} N_S^{eq}(z'') \tilde{K} z'' dz'' .$$

Видно, что как и начальная плотность  $S$ -частиц, начальная асимметрия тоже быстро забывается при больших  $K$ , если начальная температура — порядка или несколько меньше  $m_S$  (так что  $N_S^{eq}(z_i)$  не слишком мала).

▷ **Задача 17.** Пусть максимальная температура во Вселенной равна  $T_i$ , и  $K \gg 1$ . Оценить максимальное значение  $T_i$ , при котором начальная  $(B-L)$ -асимметрия в большей своей части сохраняется до наших дней.

Считая, что начальная температура достаточно близка к  $m_S$  или больше  $m_S$ , пренебрежём вторым слагаемым в (11.73) и запишем для асимметрии, остающейся при низких температурах

$$N_{B-L} = -\delta \cdot \int_0^\infty e^{-\hat{I}(z)} \frac{dN_S^{eq}}{dz} dz , \quad (11.74)$$

где

$$\hat{I}(z) \equiv I(z, \infty) = \int_z^\infty N_S^{eq}(z') \tilde{K} z' dz' .$$

Интеграл (11.74) набирается при довольно больших  $z$  (т.е. температурах, малых по сравнению с  $m_S$ ): асимметрия, образованная при  $z \sim 1$  (т.е.  $T \sim m_S$ ) за счёт первого члена в (11.72), замывается при последующей эволюции. Из (11.70) имеем при больших  $z$

$$\frac{dN_S^{eq}}{dz} = -\hat{c} z^{3/2} e^{-z} = -N^{eq}(z) . \quad (11.75)$$

Таким образом, подынтегральное выражение в (11.74) является произведением двух экспоненциальных факторов: убывающего фактора  $e^{-z}$  из (11.75) (убывание концентрации  $S$ -частиц и, соответственно, эффекта генерации  $(B-L)$  с ростом  $z$ , т.е. убыванием температуры) и растущего фактора  $e^{-\hat{I}(z)}$  (ослабление

процесса вымывания асимметрии с понижением температуры). Такой седловой интеграл определяется поведением подынтегрального выражения в точке минимума показателя экспоненты, т.е. выражения

$$f(z) = \hat{I}(z) + z .$$

Этот минимум достигается при  $z = z_*$ , таком что

$$N_S^{eq}(z_*) \tilde{K} z_* = 1 . \quad (11.76)$$

Вспоминая (11.75), имеем<sup>11</sup> при больших  $K$  (см. Главу 9 по поводу решения уравнений такого типа)

$$z_* = \ln \tilde{K} + \mathcal{O}(\ln \ln \tilde{K}) = \ln K + \mathcal{O}(\ln \ln K) . \quad (11.77)$$

В этой точке как сам интеграл  $\hat{I}(z_*)$ , так и его первая и вторая производные — порядка единицы, так что

$$f(z_*) = z_* + \mathcal{O}(1) ,$$

и

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \mathcal{O}(1) .$$

Последнее соотношение означает, что интеграл (11.74) набирается в области вокруг  $z_*$  размера

$$\Delta z \sim 1 \ll z_* .$$

В итоге получаем

$$N_{B-L} = \delta \cdot \text{const} \cdot N_S^{eq}(z_*) ,$$

и окончательно, с учётом (11.76)

$$N_{B-L} = \text{const} \cdot \frac{\delta}{\tilde{K} z_*} = \text{const} \cdot \frac{\delta}{K \ln K} , \quad (11.78)$$

где константа — порядка единицы. Отсюда и следует (11.61).

Обсудим полученный результат и приведённое вычисление. Во-первых, температура  $T_*$ , при которой генерируется асимметрия, определяется формулой (11.77), то есть

$$T_* = \frac{m_S}{\ln K} . \quad (11.79)$$

При этой температуре вымывание асимметрии уже не слишком эффективно ( $\hat{I}(z_*) \sim 1$ ), а концентрация  $S$ -частиц и количество их распадов всё ещё довольно велики,

$$N_S^{eq} \simeq \frac{dN_S^{eq}}{dz} \sim \frac{1}{K \ln K} .$$

Именно из-за этого результирующая асимметрия не слишком мала даже при больших  $K$ . Далее, результат (11.78) справедлив, если во Вселенной достигалась температура  $T_*$ , т.е. температура, несколько меньшая  $m_S$ . Вся асимметрия генерируется при этом в интервале температур, малом по сравнению с самой температурой,

$$\frac{\Delta T}{T_*} = \frac{\Delta z}{z_*} = \frac{1}{\ln K} .$$

Обратим внимание на следующий факт. В использованном нами основном уравнении (11.72) в действительности потерялась информация о том, какие именно процессы поддерживают концентрацию  $S$ -частиц вблизи её равновесного значения. Вместо процессов распада и обратного распада (или вместе с ними) это могут быть, например, процессы парной аннигиляции и рождения  $S$  и  $\bar{S}$ . Такая ситуация имеет место для цветных  $S$  и  $\bar{S}$ , рассмотренных в разделе 11.2.2. Тем не менее, результат (11.61) остаётся справедливым при  $K \gg 1$ .

---

<sup>11</sup>При не слишком больших  $K$  приближение  $z_* = \ln K$  работает плохо, но для нас это будет несущественно.

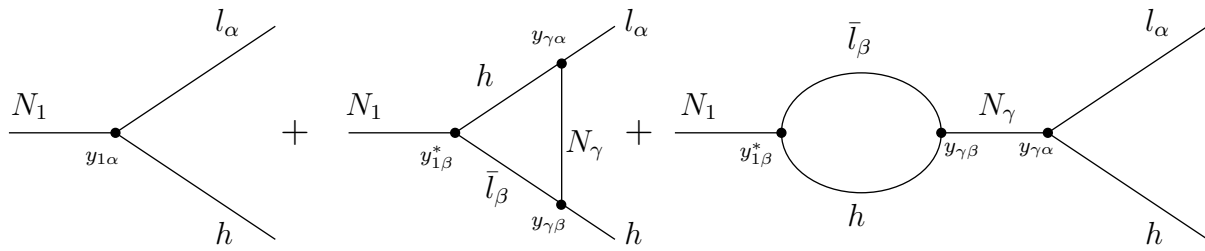


Рис. 11.14: Амплитуда распада  $N_1 \rightarrow l_\alpha h$  даётся суммой вкладов древесной диаграммы и однопетлевых диаграмм. В последних суммирование по номерам поколений  $\beta$  и  $\gamma$  подразумевается. Однопетлевые диаграммы, не дающие вклада в асимметрию, не показаны. Около вершин указаны фигурирующие в них юкавские константы.

## 11.4 Барионная асимметрия и массы нейтрино: лептогенезис

Как мы обсуждали в разделе 11.2.3, несохранение лептонного числа, а значит и  $(B - L)$ , может быть связано с отличием от нуля масс нейтрино. Поэтому представляется привлекательным попытаться объяснить барионную асимметрию в рамках того же подхода, который используется при объяснении масс нейтрино. Источником барионной асимметрии в этом случае могут служить распады  $N$ -частиц, рассмотренных в разделе 11.2.3. В этих распадах может образовываться лептонная асимметрия, которая затем частично перерабатывается в барионную асимметрию за счёт электрослабого механизма, обсуждавшегося в разделе 11.2.1. В литературе этот сценарий генерации барионной асимметрии называют лептогенезисом.

По-существу, механизм генерации лептонной асимметрии — тот же, что в разделе 11.3, только теперь вместо  $S$ -частиц фигурируют майорановские фермионы  $N_\alpha$ . Если нет специальной подгонки параметров, лептонная асимметрия образуется в распадах *легчайших* из частиц: асимметрия, появившаяся в распадах более тяжёлых частиц, замыкается в процессах с участием более лёгких частиц. Пусть  $N_1$  — самый лёгкий тип  $N$ -частиц. Как мы отмечали в разделах 11.2.3 и 11.3, в древесном приближении парциальные ширины (вероятности) распадов

$$N_1 \rightarrow lh \quad (11.80)$$

и

$$N_1 \rightarrow \bar{l}h \quad (11.81)$$

равны между собой. Однако при учёте петлевых вкладов это не так, если константы связи, фигурирующие в лагранжиане (11.46) комплексны, т.е. имеет место нарушение  $CP$ . В однопетлевом приближении существенные диаграммы, приводящие к различию парциальных ширин распадов (11.80) и (11.81), приведены на рис. 11.14. Парциальная ширина распада  $N_1 \rightarrow lh$  на однопетлевом уровне даётся, таким образом, выражением

$$\Gamma(N_1 \rightarrow lh) = \text{const} \cdot \sum_\alpha \left| y_{1\alpha} + \sum_{\beta, \gamma} D \left( \frac{M_1}{M_\gamma} \right) \cdot y_{1\beta}^* y_{\gamma\alpha} y_{\gamma\beta} \right|^2, \quad (11.82)$$

где  $M_\gamma$  — масса частиц  $N_\gamma$  (массами остальных частиц пренебрегаем), а  $D(M_1/M_\gamma)$  — выражение для суммы однопетлевых диаграмм, изображённых на рис. 11.14.

Формула для парциальной ширины распада  $N_1 \rightarrow \bar{l}h$  получается из (11.82) заменой юкавских констант на сопряжённые,  $y_{\alpha\beta} \rightarrow y_{\alpha\beta}^*$ . Обозначая

$$\text{Im } D\left(\frac{M_1}{M_\gamma}\right) = \frac{1}{8\pi} f\left(\frac{M_1}{M_\gamma}\right),$$

имеем для микроскопической лептонной асимметрии

$$\begin{aligned} \delta &\equiv \frac{\Gamma(N_1 \rightarrow lh) - \Gamma(N_1 \rightarrow \bar{l}h)}{\Gamma_{tot}} \\ &= \frac{1}{8\pi} \sum_{\gamma=2,3} f\left(\frac{M_1}{M_\gamma}\right) \cdot \frac{\text{Im}(\sum_\alpha y_{1\alpha} y_{\gamma\alpha}^*)^2}{\sum_\alpha |y_{1\alpha}|^2}. \end{aligned} \quad (11.83)$$

Здесь учтено, что  $\text{Im}(y_{1\alpha} y_{\gamma\alpha}^*) = 0$  для  $\gamma = 1$ , так что вклад в асимметрию диаграммы с обменом самой частицей  $N_1$  не дают. В дальнейшем мы будем рассматривать случай иерархии масс  $M_1 \ll M_{2,3}$  и пренебрегать массами обычных лептонов (мы увидим, что для лептогенезиса требуется  $M_\alpha \gg 100$  ГэВ). В этом случае

$$f\left(\frac{M_1}{M_\gamma}\right) = -\frac{2}{3} \frac{M_1}{M_\gamma}, \quad (11.84)$$

и выражение для микроскопической асимметрии принимает вид (общий знак для нас несущественен)

$$\delta = \frac{M_1}{12\pi} \frac{1}{\sum_\alpha |y_{1\alpha}|^2} \sum_{\alpha\beta\gamma} \text{Im} \left[ y_{1\alpha} y_{1\beta} \left( y_{\gamma\alpha}^* \frac{1}{M_\gamma} y_{\gamma\beta}^* \right) \right]. \quad (11.85)$$

▷ *Задача 18. Показать прямым вычислением фейнмановских диаграмм, что при  $M_\gamma \gg M_1$  выполняется равенство (11.84).*

В связи с выражениями (11.83) и (11.85) сделаем следующее замечание. Входящие в них комбинации юкавских констант отличаются от комбинаций констант, фигурирующих в массовой матрице нейтрино (см. Приложение (С.49)),

$$m_{\alpha\beta} = -\frac{v^2}{2} \sum_\gamma y_{\gamma\alpha} \frac{1}{M_\gamma} y_{\gamma\beta}. \quad (11.86)$$

Например, преобразование матрицы  $y_{\alpha\beta}$  вида

$$y \rightarrow yU \quad (11.87)$$

с унитарной матрицей  $U$  изменяет массовую матрицу нейтрино  $m_{\alpha\beta}$ , но оставляет выражения (11.83) и (11.84) инвариантными. Это и не удивительно: преобразование (11.87) соответствует изменению базиса лептонных полей  $l_\alpha$ , а результат для асимметрии от выбора этого базиса не зависит (мы пренебрегаем массами лептонов Стандартной модели; в этом приближении все базисы лептонных полей эквивалентны). С другой стороны, в базисе лептонных полей, где нейтрино имеют определённые массы



(массовый базис), матрица масс нейтрино по определению диагональна и действительна. Отсюда ясно, что асимметрия  $\delta$ , вообще говоря, не связана прямо с параметрами матрицы ПМНС, описывающей смешивание обычных нейтрино и ответственной за нейтринные осцилляции. Измерение параметров нейтринных осцилляций не позволяет, вообще говоря, однозначно ответить на вопрос, имеется ли асимметрия в распадах тяжёлых фермионов  $N_\alpha$ . Тем не менее, факт существования нейтринных осцилляций даёт некоторое указание на то, что матрица юкавских констант  $y_{\alpha\beta}$  имеет нетривиальную структуру. Дополнительным указанием на возможность асимметрии в распадах частиц  $N_\alpha$  послужит обнаружение в будущих экспериментах  $CP$ -нарушения в осцилляциях нейтрино: оно будет означать, что элементы массовой матрицы нейтрино, а значит и юкавские константы, комплексны по крайней мере в калибровочном базисе.

Мы ещё вернёмся к обсуждению формулы (11.85) для микроскопической асимметрии, а сейчас перейдём к генерации лептонной асимметрии в распадах частиц  $N_1$ . Её анализ дословно повторяет проведённый в разделе 11.3, так что мы воспользуемся полученными в нём результатами. При фиксированном  $\delta$  генерация асимметрии наиболее эффективно происходит при

$$\Gamma_{tot}(M_1) \ll H(T = M_1) , \quad (11.88)$$

при этом, правда, приходится предполагать, что частицы  $N_1$  эффективно рождаются в космической плазме при  $T \gg M_1$  за счёт взаимодействий, дополнительных по сравнению с юкавскими взаимодействиями (11.46). Учитывая, что

$$\Gamma_{tot} = \frac{M_1}{8\pi} \sum_{\alpha} |y_{1\alpha}|^2 ,$$

и что  $H = T^2/M_{Pl}^*$ , получим, что неравенство (11.88) можно записать в виде

$$\tilde{m}_1 \ll \frac{4\pi}{M_{Pl}^*} \cdot v^2 \sim 10^{-3} \text{ эВ} , \quad (11.89)$$

где

$$\tilde{m}_1 = \sum_{\alpha} \frac{|y_{1\alpha}|^2}{2M_1} \cdot v^2 \quad (11.90)$$

— сумма модулей вкладов частиц  $N_1$  в массовую матрицу нейтрино. Видно, что в этом случае требуется сильная иерархия юкавских констант<sup>12</sup>: если все  $y_{\alpha\beta}$  имели бы один порядок величины, то вклады *легчайшей* частицы  $N_1$  в массовую матрицу (11.86) были бы наибольшими, и массы всех лёгких нейтрино были бы меньше  $10^{-3}$  эВ в противоречии с экспериментом (см. обсуждение в Приложении С перед формулой (С.36)). Продолжим, тем не менее, обсуждать этот случай, и получим для него оценку массы  $M_1$ , считая для определённости, что в природе реализуется прямая иерархия масс нейтрино (С.38) с малой массой легчайшего массового состояния. При выполнении неравенства (11.88) оценка для образующейся лептонной (а значит, и барионной) асимметрии имеет вид (см. (11.57))

$$\Delta_L \sim \frac{\delta}{g_*} .$$

<sup>12</sup>Хотя такая возможность не выглядит естественной, считать её исключённой никак нельзя. Напомним, в связи с этим, что сильная иерархия юкавских констант имеет место в Стандартной модели для заряженных лептонов и кварков.

Далее, формулу (11.85) можно записать как

$$\delta = -\frac{M_1}{6\pi v^2} \frac{1}{\sum_{\alpha} |y_{1\alpha}|^2} \sum_{\alpha\beta} \text{Im} \left( y_{1\alpha} y_{1\beta} \sum_{\gamma=2,3} m_{\alpha\beta}^{(\gamma)*} \right), \quad (11.91)$$

где

$$m_{\alpha\beta}^{(\gamma)} = y_{\alpha\gamma} \frac{v^2}{2M_{\gamma}} y_{\gamma\beta} \quad (11.92)$$

— вклад частицы  $N_{\gamma}$  в массовую матрицу нейтрино. Учитывая (С.38), имеем

$$\delta \lesssim \frac{M_1}{6\pi v^2} m_{atm}.$$

Асимметрия  $\Delta_L \sim 10^{-10}$  получается при  $\delta \sim 10^{-8}$  (считая, что  $g_* \sim 100$  как в Стандартной модели), поэтому

$$M_1 \gtrsim 10^8 \text{ ГэВ}.$$

Если не вводить в рассмотрение подгонку параметров модели, то эта величина даёт минимальный масштаб масс тяжёлых частиц  $N_{\alpha}$ , позволяющий объяснить барионную асимметрию их распадами; при этом максимальная температура, которая достигалась во Вселенной, должна превышать  $10^8$  ГэВ.

Пожалуй, более естественная возможность заключается в том, что существует прямая иерархия масс нейтрино (С.38), и связана она с обратной иерархией тяжёлых частиц  $N_{\alpha}$ , так что  $m_3 \propto M_1^{-1}$ ,  $m_2 \propto M_2^{-1}$ ,  $m_1 \propto M_3^{-1}$ , причём  $M_1 \ll M_2 \ll M_3$ . В этом случае для выражения (11.90) имеем оценку

$$\tilde{m}_1 \sim m_{atm} \simeq 0.05 \text{ эВ}, \quad (11.93)$$

так что неравенство (11.89) и, следовательно, неравенство (11.88) не выполняются, и генерация лептонной асимметрии подавлена процессом её вымывания. Воспользуемся оценкой (11.61) и запишем

$$\Delta_L \simeq \text{const} \cdot \frac{\delta}{g_* K \ln K},$$

где константа — порядка единицы, а

$$K = \frac{\Gamma_{tot}}{H(T \sim M_1)} = \frac{\tilde{m}_1 M_{Pl}^*}{4\pi v^2}. \quad (11.94)$$

С учётом оценки (11.93) фактор подавления составляет

$$K \sim 100,$$

и для получения  $\Delta_L \sim 10^{-10}$  требуется большее значение микроскопической асимметрии

$$\delta \gtrsim 10^{-5}. \quad (11.95)$$

С другой стороны для  $\gamma = 2, 3$  выражение (11.92) оценивается величиной  $m_{\alpha\beta}^{(\gamma)} \sim m_{sol}$ , поэтому из (11.91) и (11.95) имеем

$$M_1 \gtrsim 10^{12} \text{ ГэВ}.$$

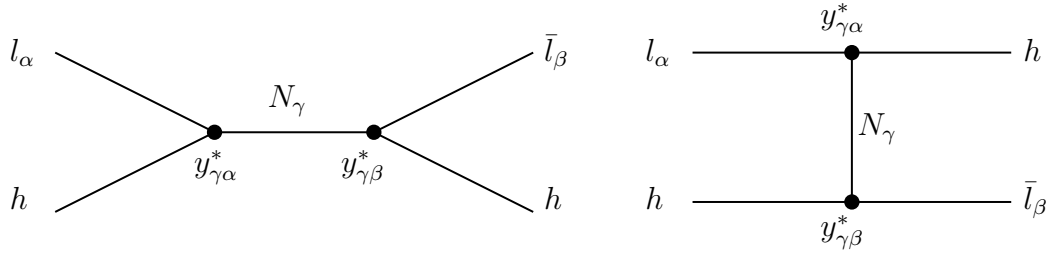


Рис. 11.15: Диаграммы рассеяния лептонов на скалярах. Эти процессы приводят к замыканию лептонной асимметрии.

Мы видим, что даже при наименее благоприятном для лептогенезиса случае требуемый масштаб масс новых частиц не является неправдоподобно большим. Отметим, что в этом случае не требуется привлекать дополнительных механизмов образования  $N$ -частиц при высоких температурах, поскольку они достаточно интенсивно рождаются в процессах обратного распада; достаточно лишь предположить, что Вселенная была разогрета до температур (см. (11.79))

$$T \gtrsim \frac{M_1}{\ln K}.$$

Итак, в сценарии лептогенезиса требуемая барионная асимметрия действительно образуется во Веленной, причём параметры модели могут лежать в достаточно широком диапазоне значений. Замечательно, что значения масс нейтрино, на которые указывают осцилляционные эксперименты, лежат не слишком далеко от величины  $\frac{4\pi v^2}{M_{Pl}^*} \sim 10^{-3}$  эВ, так что фактор подавления (11.94) в любом случае не слишком велик. Иными словами, именно в случае масс нейтрино  $m \lesssim 1$  эВ имеется грубое (в пределах двух-трёх порядков величины) равенство между темпом расширения Вселенной при температуре лептогенезиса и шириной легчайшей  $N$ -частицы,  $\Gamma_{tot} \sim (1-1000) \cdot H(T \sim M_1)$ . Такое совпадение служит довольно серьёзным указанием на то, что наблюдаемая барионная асимметрия образовалась именно в результате лептогенезиса.

Если массы нейтрино больше  $m_{atm} \simeq 0.05$  эВ, то между ними должно быть вырождение (поскольку разности квадратов масс известны из осцилляционных экспериментов и максимальная из них составляет  $\Delta m^2 = m_{atm}^2$ ). В этом случае интересные ограничения появляются и из рассмотрения процессов нерезонансного рассеяния (рис. 11.15),

$$lh \rightarrow \bar{l}h \quad (11.96)$$

и кроссинг-процессов, которые также замыкают лептонную асимметрию. Они дают новый, не рассматривавшийся в разделе 11.3 вклад в уравнение Больцмана для плотности лептонного числа в сопутствующем объёме

$$\frac{d(n_L \cdot a^3)}{dt} \propto \Gamma_{lh} \cdot (n_L \cdot a^3),$$

где  $\Gamma_{lh}$  — темп процессов рассеяния типа (11.96).

В терминах переменной  $z = M_1/T$  этот вклад имеет вид

$$\frac{dN_L}{dz} \propto -\frac{M_{Pl}^*}{M_1 T} \Gamma_{lh}(z) \cdot N_L,$$

где  $N_L = \frac{n_L}{T^3}$ . Замывание лептонного числа существенно после момента, соответствующего  $z = z_* = \ln K$  (см. раздел 11.3): именно в этот момент происходит генерация лептонной асимметрии во Вселенной. Поскольку  $z_*$  как правило довольно велико, при интересующих нас  $z > z_*$  все  $N$ -частицы нерелятивистские, и для сечения процессов типа (11.96) имеем оценку

$$\sigma_{lh} = \text{const} \cdot \sum_{\alpha\beta\gamma} \left| \frac{y_{\gamma\alpha} y_{\gamma\beta}}{M_\gamma} \right|^2$$

(напомним, что частицы  $N_\gamma$  — фермионы, пропагатор которых при малых импульсах и энергиях равен  $\frac{1}{M_\gamma}$ ). Учитывая выражение (С.49) для массовой матрицы нейтрино, это сечение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{lh} &= \text{const} \cdot \frac{\text{Tr}(mm^\dagger)}{v^4} \\ &= \text{const} \cdot \frac{1}{v^4} \sum m_\nu^2. \end{aligned}$$

Уже из размерных соображений следует, что

$$\Gamma_{lh} = \text{const} \cdot \sigma_{lh} \cdot T^3$$

(лептоны и хиггсовские бозоны ультрарелятивистские при интересующих нас температурах). Имеем в итоге, что при  $z > z_*$ , когда процессы распада и обратного распада несущественны, лептонная асимметрия подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dN_L}{dz} &= -\text{const} \cdot \frac{M_{Pl}^* T^2}{M_1} \frac{\sum m_\nu^2}{v^4} \cdot N_L \\ &= -\text{const} \cdot \frac{M_{Pl}^* M_1}{z^2} \frac{\sum m_\nu^2}{v^4} \cdot N_L, \end{aligned}$$

где константа — порядка единицы. Из этого уравнения следует, что процессы рассеяния приводят к дополнительному подавлению результирующей асимметрии фактором

$$\begin{aligned} &\exp \left( - \int_{z_*}^{\infty} dz \frac{\text{const}}{z^2} \cdot M_{Pl}^* M_1 \cdot \frac{\sum m_\nu^2}{v^4} \right) \\ &= \exp \left( - \frac{\text{const}}{z_*} \cdot M_{Pl}^* M_1 \cdot \frac{\sum m_\nu^2}{v^4} \right). \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы это подавление было не слишком сильным, и получим

$$\sum m_\nu^2 \lesssim \frac{v^4 z_*}{M_{Pl}^* M_1}.$$

Даже для случая относительно малых  $M_1 \sim 10^8$  ГэВ когда  $z_* \sim 1$  (случай (11.89)) отсюда получается ограничение (с учётом вырождения масс нейтрино)

$$m_\nu \lesssim 1 \text{ эВ}. \quad (11.97)$$

Если же  $M_1 \gtrsim 10^{12}$  ГэВ (при этом  $z_* \sim 10$ ), то ограничение усиливается,

$$m_\nu \lesssim 0.1 \text{ эВ}.$$

Аккуратные оценки рассмотренного только что замыкания лептонной асимметрии приводят к ограничению [43]

$$m_\nu < 0.12 \text{ эВ} \quad (11.98)$$

во всей области параметров модели (в этом смысле наш результат (11.97) не является точным). Это ограничение не противоречит имеющимся экспериментальным и космологическим ограничениям на абсолютные значения масс нейтрино, но вместе с изложенными выше результатами говорит о том, что массы нейтрино находятся как раз в той области, которая необходима для генерации барионной асимметрии в сценарии лептогенезиса. В то же время, лептогенезис<sup>13</sup> как источник барионной асимметрии может быть исключён, если измерения безнейтринного двойного бета-распада войдут в противоречие с ограничением (11.98).

▷ *Задача 19. Не принимая во внимание экспериментальные ограничения на массы нейтрино и данные по нейтринным осцилляциям, показать, что успешный лептогенезис возможен лишь при*

$$m_\nu \lesssim 1 \text{ эВ},$$

*если считать, что все юкавские константы  $y_{i\alpha}$  имеют один и тот же порядок величины.*

## 11.5 Электрослабый бариогенезис

Как мы обсуждали в разделе 11.2.1, несохранение барионного числа имеет место уже в Стандартной модели физики частиц (равно как и в её обобщениях), причём характерные температуры имеют порядок 100 ГэВ. Естественно поэтому задать вопрос о возможности генерации барионной асимметрии при таких низких температурах из симметричного по барионным и лептонным числам состояния за счёт самих аномальных электрослабых процессов (электрослабый бариогенезис). Такая возможность особенно интересна в связи с тем, что существенная для электрослабого бариогенезиса область энергий 100 ГэВ — 1 ТэВ доступна экспериментальному изучению на коллайдерах частиц. Исследование физики частиц в этой области энергий позволит выяснить свойства космической плазмы при температурах порядка 100 ГэВ и надёжно ответить на вопрос, реализовывался ли электрослабый бариогенезис в ранней Вселенной.

Как требование достаточно сильного  $CP$ -нарушения, так и необходимость заметного отклонения от термодинамического равновесия существенно ограничивают класс моделей, где возможен электрослабый бариогенезис. В Стандартной модели  $CP$ -нарушения в матрице Каббиро–Кобаяши–Маскава недостаточно для генерации барионной асимметрии, и кроме того, отклонения от термодинамического равновесия в ранней Вселенной слишком малы. В то же время, в ряде расширений Стандартной модели имеются как дополнительные источники  $CP$ -нарушения, так и возможность сильно неравновесной стадии космологической эволюции, так что сценарий электрослабого бариогенезиса может быть реализован.

<sup>13</sup>Речь идет о лептогенезисе на горячей стадии эволюции Вселенной (“thermal leptogenesis”). Возможность лептогенезиса на стадии пост-инфляционного разогрева мы здесь не обсуждаем.

### 11.5.1 Условия нарушения термодинамического равновесия

При температурах порядка 100 ГэВ Вселенная расширяется весьма медленно: характерное время расширения составляет

$$t_U \sim H^{-1} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \sim 10^{14} \text{ ГэВ}^{-1} \sim 10^{-10} \text{ с} ,$$

что гораздо больше времени, характеризующего слабые взаимодействия частиц в среде (см. также раздел 10.3),

$$t_{int} \sim \frac{1}{\alpha_w T} \sim 1 \text{ ГэВ}^{-1} \sim 10^{-24} \text{ с} .$$

Поэтому требование нарушения термодинамического равновесия (одно из необходимых условий генерации барионной асимметрии, см. раздел 11.1) весьма нетривиально. По-видимому, единственная возможность его удовлетворить — это потребовать, чтобы электрослабый фазовый переход был переходом *первого рода*. Как мы обсуждали в разделе 10.1, фазовый переход первого рода — сильно неравновесный процесс, происходящий путём образования пузырей новой фазы, их последующего расширения и перколяции. В процессе фазового перехода первого рода, как мы увидим, действительно возможно образование асимметрии.

Требование, чтобы электрослабый фазовый переход был переходом первого рода, само по себе недостаточно. *После* фазового перехода среда переходит в состояние, близкое к термодинамическому равновесию, и асимметрия, образовавшаяся в процессе фазового перехода, имеет тенденцию к замыванию. Чтобы замывания не происходило, после фазового перехода темп электрослабых процессов с нарушением барионного числа должен быть меньше темпа расширения Вселенной. Как мы сейчас увидим, это условие (как и требование, чтобы фазовый переход был переходом первого рода) *не выполняется* в Стандартной модели, но может выполняться в некоторых её расширениях.

В фазе с ненулевым хиггсовским средним, образовавшейся после фазового перехода, электрослабые процессы с нарушением барионного числа выключены, если выполняется неравенство, обратное к (11.20),

$$\frac{M_W(T)}{T} \gtrsim \frac{0.66}{B(m_h/M_W)} .$$

Учитывая, что  $M_W(T) = g\phi(T)/\sqrt{2}$ ,  $g^2/4\pi \approx 1/30$  и  $B \approx 2$ , получим отсюда требование<sup>14</sup>

$$\frac{\sqrt{2}\Phi_c}{T_c} \gtrsim 1 , \quad (11.99)$$

где  $T_c$  и  $\Phi_c$  — температура фазового перехода и среднее хиггсовского поля сразу после него. Требование (11.99) накладывает сильные ограничения на параметры электрослабой теории. Для их вывода воспользуемся результатами, полученными в разделе 10.2 в однопетлевом приближении. В этом приближении

$$\frac{\Phi_c}{T_c} = c \cdot \frac{\gamma}{\lambda} ,$$

---

<sup>14</sup>Напомним, что нормировка поля  $\phi$  согласно определениям главы 10, такова, что в вакууме  $\langle \phi \rangle = v/\sqrt{2}$ .

где  $\lambda$  — константа самодействия хиггсовского поля, параметр  $\gamma$  определён формулой (10.29), а константа  $c$  принимает значения от  $1/2$  до  $3/4$  в зависимости от того, насколько затягивается фазовый переход (см. формулы (10.33), (10.34)). Учитывая связь массы бозона Хиггса и вакуумного среднего хиггсовского поля,  $m_h = \sqrt{2\lambda}v$ , получим из (11.99) ограничение на массу бозона Хиггса

$$m_h^2 < c \cdot \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{1}{v} \cdot \sum_{\text{бозоны}} g_i m_i^3, \quad (11.100)$$

где в качестве реалистического значения выступает  $c = 1/2$ . В Стандартной модели (с одним дублетом Хиггса) в правую часть дают вклад  $W$ - и  $Z$ -бозоны с массами 80.4 ГэВ и 91.2 ГэВ и числами состояний  $g = 6$  и  $g = 3$ , соответственно (вкладом самого бозона Хиггса можно для оценок пренебречь, что мы и делали в разделе 10.2). Вспоминая, что  $v = 247$  ГэВ, получим из (11.100)

$$m_h < 50 \text{ ГэВ}.$$

Это свойство не имеет места в природе: экспериментальное ограничение на массу бозона Хиггса (в предположении справедливости Стандартной модели) имеет вид

$$m_h^{\text{эксп.}} > 114 \text{ ГэВ} \quad (11.101)$$

(см. Приложение В). Таким образом, в Стандартной модели электрослабый бариогенезис невозможен.

В действительности в Стандартной модели не выполняется и более слабое условие того, что чтобы электрослабый фазовый переход был переходом первого рода. Мы отмечали в разделе 10.3, что при реалистических значениях массы бозона Хиггса в Стандартной модели имеет место не фазовый переход, а гладкий кроссовер. При этом среда всё время находится в состоянии, близком к термодинамическому равновесию, и генерации барионной асимметрии вообще не происходит.

Указанную трудность можно обойти в некоторых расширениях Стандартной модели. Чтобы получить простой пример, добавим к полям Стандартной модели ещё одно скалярное поле — триплет по цвету<sup>15</sup> и синглет относительно  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ . Выберем лагранжиан этого поля  $\chi$  в виде

$$\mathcal{L}_\chi = D_\mu \chi^\dagger D^\mu \chi - \lambda_\chi H^\dagger H \cdot \chi^\dagger \chi, \quad (11.102)$$

где  $H$  — хиггсовский дублет. Существенно, что этот лагранжиан не содержит массового члена<sup>16</sup>, а масса  $\chi$ -бозона возникает в хиггсовском вакууме с  $\langle H^\dagger H \rangle \propto v^2$ . В этом случае  $\chi$ -бозон даёт вклад в правую часть (11.100) и ограничение (11.100) не противоречит экспериментальному ограничению (11.101), если  $m_\chi > 140$  ГэВ. В этом случае, правда, как высокотемпературное разложение, так и однопетлевое приближение, использованные при выводе (11.100), работают плохо, однако на качественном уровне результат остаётся справедливым. Похожая ситуация имеет место

<sup>15</sup>Триплетность по цвету нужна только для того, чтобы число степеней свободы  $\chi$ -частиц было достаточно велико; в данном случае оно составляет  $g_\chi = 6$ . Отметим, что буквально в рассматриваемой модели имеется трудность, связанная со стабильностью  $\chi$ -бозона; для её устранения достаточно ввести взаимодействия, приводящие к распаду  $\chi$  на известные частицы.

<sup>16</sup>Если бы мы включили в  $\mathcal{L}_\chi$  достаточно большой массовый член, то формула (10.29), как и другие формулы раздела 10.2, перестала бы работать, поскольку при её выводе предполагалось, что массы частиц связаны с хиггсовским средним соотношением типа (10.20).

в суперсимметричном расширении Стандартной модели. Там аналогом  $\chi$ -бозона выступает скалярный суперпартнёр  $t$ -кварка, при этом требуется, чтобы явный “мягкий” массовый член для него был мал. Последнее требование означает, что масса скалярного суперпартнёра  $t$ -кварка должна быть близка к массе  $t$ -кварка. Похожие ситуации возникают и в других расширениях со скалярными синглетами и/или дополнительными скалярными дублетами.

При обсуждении модели (11.102) мы несколько упростили ситуацию. Дело в том, что в результате взаимодействия с хиггсовским полем  $H$  само поле  $\chi$  приобретает “тепловую” массу  $m_{eff}(T) \propto \sqrt{\lambda_\chi T}$ , обусловленную эффектами среды и зависящую от температуры (см. второе слагаемое в (10.19), но для эффективного потенциала поля  $\chi$ ). Для цветного  $\chi$ -бозона вклад в тепловую массу дает и взаимодействие с глюонами. Поэтому необходимо убедиться в том, что тепловая масса мала по сравнению с массой, возникающей благодаря наличию ненулевого среднего поля  $H$  после фазового перехода и пропорциональной  $\sqrt{\lambda_\chi} \cdot \Phi_c$ .

▷ Задача 20. Выяснить, выполняется ли указанное требование в модели (11.102).

### 11.5.2 \*Генерация барионной асимметрии на толстой, медленно движущейся стенке

Как мы обсуждали в разделе 10.1, процесс фазового перехода первого рода происходит путём образования и последующего расширения пузырей новой фазы. Стенки этих пузырей проходят макроскопическое расстояние до столкновения с другими стенками, так что они заматают основной объём космической плазмы, в то время как объём областей, где происходит столкновение стенок, гораздо меньше полного объёма (соответствующее отношение объёмов пропорционально  $d/R$ , где  $d$  — толщина стенки, а  $R$  — размер пузыря к моменту перколяции). Поэтому при вычислении результирующей барионной асимметрии процессами, происходящими при столкновении стенок, можно пренебречь, а основным процессом является взаимодействие частиц среды со стенками пузырей при движении последних через космическую плазму. Поскольку характерные размеры расширяющихся пузырей велики, их стенки можно считать плоскими и движущимися с постоянной скоростью. Эта скорость определяется “трением” стенки о среду и в большинстве моделей составляет от 0.1 до 0.01 скорости света.

В этом и следующем разделах мы вкратце рассмотрим механизмы генерации барионной асимметрии во взаимодействии частиц космической плазмы с движущейся стенкой пузыря. По необходимости изложение будет довольно схематичным и не претендующем на полноту, поскольку мы не будем учитывать целый ряд факторов, более или менее существенных для этого довольно сложного динамического процесса.

Простой, хотя и не вполне реалистичный механизм электрослабого бариогенезиса возникает в так называемом адиабатическом режиме. Предположим, что стенки образующихся в процессе фазового перехода пузырей имеют размер, заметно превышающий длину свободного пробега частиц в космической плазме. Предположим ещё, что эти стенки движутся сквозь среду достаточно медленно. Тогда среда в каждый момент времени всюду, включая область внутри стенки, находится в локальном термодинамическом равновесии по отношению к быстрым процессам типа упругого рассеяния частиц или рождения пар частица-античастица. В то же время, даже в фазе с ненарушенной симметрией скорости электрослабых процессов с несохранением барионного числа невелики, как это следует из формулы (11.17), и мы предположим,



что в области внутри стенки локального термодинамического равновесия по ним не наступает.

Мы проиллюстрируем механизм генерации барионной асимметрии, который работает в этом случае, на примере упрощённой модели с калибровочной группой  $SU(2)_L$ , двумя хиггсовскими дублетами  $H_1$  и  $H_2$  и одной парой<sup>17</sup> фермионов  $Q_L$  (дублет) и  $q_R$  (синглет), взаимодействующей с хиггсовскими полями примерно так же, как в Стандартной модели

$$\mathcal{L}_{int} = h_1 \bar{Q}_L H_1 q_R + h.c. \quad (11.103)$$

(переопределением хиггсовских полей можно добиться того, чтобы юкавское взаимодействие с  $H_2$  отсутствовало). Случай двух и более хиггсовских дублетов выделен тем, что в нём имеется дополнительный по сравнению со Стандартной моделью источник  $CP$ -нарушения — это  $CP$ -нарушение в хиггсовском секторе. В дальнейшем будем считать  $h_1$  вещественным параметром. Как в фазе с нарушенной симметрией, так и в области доменной стенки поля  $H_1$  и  $H_2$  приобретают средние

$$\langle H_{1,2} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{1,2} \end{pmatrix}, \quad (11.104)$$

где  $\phi_{1,2}$  — комплексные величины, которые изменяются вдоль профиля стенки. Общая фаза  $\phi_1$  и  $\phi_2$  может быть положена равной нулю выбором калибровки, поскольку при калибровочных преобразованиях с калибровочной функцией  $\exp\left(i\alpha\frac{\tau^3}{2}\right)$  выполняется

$$\begin{aligned} \phi_1 &\rightarrow e^{i\frac{\alpha}{2}} \phi_1, \\ \phi_2 &\rightarrow e^{i\frac{\alpha}{2}} \phi_2. \end{aligned}$$

Поэтому можно положить

$$\begin{aligned} \phi_1 &= e^{i\theta} \rho_1, \\ \phi_2 &= e^{-i\theta} \rho_2, \end{aligned}$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  действительны. Фаза  $\theta$  является физической.

В присутствии средних (11.104) фермионный лагранжиан имеет квадратичный вклад

$$\mathcal{L}_f = h_1 \bar{q}_L \rho_1 e^{i\theta} q_R + h.c.,$$

где  $q_L$  — нижняя компонента дублета  $Q_L$ .

Если в хиггсовском секторе имеется  $CP$ -нарушение, то как  $\rho_1$ , так и  $\theta$  меняются вдоль профиля доменной стенки. Поскольку стенка движется, в фиксированной точке пространства  $\rho_1$  и  $\theta$  зависят от времени. Имеем поэтому нетривиальную зависимость от времени фермионного лагранжиана

$$\mathcal{L}_f = h_1 \bar{q}_L \rho_1(t) e^{i\theta(t)} q_R + h.c. \quad (11.105)$$

---

<sup>17</sup>Модель с группой  $SU(2)_L$  и одним левым дублетом имеет глобальную аномалию. Для наших целей это несущественно. В реалистических расширениях Стандартной модели основную роль играет юкавское взаимодействие  $t$ -кварка, и в этом смысле рассматриваемая упрощённая модель вполне ухватывает ситуацию.

Зависящая от времени фаза  $\theta(t)$  приводит к  $CP$ -нарушению в фермионном секторе и в конечном итоге — к генерации барионной асимметрии (если  $Q_L$  и  $q_R$  считать кварками).

Модель проще всего проанализировать, сделав зависящее от времени фазовое вращение поля  $q_R$ ,<sup>18</sup>

$$q_R \rightarrow e^{-i\theta(t)} q_R . \quad (11.106)$$

Фазовое вращение (11.106) приводит к дополнительному слагаемому в фермионном лагранжиане, возникающему из кинетического члена

$$i\bar{q}_R \gamma^\mu \partial_\mu q_R \rightarrow i\bar{q}_R \gamma^\mu \partial_\mu q_R + \bar{q}_R \gamma^0 q_R \dot{\theta} .$$

Видно, что последний член здесь приводит к модификации гамильтониана теории

$$H \rightarrow H - \dot{\theta} N_R , \quad (11.107)$$

где

$$N_R = \int \bar{q}_R \gamma^0 q_R d^3x$$

— оператор числа правых кварков.

Предположим, что переходы правого кварка в левый (например,  $q_R \rightarrow Q_L + H$ ) — это быстрые процессы по сравнению со скоростью изменения  $\dot{\theta}$ , а процессы аномального несохранения барионного числа, как говорилось выше — медленные. В пренебрежении последними барионное число равно нулю. Для гамильтона (11.107) это означает, что в среде имеется химический потенциал  $\mu_B$  к барионному числу — единственному сохраняющемуся в указанных предположениях квантовому числу. Вычисление свободной энергии при  $\mu_B \neq 0$  сводится к дальнейшей замене гамильтониана (11.107) на

$$H - \dot{\theta} N_R - \mu_B (N_R + N_L) ,$$

где  $(N_R + N_L) = B$  — барионное число. Таким образом, эффективный химический потенциал для правых кварков равен  $(\mu_B + \dot{\theta})$ , а для левых кварков он равен  $\mu_B$ . Воспользовавшись результатом задачи 2 из раздела 5.1, получим для барионного числа

$$\Delta_B = \Delta_R + \Delta_L = \frac{T^2}{6} \left[ (\mu_B + \dot{\theta}) + 2\mu_B \right] ,$$

где мы учли, что имеется два типа левых кварков (фактор 2 в последнем слагаемом). Условие  $\Delta_B = 0$  даёт

$$\mu_B = -\frac{1}{3} \dot{\theta} .$$

Включим теперь в рассмотрение процессы с аномальным несохранением барионного числа. Из-за наличия химического потенциала  $\mu_B$  в среде они приводят к генерации барионного числа. Воспользуемся уравнениями (5.50) и (5.49) и запишем

$$\frac{dn_B}{dt} = -\frac{\Delta F \cdot \Delta B}{T} \Gamma_{sph} ,$$

<sup>18</sup>Отметим, что фазовое вращение  $Q_L$  аномально, поэтому исключение с его помощью фазы  $\theta$  из лагранжиана (11.105) привело бы к  $\theta$ -зависящему члену в эффективном лагранжиане калибровочных полей; такой подход мы использовать не будем.

здесь  $\Delta F$  и  $\Delta B$  — изменение свободной энергии и барионного числа в результате одного сфалеронного процесса, а  $\Gamma_{sph}$  — темп таких процессов. В случае одного дублета левых кварков  $\Delta B = 1$  и  $\Delta F = \mu_B \cdot \Delta B = \mu_B$ . Таким образом,

$$\frac{dn_B}{dt} = -\frac{\mu_B}{T}\Gamma_{sph} = \frac{1}{3}\frac{\dot{\theta}}{T}\Gamma_{sph} \quad (11.108)$$

(в этом месте используется предположение о медленности сфалеронных процессов: считается, что влиянием этих процессов на эволюцию  $\mu_B$  можно пренебречь). В результате получаем плотность барионного числа, образовавшуюся в процессе прохождения доменной стенки:

$$n_B = \frac{1}{3T} \int \dot{\theta} \Gamma_{sph}(t) dt. \quad (11.109)$$

Здесь  $\Gamma_{sph}$  зависит от времени, поскольку средние хиггсовских полей в фиксированной точке меняются при прохождении через неё доменной стенки. В качестве неплохого приближения можно считать, что  $\Gamma_{sph}$  даётся формулой (11.17)

$$\Gamma_{sph} = \kappa' \alpha_W^5 T^4, \quad \kappa' \sim 25$$

до тех пор, пока хиггсовское вакуумное среднее (в данном случае  $\sqrt{|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2}$ , определяющее массу  $W$ -бозона), меньше  $T$  (см. (11.99)) и  $\Gamma_{sph} = 0$  после этого. Учитывая, наконец, что плотность энтропии равна  $s = (2\pi^2/45)g_*T^3$ , получим оценку

$$\frac{n_B}{s} \simeq \kappa' \frac{\alpha_W^5}{g_*} \Delta\theta,$$

где  $\Delta\theta$  — изменение фазы от начала фазового перехода до момента выключения сфалеронных переходов. Для  $g_* \sim 100$  и  $\alpha_W \simeq 1/30$  имеем

$$\frac{n_B}{s} \simeq 10^{-8} \cdot \Delta\theta,$$

что вполне приемлемо с точки зрения генерации наблюдаемой асимметрии (11.1). В реалистических моделях, обобщающих Стандартную модель физики частиц, эта оценка остаётся справедливой по порядку величины, изменяется лишь численный коэффициент в (11.109).

Выполнение необходимых условий генерации асимметрии проявляется в описанном случае следующим образом:

- Барионное число не сохраняется благодаря конечности  $\Gamma_{sph}$ ;
- Источником  $CP$ -нарушения служит зависящая от времени фаза  $\theta$ . Отметим, что этот источник — дополнительный к имеющемуся в Стандартной модели (фазе в матрице смешивания кварков). Эта ситуация является довольно общей: для электрослабого бариогенезиса требуются новые по сравнению со Стандартной моделью механизмы нарушения  $CP$ -инвариантности.
- Нарушение термодинамического равновесия связано с зависимостью фазы  $\theta$  от времени и с медленностью электрослабых процессов с несохранением барионного числа.

Убедимся в заключение этого раздела, что зависимость от времени относительной фазы хиггсовских полей действительно возможна. Рассмотрим хиггсовский потенциал вида

$$\begin{aligned} V(H_1, H_2) = & V_1 (H_1^\dagger H_1) + V_2 (H_2^\dagger H_2) \\ & + \lambda_+ \left( \text{Re} (H_2^\dagger H_1) - v_1 v_2 \cos 2\xi \right)^2 \\ & + \lambda_- \left( \text{Im} (H_2^\dagger H_1) - v_1 v_2 \sin 2\xi \right)^2, \end{aligned}$$

где функции  $V_1$  и  $V_2$  имеют минимумы при  $\phi_1 = v_1$  и  $\phi_2 = v_2$  соответственно, а  $\lambda_\pm$ ,  $\xi$  — безразмерные параметры потенциала. При  $\lambda_\pm > 0$  скалярный потенциал имеет минимум при

$$\phi_1 = e^{i\xi} v_1, \quad \phi_2 = e^{-i\xi} v_2,$$

что соответствует вакуумному значению фазы

$$\theta_{vac} = \xi.$$

Пусть фазовый переход происходит так, что оба поля развивают средние. В начале фазового перехода  $\phi_1$  и  $\phi_2$  малы, поэтому существенна лишь квадратичная часть эффективного потенциала

$$V_{eff} = V_{1,eff} (|\phi_1|^2) + V_{2,eff} (|\phi_2|^2) - v_1 v_2 \text{Re} (\phi_2^* \phi_1 \cdot \lambda e^{2i\zeta}), \quad (11.110)$$

где

$$\lambda e^{2i\zeta} = \lambda_+ \cos 2\xi + i\lambda_- \sin 2\xi,$$

т.е.

$$\text{tg } 2\zeta = \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \text{tg } 2\xi.$$

Минимум эффективного потенциала (11.110) по относительной фазе хиггсовских полей достигается при

$$\theta_i = \zeta.$$

Именно вдоль этого направления в пространстве хиггсовских полей происходит “скатывание” в начале фазового перехода, т.е. в области доменной стенки, близкой к ненарушенной фазе. Таким образом, фаза  $\theta$  вдоль доменной стенки изменяется от  $\theta_i = \zeta$  (передний край) до  $\theta_{vac} = \xi$ , что и требовалось.

### 11.5.3 \*Бариогенезис на тонкой стенке

Случай, когда толщина стенки мала по сравнению с длиной свободного пробега частиц в среде, является более реалистичным, но и гораздо более сложным для анализа. Мы здесь лишь вкратце обсудим физические процессы, приводящие к генерации барионной асимметрии в этом случае.

Предположим, как и в предыдущем разделе, что в области доменной стенки имеется нарушение  $CP$  за счёт зависящей от положения на стенке фазы скалярного поля. Мы будем работать пока в системе отсчёта, связанной с доменной стенкой, поэтому вместо (11.105) запишем лагранжиан взаимодействия фермионов со стенкой

$$\mathcal{L}_f = h_1 \bar{q}_L \rho(z) e^{i\theta(z)} q_R + h.c., \quad (11.111)$$

где  $z$  — координата, ортогональная стенке. Функция  $\rho(z)$  меняется от нуля (при  $z \rightarrow -\infty$ , ненарушенная фаза, считаем, что стенка движется справа налево) до  $\Phi_c$  (при  $z \rightarrow +\infty$ , фаза с нарушением симметрии); при этом с учётом требования (11.99) имеем

$$\Phi_c \gtrsim T. \quad (11.112)$$

Будем считать юкавскую константу малой<sup>19</sup>,

$$h_1 \ll 1,$$

---

<sup>19</sup>Это не справедливо для  $t$ -кварка, но связанные с этим эффекты требуют специального рассмотрения.

тогда эффективная масса фермиона в нарушенной фазе также мала

$$m_f = h_1 \Phi_c \ll T .$$

Для дальнейших грубых оценок будем считать, что толщина стенки — порядка обратной температуры,

$$l_w \sim T^{-1} . \quad (11.113)$$

Также будем считать (и это действительно справедливо), что скорость стенки мала,

$$v_w \ll 1 .$$

Наконец, без ограничения общности будем полагать фазу  $\theta(z)$  равной нулю в нарушенной фазе, т.е.  $\theta(z) = 0$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Фермионы среды, налетающие на стенку из симметричной фазы, частично отражаются от неё. Из-за наличия зависящей от координаты  $z$  фазы  $\theta(z)$  коэффициент отражения  $R_L$  левого фермиона не равен коэффициенту отражения  $\bar{R}_L$  соответствующей античастицы. Частицы с импульсами  $p_z$ , значительно превышающими обратную толщину стенки, отражения от неё практически не испытывают (для них работает ВКБ-приближение), а частицы с несколько меньшими импульсами частично отражаются от неё, хотя для них  $R \ll 1$  (высота энергетического барьера равна  $m_f$  и мала по сравнению с  $p_z$  при  $p_z \sim l_w^{-1}$ ). С другой стороны, частицы с  $p_z < m_f$  вообще не проникают в область за стенкой. Поэтому существенной особенностью импульсов является область

$$m_f < p_z < l_w^{-1} .$$

В этой области можно пользоваться теорией возмущений по  $h_1$ , так что амплитуда отражения имеет, грубо говоря, порядок величины  $h_1$ , а коэффициент отражения (квадрат амплитуды) имеет порядок  $h_1^2$ . Асимметрия отражения частиц от стенки грубо оценивается величиной

$$R_L - \bar{R}_L \sim h_1^2 \theta_{CP} , \quad (11.114)$$

где  $\theta_{CP}$  определяется изменением фазы  $\theta$  в области стенки.

Для дальнейшего полезно отметить, что левый фермион, отразившись от стенки, превращается в правый, и наоборот (см. ниже).

Если стенка покоится, то в системе имеется термодинамическое равновесие, и от стенки нет  $CP$ -асимметричного потока левых и правых частиц. Физическая причина этого состоит в том, что асимметрии в потоках отражённых и проходящих сквозь стенку частиц уравнивают друг друга. Для движущейся стенки это уже не справедливо, и от стенки в сторону симметричной фазы идёт поток правых частиц, превышающий поток античастиц (или наоборот), пропорциональный скорости стенки  $v_w$  (при  $v_w \ll 1$ ). Для его оценки нужно учесть, что от стенки отражаются частицы с произвольными  $p_x, p_y$ , и с  $p_z \lesssim l_w^{-1}$ , поэтому асимметрия в потоке правых частиц по порядку величины равна

$$J_R \sim v_w T^2 \frac{1}{l_w} [R_L - \bar{R}_L]_{p_z \sim l_w^{-1}} \quad (11.115)$$

(мы учли, что отражённые правые частицы падали как левые). Для левых частиц имеем (см. ниже)

$$J_L = -J_R . \quad (11.116)$$

Таким образом, вблизи стенки в симметричной фазе образуется избыток правых частиц над античастицами и недостаток левых частиц (если  $J_R > 0$ ). Обратная ситуация имеет место за стенкой, в нарушенной фазе. Движущаяся стенка пузыря выступает в качестве сепаратора частиц различных сортов.

В области за стенкой (в нарушенной фазе) асимметрия между частицами и античастицами не приводит к процессам с нарушением барионного и лептонного чисел, если выполнено неравенство (11.99). В области перед стенкой это не так: хотя в силу (11.116) поток барионного и лептонных чисел равен нулю, в этой области имеется недостаток *левых* фермионов, а именно они участвуют в электрослабых взаимодействиях с нарушением барионного числа. Эти взаимодействия стремятся восполнить недостаток левых фермионов, приблизив тем самым среду в симметричной фазе вблизи стенки к состоянию термодинамического равновесия.

Асимметричное отражение фермионов от стенки изменяет среду локально, на расстоянии от стенки, меньшем некоторого расстояния  $l$  (значение  $l$  мы скоро найдём). Время, которое проходит с того момента, как в некоторой области возник недостаток левых фермионов, до момента прохождения стенки через эту область равно  $t = l/v_w$ . Именно в течение этого времени в данной области действуют процессы с нарушением барионного числа. Чтобы найти  $l$ , заметим, что за время  $t$  отражённая от стенки частица испытает  $t/t_f$  столкновений и, в соответствии с законом броуновского движения, удалится на расстояние

$$l = l_f \sqrt{\frac{t}{t_f}}, \quad (11.117)$$

где  $t_f$  и  $l_f$  — время и длина свободного пробега;  $l_f = t_f$  для интересующего нас случая ультрарелятивистских частиц. Вместе с  $t = l/v_w$  уравнение (11.117) даёт

$$\begin{aligned} l &= \frac{l_f}{v_w}, \\ t &= \frac{t_f}{v_w^2}. \end{aligned} \quad (11.118)$$

Из-за потока частиц от стенки избыток (отрицательный) левых частиц, который образуется в области размера  $l$  за время  $t$  (на единицу площади стенки) равен по порядку величины

$$N_L = J_L \cdot t,$$

так что соответствующая плотность равна

$$n_L^{ind} = J_L \cdot \frac{t}{l} = \frac{J_L}{v_w}. \quad (11.119)$$

Будем считать, что сфалеронные процессы настолько медленные, что они успевают переработать лишь небольшую часть избытка (11.119). Тогда (см. (11.109))

$$\frac{dn_B}{dt} \sim -\frac{\mu_L}{T} \Gamma_{sph},$$

где, как обычно для ультрарелятивистских частиц,  $\mu_L \sim n_L/T^2$ . Отсюда получаем

$$n_B \sim \frac{n_L^{ind}}{T^3} \Gamma_{sph} \cdot t,$$

где время действия сфалеронных процессов даётся (11.118). Собирая формулы (11.115), (11.118), (11.119) и учитывая, что плотность энтропии  $s \sim g_* T^3$ , получаем отсюда барионную асимметрию

$$\Delta_B \equiv \frac{n_B}{s} \sim \frac{1}{v_w^2 g_*} \frac{t_f}{l_w} \frac{\Gamma_{sph}}{T^4} [R_L - \bar{R}_L]_{p_z \sim l_w^{-1}}. \quad (11.120)$$

Для левых лептонов время свободного пробега — порядка

$$t_f \sim (\alpha_w^2 T)^{-1}.$$

Для кварков оно меньше из-за столкновений, обусловленных сильными взаимодействиями, поэтому наиболее существенным является  $\tau$ -лептон<sup>20</sup> (в соответствии с (11.114) асимметрия растёт с  $h_1 = \frac{m}{v}$ ). Подставляя в (11.120)  $\Gamma_{sph} = \kappa' \alpha_w^5 T^4$ ,  $l_w \sim T^{-1}$ , и воспользовавшись грубой оценкой (11.114), получим для вклада  $\tau$ -лептона

$$\Delta_B \sim \frac{\kappa' \alpha_w^3}{v_w^2 g_*} h_\tau^2 \theta_{CP},$$

причём  $h_\tau^2 = \frac{m_\tau^2}{v^2} \sim 10^{-4}$ . Для  $v_w \sim 3 \cdot 10^{-2}$  (вполне реалистичное значение) и  $\kappa' \simeq 25$  имеем отсюда

$$\Delta_B \sim 10^{-6} \theta_{CP}, \quad (11.121)$$

что вполне достаточно для объяснения наблюдаемой барионной асимметрии.

▷ *Задача 21. При каких значениях скорости стенки предположение о медленности сфалеронных процессов, сделанное в тексте, справедливо?*

▷ *Задача 22. При какой скорости стенки процессы перехода левого  $\tau$ -лептона в правый несущественны (примером такого процесса служит рассеяние  $\tau$ -лептона на  $Z$ -бозоне,  $\tau_L + Z \rightarrow \tau_R + h$ ).*

Разумеется, в приведённом упрощённом анализе мы не учли целого ряда факторов, таких как наличие динамических масс частиц в среде, сохранение квантовых чисел типа  $(B - L)$  или слабого гиперзаряда, эффект дебаевской экранировки калибровочных зарядов в среде и т.д. Тем не менее, оценка (11.121) остаётся справедливой по порядку величины, и описанный механизм действительно является достаточно эффективным.

В заключение этого раздела уточним оценку (11.114). Для этого требуется решить уравнение Дирака для фермионов, взаимодействующих со стенкой согласно (11.111). В системе отсчёта, связанной со стенкой, сделаем преобразование Лоренца вдоль стенки так, чтобы фермион двигался перпендикулярно стенке. Введём четырёхмерный фермионный столбец

$$\psi = \begin{pmatrix} q_L \\ q_R \end{pmatrix},$$

при этом адекватным является киральное (вейлевское) представление  $\gamma$ -матриц (см. Приложение В). В выбранной системе отсчёта  $\partial_1 \psi = \partial_2 \psi = 0$ , и с учётом члена (11.111) в лагранжиане уравнение Дирака сводится к двум уравнениям

$$i\partial_0 q_R + i\sigma^3 \partial_3 q_R + m^*(z) q_L = 0, \quad (11.122)$$

$$i\partial_0 q_L - i\sigma^3 \partial_3 q_L + m(z) q_R = 0, \quad (11.123)$$

<sup>20</sup> Для  $t$ -кварка изложенный здесь анализ не применим, поскольку в среде левый  $t$ -кварк быстро переходит в правый за счёт сильного юкавского взаимодействия.

где  $m(z) = h_1 \rho e^{i\theta}$ . Волновая функция *левого* фермиона, налетающего на стенку слева (т.е. из области с ненарушенной симметрией, где  $m(z) = 0$ ), при  $z \rightarrow -\infty$  имеет вид

$$q_L^{(in)} = e^{-i\omega t + ipz} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (11.124)$$

где  $p = \omega > 0$ . Именно такая волновая функция удовлетворяет уравнению (11.123) с  $m = 0$ . Для вычисления коэффициента отражения левого фермиона необходимо найти решение уравнений (11.122), (11.123), в котором имеется падающая волна (11.124), при  $z \rightarrow -\infty$  имеется также отражённая (бегущая налево) волна, а при  $z \rightarrow +\infty$  имеется только прошедшая волна. Из (11.122), (11.123) видно, что решение следует искать в виде

$$q_L = e^{-i\omega t} \psi_L(z) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$q_R = e^{-i\omega t} \psi_R(z) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения для числовых функций  $\psi_L$  и  $\psi_R$  выглядят следующим образом

$$-i\partial_z \psi_R + \omega \psi_R + m^*(z) \psi_L = 0, \quad (11.125)$$

$$i\partial_z \psi_L + \omega \psi_L + m(z) \psi_R = 0. \quad (11.126)$$

Отражённая волна имеет при  $z \rightarrow -\infty$  вид  $\psi \propto e^{-ipz}$ . Видно, что отражённая волна — целиком правая, поскольку уравнение (11.126) такого решения не имеет. Этот общий результат в действительности следует из закона сохранения углового момента. Итак, для отражённой волны

$$\psi_R = A e^{-ipz}, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (11.127)$$

где  $A$  — интересующая нас амплитуда отражения, а  $p = \omega$ . Чтобы найти амплитуду  $A$ , воспользуемся теорией возмущений по  $m(z)$ . В нулевом порядке  $\psi_L = e^{-ipz}$ ,  $\psi_R = 0$ . В первом порядке  $\psi_R$  определяется из уравнения (11.125), которое приобретает вид

$$-i\partial_z \psi_R + \omega \psi_R = -m^*(z) e^{ipz}.$$

Общее решение этого уравнения даётся формулой

$$\psi_R = e^{-ipz} \left[ -i \int_{z_0}^z m^*(z') e^{2ipz'} dz' + c \right], \quad (11.128)$$

где  $z_0$  и  $c$  — произвольные постоянные. Подберём константу  $c$  так, чтобы в области за стенкой ( $z \rightarrow +\infty$ ) не было волны, движущейся налево. Выберем  $z_0$  в области за стенкой. Там  $m^* = m_f$  (мы считаем константу  $h_1$  действительной и  $\theta(z \rightarrow +\infty) = 0$ ), и решение при  $z \rightarrow +\infty$  имеет вид

$$\psi_R = e^{-ipz} \left[ -\frac{m_f}{2p} (e^{2ipz} - e^{2ipz_0}) + c \right].$$

При  $z \rightarrow +\infty$  имеется только прошедшая волна ( $\psi_R \propto e^{ipz}$ ), если

$$c = -\frac{m_f}{2p} e^{2ipz_0}.$$

Решение (11.128) действительно имеет вид (11.127), причём

$$A = -i \int_{z_0}^{-\infty} m^*(z) e^{2ipz} dz - \frac{m_f}{2p} e^{2ipz_0}, \quad (11.129)$$

где нужно положить  $p = \omega$  и  $z_0 \rightarrow +\infty$ .

Амплитуда отражения  $\bar{A}$  левой античастицы отличается от (11.129) заменой  $m^*(z)$  на  $m(z)$ .

▷ **Задача 23.** Доказать последнее утверждение.



Коэффициент отражения левой частицы  $R_L$  равен квадрату модуля амплитуды. Нас будет интересовать асимметрия отражения частицы и античастицы:

$$R_L - \bar{R}_L = |A|^2 - |\bar{A}|^2. \quad (11.130)$$

Для дальнейших оценок представим амплитуду (11.129) в виде

$$A = i \int_{-\infty}^{+\infty} [m^*(z) - m_f \theta(z)] e^{2ipz} dz - \frac{m_f}{2p},$$

где  $\theta(z)$  — обычная функция скачка, и мы перешли к пределу  $z_0 \rightarrow \infty$ . Будем считать функцию  $\text{Re}[m(z)] - m_f \theta(z)$  антисимметричной по  $z$  и запишем

$$A = -\frac{M}{2p} + \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[m(z)] e^{2ipz} dz,$$

где

$$M = m_f + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\text{Re}[m(z)] - m_f \theta(z)) \sin(2pz) p dz.$$

По порядку величины

$$M \sim m_f. \quad (11.131)$$

После этого выражение для асимметрии (11.130) принимает простой вид

$$R_L - \bar{R}_L = -\frac{2M}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[m(z)] \cos 2pz dz.$$

Вводя наконец

$$\theta_{CP}(p) = \frac{1}{l_w m_f} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im}[m(z)] \cos 2pz dz, \quad (11.132)$$

получим

$$R_L - \bar{R}_L = -\frac{2M m_f l_w}{p} \theta_{CP}(p).$$

Интеграл в (11.132) быстро стремится к нулю с ростом импульса при  $p \gg l_w$  из-за осциллирующего фактора  $\cos 2pz$ , а при  $p \lesssim l_w^{-1}$  он конечен и определяется величиной фазы  $m(z)$ , т.е.  $\theta(z)$ . Учитывая (11.131), имеем оценку

$$R_L - \bar{R}_L \sim \frac{2m_f^2 l_w}{p_z} \theta_{CP}, \quad p \lesssim l_w^{-1}, \quad (11.133)$$

где мы учли, что всюду в предыдущих формулах  $p$  был импульсом, перпендикулярным стенке. Эта оценка работает и при произвольных  $p_x, p_y$ , поскольку преобразование Лоренца вдоль стенки величину  $p_z$  не меняет. Подчеркнём, что в (11.132) фигурирует масса фермиона в нарушенной фазе, т.е.  $m_f = h_1 \Phi_c$ . Оценка (11.114) получается из (11.133) для  $p_z \sim l_w^{-1}$  если считать, что толщина стенки — порядка  $\Phi_c^{-1}$  (т.е. считать, что выполняется (11.112) и (11.113)).

Для асимметрии отражения правых частиц имеем

$$R_R - \bar{R}_R = -(R_L - \bar{R}_L). \quad (11.134)$$

▷ **Задача 24.** Доказать последнее утверждение в общем случае, используя свойства уравнений (11.122) и (11.123).

В завершение раздела отметим, что во всех рассмотренных нами механизмах генерации барионной асимметрии требуется привлекать дополнительные к имеющимся в Стандартной модели источники нарушения  $CP$ -симметрии. И хотя величины  $CP$ -нарушающих фаз, требуемые для генерации наблюдаемой барионной асимметрии, не выглядят неправдоподобно большими, в реалистичных моделях они часто оказываются сильно ограниченными из данных прецизионных измерений.

Одними из наиболее чувствительных к новым источникам  $CP$ -нарушения являются эксперименты по измерению электрических дипольных моментов электрона  $d_e$

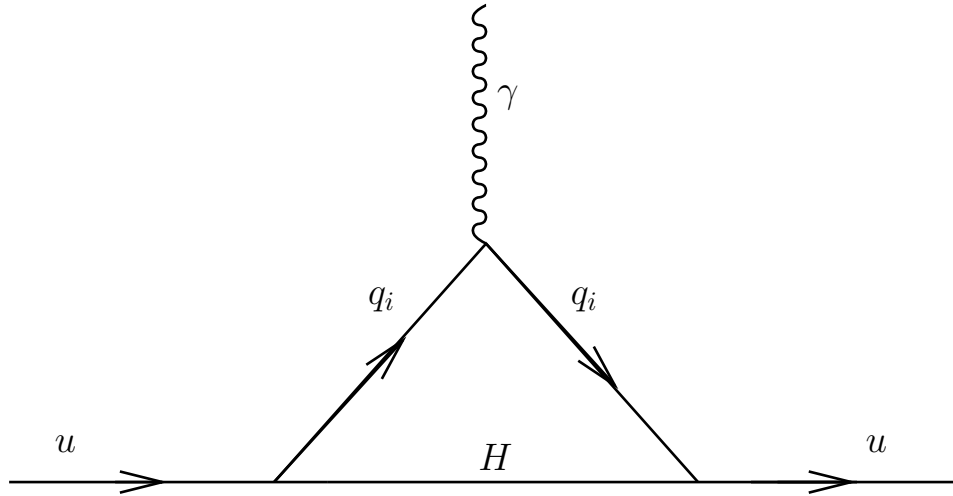


Рис. 11.16: Однопетлевой вклад в электрический дипольный момент  $u$ -кварка.

и нейтрона  $d_n$ . Дипольные моменты  $d$  определяются как параметры гамильтониана взаимодействия электрического поля  $\mathbf{E}$  и спина  $\mathbf{S}$ ,

$$H = -d \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|},$$

поэтому для релятивистской частицы — фермиона  $\psi$  — дипольный момент входит в лагранжиан взаимодействия с электромагнитным полем следующим образом

$$\mathcal{L} = -d \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \psi F_{\mu\nu}.$$

Ненулевой дипольный момент нарушает  $P$ - и  $T$ -инвариантность (см. раздел В.3 Приложения В), а, следовательно, и  $CP$ . Для составной частицы — нейтрона — дипольный момент по порядку величины совпадает с наибольшим из дипольных моментов составляющих нейтрон кварков,  $d_n \sim d_u, d_d$ . Современные экспериментальные измерения дипольных моментов электрона и нейтрона дают ограничения

$$d_e < 1.4 \cdot 10^{-27} \cdot e \cdot \text{см} = 0.7 \cdot 10^{-13} \cdot e \cdot \text{ГэВ}^{-1}, \quad (11.135)$$

$$d_n < 0.63 \cdot 10^{-25} \cdot e \cdot \text{см} = 0.32 \cdot 10^{-11} \cdot e \cdot \text{ГэВ}^{-1}, \quad (11.136)$$

где  $e$  — заряд электрона. В рассмотренной нами двухдублетной модели (11.103) с дополнительным нарушением  $CP$ -симметрии в хиггсовском секторе дипольный момент кварка  $q$  определяется вкладом однопетлевой диаграммы с обменом виртуальным хиггсовским бозоном  $H$ , аналогичной приведённой на рис. 11.16. По порядку величины вклад этой диаграммы равен

$$d_q \sim \theta_{CP} \frac{e}{(4\pi)^2} \frac{m_q Y_q^2}{m_H^2}, \quad (11.137)$$

где  $m_H$  — масса хиггсовского бозона, чьё взаимодействие с кварками нарушает  $CP$ -симметрию. В (11.137) мы учли петлевой фактор  $(4\pi)^2$ , а также тот факт, что нарушающее киральность взаимодействие хиггсовского бозона пропорционально  $CP$ -нарушающей фазе  $\theta_{CP}$ . В реалистичном случае, когда оба хиггсовских дублета взаимодействуют с полями материи, в спектре теории имеется три электрически нейтральных и один заряженный (две степени свободы) хиггсовский бозон, юкавским

образом взаимодействующих с полями кварков. В этом случае сразу несколько хиггсовских бозонов дают вклад в аномальный дипольный момент кварка. Соответствующие диаграммы имеют вид, приведённый на рис 11.16, причём мы учли, что в общем случае взаимодействия хиггсовских бозонов нарушают аромат, т.е. матрица юкавских констант недиагональна,  $\hat{Y} = Y_{diag} \cdot \hat{U}$ , где  $\hat{U}$  — матрица смешивания. По порядку величины вклад этой диаграммы равен

$$d_u \sim \theta_{CP} \frac{e}{(4\pi)^2} \frac{m_{q_i} U_{uq_i} U_{q_i u}^* Y_u Y_{q_i}}{m_H^2}, \quad (11.138)$$

Основной вклад в дипольный момент пропорционален массам виртуальных фермионов  $m_{q_i}$ ; зависимость от массы бозона Хиггса для  $m_H \gg m_i$  однозначно определяется из размерных соображений.

Главный вклад в (11.138) даёт обмен виртуальным  $t$ -кварком, поэтому для смешивания  $U_{ut} \sim 1$  получим

$$d_n \sim d_u \sim \theta_{CP} \cdot 1.6 \cdot 10^{-11} \cdot \left( \frac{1 \text{ ТэВ}}{m_H} \right)^2 e \cdot \text{ГэВ}^{-1}. \quad (11.139)$$

Из сравнения (11.139) с (11.136) видно, что для масс хиггсовских бозонов порядка электрослабого масштаба фаза должна быть достаточно небольшой,  $\theta_{CP} \lesssim 10^{-3}$ , если смешивание во взаимодействиях хиггсовских бозонов с кварками порядка единицы. Аналогичные ограничения на  $CP$ -нарушающие фазы имеют место и во многих других моделях. Эти ограничения имеются независимо от соображений, относящихся к барионной асимметрии. С другой стороны, для электрослабого бариогенезиса требуются довольно большие значения  $CP$ -фаз. Поэтому во многих моделях, обеспечивающих правильную величину барионной асимметрии Вселенной за счёт электрослабого механизма, предсказываются величины ЭДМ, не слишком малые по сравнению с существующими экспериментальными ограничениями (11.135), (11.136). Так, в рассмотренной нами модели, сравнение предсказания для генерируемой барионной асимметрии (11.121) с величиной наблюдаемой асимметрии  $\Delta_B \simeq 10^{-10}$  даёт оценку для требуемой величины  $CP$ -фазы,  $\theta_{CP} \sim 10^{-2}$ . Подставляя эту оценку в (11.139), получим предсказание для величины дипольного момента нейтрона,

$$d_n \sim 10^{-13} \cdot \left( \frac{1 \text{ ТэВ}}{m_H} \right)^2 \cdot e \cdot \text{ГэВ}^{-1}.$$

Для реалистичных значений массы хиггсовского бозона, скажем,  $m_H \sim 200 \text{ ГэВ}$ , данное предсказание близко к существующему экспериментальному ограничению. Общее заключение состоит в том, что новые механизмы  $CP$ -нарушения, приводящие к успешному электрослабому бариогенезису, будут, скорее всего, доступны для косвенной проверки в экспериментах следующего поколения по измерению электрических дипольных моментов.

## 11.6 \*Механизм Аффлекса–Дайна

### 11.6.1 Скалярные поля, несущие барионное число

В некоторых обобщениях Стандартной модели физики частиц барионное число, помимо кварков, несут новые гипотетические скалярные поля. Возможны также скалярные поля, несущие лептонные числа. В экспериментах скалярные частицы с ненулевым барионным или лептонными числами не наблюдались, что говорит о том, что

они имеют достаточно большие массы<sup>21</sup>; грубо говоря, эти массы должны превышать несколько сотен ГэВ. Тем не менее, нетривиальная динамика таких скалярных полей в расширяющейся Вселенной может приводить к генерации барионной асимметрии; класс соответствующих механизмов обобщённо называют механизмом Аффлекса–Дайна. Разумеется, и в этом случае для генерации барионной асимметрии требуется выполнение условий, перечисленных в разделе 11.1. В частности, во взаимодействиях с участием скалярных полей барионное число не должно точно сохраняться; должно иметься и  $CP$ -нарушение.

В качестве прототипа моделей с указанными свойствами можно выбрать модель, в которой, помимо полей Стандартной модели, имеется комплексное скалярное поле  $\phi$ , несущее барионное число  $B_\phi \neq 0$ , и фермион  $\psi$  с нулевым барионным числом. Кинетический и массовый члены в действии поля  $\psi$  имеют стандартный вид, действие скалярного поля выберем в виде

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^* \partial_\nu \phi - V(\phi)) , \quad (11.140)$$

где

$$V(\phi) = m^2 \phi^* \phi + \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2 - \frac{\lambda'}{4} (\phi^4 + \phi^{*4}) , \quad (11.141)$$

где параметры  $\lambda$  и  $\lambda'$  — действительны и положительны<sup>22</sup>, причём  $\lambda' \ll \lambda$ . Наконец, взаимодействие с участием  $\phi$  и  $\psi$  выберем в виде

$$\mathcal{L}_{int} = h \bar{q} \psi \phi + h.c. , \quad (11.142)$$

где  $h$  — юкавская константа связи,  $q$  — комбинация кварковых полей преобразующаяся как спинор при преобразованиях Лоренца. При этом  $q$  может быть (и, как правило, бывает) составным оператором; он может быть как цветным, так и бесцветным. Важно, чтобы оператор  $q$  нёс отличное от нуля барионное число  $B_q$ , при этом

$$B_\phi = B_q .$$

Мы не обсуждаем для простоты свойства полей  $\phi$  и  $\psi$  по отношению к калибровочной группе  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$  Стандартной модели; соответствующие представления можно подобрать.

▷ *Задача 25. Подобрать представления полей  $\phi$  и  $\psi$  по отношению к калибровочной группе Стандартной модели и составной оператор  $q$ , несущий барионное число, так, чтобы описанная выше модель сохраняла калибровочную инвариантность на древесном уровне.*

Если бы последнего слагаемого в (11.141) не было, модель была бы инвариантна относительно глобальных фазовых преобразований

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{i\alpha B_\phi} \phi , \\ q &\rightarrow e^{i\alpha B_q} q , \\ \psi &\rightarrow \psi . \end{aligned}$$

<sup>21</sup> В предположении, что их взаимодействия с частицами Стандартной модели не слишком слабы.

<sup>22</sup> Третий член в (11.141) можно было бы выбрать в виде  $\frac{1}{4} (\lambda' \phi^4 + h.c.)$  с комплексной  $\lambda'$ . Однако переопределением поля  $\phi$  его можно свести к виду, фигурирующему в (11.141). Знаки в (11.141) выбраны из соображения удобства дальнейшего изложения.

Соответствующее сохраняющееся квантовое число и было бы барионным числом, при этом плотность барионного числа была бы равна

$$n_B = iB_\phi (\partial_t \phi^* \cdot \phi - \phi^* \cdot \partial_t \phi) + n_{B,q} , \quad (11.143)$$

где  $n_{B,q} = \frac{1}{3}(n_q - n_{\bar{q}})$  — плотность барионного числа кварков. Если константа  $\lambda'$  в (11.141) мала, но конечна, барионное число сохраняется лишь приближённо.

▷ *Задача 26.* Получить выражение (11.143), используя теорему Нётер.

Ситуация, подобная изложенной выше, естественным образом возникает в суперсимметричном расширении Стандартной модели, см. раздел 9.6. В качестве поля  $\phi$  в нём может выступать комбинация полей скварков, слептонов и хиггсовских бозонов, а полем  $\psi$  может служить комбинация калибрино — суперпартнёров калибровочных бозонов. Взаимодействие типа (11.143) действительно имеет место, причём с точностью до численного множителя константа  $h$  совпадает с калибровочной константой  $g_s$  группы  $SU(3)_c$ . Взаимодействие типа  $\lambda'(\phi^4 + h.c.)$  запрещено для скварка калибровочной инвариантностью по отношению к  $SU(3)_c$ , однако возможны взаимодействия более высокого порядка (например, типа  $\lambda'\phi^6$ ), нарушающие барионное число и  $(B - L)$ . Последнее обстоятельство особенно важно, поскольку для образования барионной асимметрии необходима и достаточна генерация  $(B - L)$ , если речь идёт о температурах выше 100 ГэВ.

Особенностью суперсимметричных обобщений Стандартной модели является наличие в них *плоских направлений* — таких направлений в пространстве всех скалярных полей, вдоль которых скалярный потенциал мал вплоть до очень больших значений полей. В терминах потенциала (11.141), в котором  $\phi$  понимается как поле, параметризующее плоское направление, это означает, что масса  $m$  мала (по сравнению, например, с массой Планка), а константы  $\lambda$  и  $\lambda'$  также чрезвычайно малы. В качестве достаточно реалистичного примера можно привести значения

$$\begin{aligned} m &\sim 1 \text{ ТэВ} , \\ \lambda, \lambda' &\sim \frac{m^2}{M_{Pl}^2} \sim 10^{-32} . \end{aligned} \quad (11.144)$$

В этом случае члены четвёртого порядка в потенциале (11.141) начинают преобладать над массовым членом только при  $\phi \sim M_{Pl}$ .

## 11.6.2 Генерация асимметрии

Опишем механизм Аффлекса–Дайна на примере модели, изложенной в начале предыдущего раздела. Предположим, что поле  $\phi$  в начальный момент времени (в инфляционной теории — сразу после окончания инфляции) было пространственно однородным и принимало некоторое комплексное значение  $\phi_i = r_i e^{i\theta_i}$ . Будем считать, что  $m^2|\phi_i|^2 \ll \lambda|\phi_i|^4$ . Из раздела 4.8.1 мы знаем, что в течение некоторого времени значение поля остаётся практически неизменным, если выполнены условия медленного скатывания. В тот момент, когда эти условия нарушаются, поле, оставаясь однородным, начинает эволюционировать к минимуму потенциала  $\phi = 0$ , и быстро, в течение нескольких хаббловских времён, скатывается к окрестности этого минимума. Вблизи минимума действительная и мнимая части эволюционируют независимо (потенциал квадратичен), и каждая из них ведёт себя в соответствии с формулой (4.58), т.е.

$$\begin{aligned} \text{Re}\phi \equiv \phi_R &= \frac{C_R}{a^{3/2}(t)} \cos(mt + \beta_R) , \\ \text{Im}\phi \equiv \phi_I &= \frac{C_I}{a^{3/2}(t)} \cos(mt + \beta_I) . \end{aligned} \quad (11.145)$$

Отметим, что если бы масштабный фактор  $a$  был постоянным, то “траектория” (11.145) представляла бы собой эллипс на комплексной плоскости (при  $\beta_I \neq \beta_R$ ).

В действительности  $a(t)$  растёт со временем, поэтому эллипс превращается в эллиптическую спираль, см. рис. 11.17. Наличие слагаемого в (11.141), нарушающего барионное число (т.е. слагаемого с  $\lambda'$ ), весьма существенно: если бы его не было, фаза поля  $\phi$  при эволюции не менялась бы (см. ниже), и в результате эллипс выродился бы в отрезок.

Поле  $\phi(t)$  вида (11.145) несёт барионное число, плотность которого даётся формулой (см. (11.143)) и равна

$$n_B = 2B_\phi \frac{m C_I C_R}{a^3(t)} \sin(\beta_R - \beta_I) . \quad (11.146)$$

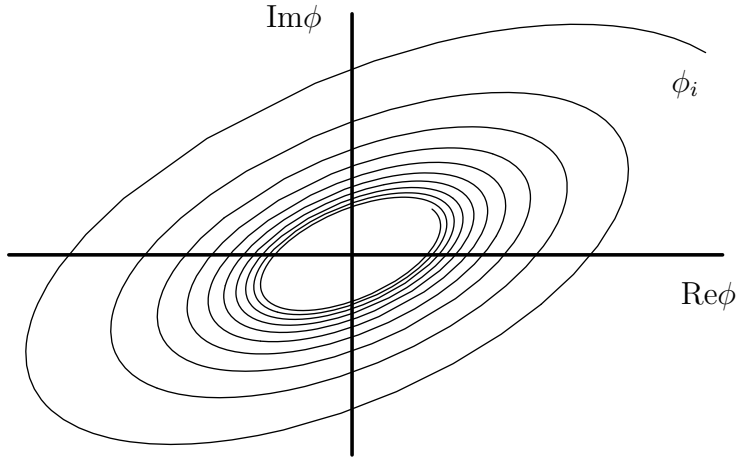


Рис. 11.17: Траектория  $\phi(t)$  на комплексной плоскости.

$$\begin{aligned} n_B &= iB_\phi (\partial_t \phi^* \cdot \phi - \phi^* \partial_t \phi) \\ &= 2B_\phi (\phi_R \partial_t \phi_I - \phi_I \partial_t \phi_R) \end{aligned} \quad (11.147)$$

Как обычно,  $n_B \propto a^{-3}$ , так что барионное число в сопутствующем объёме сохраняется (несохранение барионного числа, связанное с последним членом в (11.141), мало при малых  $\phi$ ). За счёт взаимодействий с кварками типа (11.142) это барионное число в конечном итоге перерабатывается в барионное число кварков, и во Вселенной остаётся барионная асимметрия.

Как мы отмечали в разделе 4.8.1, на квантовом языке полю (11.145) соответствует когерентное состояние покоящихся  $\phi$ -бозонов и их античастиц, причём  $\phi$ -бозон несёт барионное число  $B_\phi$ , а его античастица — барионное число  $(-B_\phi)$ . В этом смысле отличие от нуля барионного числа (11.146) означает, что числа  $\phi$ -бозонов и их античастиц в этом состоянии различны. Распад поля  $\phi$  на кварки и фермионы  $\psi$  можно, хотя и с оговорками, воспринимать как распады  $\phi$ -частиц и их античастиц. На этом языке образование в конечном итоге асимметрии между кварками и антикварками вполне очевидно.

Перейдём к оценке генерируемой таким образом барионной асимметрии. Удобно записать действие (11.140) в переменных  $r$  и  $\theta$ , таких что

$$\phi = \frac{r}{\sqrt{2}} e^{i\theta} .$$

В расширяющейся Вселенной действие для пространственно-однородного поля имеет вид

$$S_{\rho, \theta} = \int dt a^3(t) \left( \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 - V(r, \theta) \right) ,$$

где

$$V(r, \theta) = \frac{m^2}{2} r^2 + \frac{\lambda}{8} r^4 - \frac{\lambda'}{8} r^4 \cos 4\theta . \quad (11.148)$$

Отсюда имеем уравнение для  $\theta$

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} (a^3 r^2 \dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} . \quad (11.149)$$

Выражение для плотности барионного числа (11.147) в переменных  $r$  и  $\theta$  имеет вид

$$n_B = B_\phi r^2 \dot{\theta} .$$

Поэтому уравнение (11.149) можно записать в виде

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} (a^3 n_B) = -B_\phi \frac{\partial V}{\partial \theta} .$$

Если бы  $V$  не зависел от  $\theta$ , то это был бы закон сохранения барионного числа (в сопутствующем объёме), а для зависящего от  $\theta$  потенциала это — уравнение для генерации барионного числа.

Будем считать начальную фазу  $\theta_i$  не равной нулю. Это предположение означает, что начальное состояние  $CP$ -асимметрично; именно в этом месте выполняется соответствующее условие генерации асимметрии. Данное предположение действительно существенно, поскольку при  $\theta_i = 0$  эволюция происходит вдоль оси  $\text{Im}\phi = 0$  (при действительной  $\lambda'$ ), и плотность барионного числа (11.147) в конечном итоге равна нулю. При отличном от нуля  $\theta_i$  имеем для плотности барионного числа в поздний момент времени  $t$

$$a^3(t) n_B(t) = -B_\phi \int_{t_i}^t \frac{\partial V}{\partial \theta} a^3(t') dt' . \quad (11.150)$$

Интеграл в (11.150) набирается в течение нескольких хаббловских времён сразу после нарушения условий медленного скатывания, когда поле скатывается в окрестность точки  $\phi = 0$ : до этого  $\partial V / \partial \theta$  постоянно, но  $a^3(t)$  мало; после этого  $\partial V / \partial \theta \propto r^4$  и мало (пропорционально  $a^{-6}$ , см. (11.145)). Отсюда сразу получаем оценку

$$n_B(t) \sim \frac{a^3(t_r)}{a^3(t)} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}(t_r) \cdot \frac{1}{H(t_r)} ,$$

где  $t_r$  соответствует моменту нарушения режима медленного скатывания. Учитывая, что  $a(t) \propto T^{-1}$ , получаем оценку для асимметрии

$$\Delta_B \equiv \frac{n_B}{s} \sim \frac{1}{g_* T_r^3 H(T_r)} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}(t_r) . \quad (11.151)$$

Отметим, что мы сделали неявное, но существенное предположение о том, что нетривиальная эволюция поля  $\phi$  происходит на горячей стадии. В дальнейшем мы будем работать в этом предположении, а также в предположении о том, что плотность энергии поля  $\phi$  никогда не доминирует во Вселенной. Мы обсудим ниже те условия, при которых эти предположения выполняются.

Для потенциала (11.149) выражение (11.151) приобретает вид

$$\Delta_B(t) \sim \frac{\lambda'}{g_* H_r} \frac{r_i^4}{(M_{Pl}^* H_r)^{3/2}} \sin 4\theta_i , \quad (11.152)$$

где индекс  $r$  по-прежнему относится к моменту нарушения условий медленного скатывания, и мы учли стандартное соотношение  $H^2 = T^2 / M_{Pl}^*$ . Мы учли также, что до

начала медленного скатывания поле практически не изменялось, и к моменту  $t = t_r$  совпадало с начальным.

Для дальнейшего анализа вспомним, что условия медленного скатывания нарушаются при

$$\frac{V(\phi_i)}{\phi_i^2} \sim H_r^2,$$

т.е.

$$\lambda r_i^2 \sim H_r^2 = \frac{T_r^4}{M_{Pl}^{*2}} \quad (11.153)$$

(где мы по-прежнему считаем, что  $m^2 \ll \lambda r_r^2$  и  $\lambda' \ll \lambda$ ). Используя это соотношение, оценку (11.152) можно переписать в виде

$$\Delta_B \sim \frac{\lambda'}{\lambda} \frac{1}{g_* \lambda^{1/4}} \left( \frac{r_i}{M_{Pl}^*} \right)^{3/2} \sin 4\theta_i. \quad (11.154)$$

Видно, что результат сильно зависит как от параметров модели (констант  $\lambda$  и  $\lambda'$ ), так и от начальных амплитуды  $r_i$  и фазы  $\theta_i$  скалярного поля  $\phi$ . В общем случае то или иное значение  $\Delta_B$  выглядит как результат случайного выбора начальных условий.

Чтобы понять, при каких условиях асимметрия (11.154) равна наблюдаемой,  $\Delta_B \sim 10^{-10}$ , необходимо сделать то или иное предположение о начальных значениях  $r_i$  и  $\theta_i$ . Одно из возможных предположений (хотя и далеко не единственное) состоит в том, что начальная фаза не мала,  $\sin 4\theta_i \sim 1$ , а начальная амплитуда — порядка планковской,  $r_i \sim M_{Pl}$ . Из (11.154) видно, что наблюдаемая асимметрия получается, только если нарушение барионного числа чрезвычайно мало,  $\lambda'/\lambda \lesssim 10^{-8}$ . В противном случае асимметрия слишком велика. Этот результат иллюстрирует довольно характерное свойство механизма Аффлекса–Дайна: генерируемая с его помощью барионная асимметрия часто (хотя и не всегда) оказывается слишком большой.

При  $r_i \sim M_{Pl}$  предположение о том, что режим медленного скатывания заканчивается, когда Вселенная уже находится на горячей стадии, выполняется лишь при очень малых значениях  $\lambda$ . Пусть  $T_R$  — максимальная температура Вселенной на горячей стадии. Тогда требование, чтобы соотношение (11.153) выполнялось при  $T_i < T_R$  даёт

$$\lambda < \frac{T_R^4}{M_{Pl}^{*2} r_i^2}.$$

Для  $T_R \sim 10^{12}$  ГэВ (вполне возможное значение для инфляционных теорий) и  $r_i \sim M_{Pl}$  имеем численно

$$\lambda < 10^{-26}. \quad (11.155)$$

Кроме того, исходное предположение о том, что  $m^2 |\phi|^2 \ll \lambda |\phi|^4$ , требует малости массы  $m$ ; для  $r_i \sim M_{Pl}$  имеем  $m^2 \ll \lambda M_{Pl}^2$ , т.е. с учётом (11.155)  $m < 10^6$  ГэВ. Эти результаты служат иллюстрацией ещё одной особенности механизма Аффлекса–Дайна: для его реализации требуется, чтобы поле  $\phi$  обладало “плоским” потенциалом  $V(\phi)$ . Как мы уже говорили, плоские потенциалы естественным образом появляются в суперсимметричных теориях (см. (11.144)).

Отметим, что ряд инфляционных моделей приводит к ещё более низким температурам разогрева<sup>23</sup>, скажем,  $T_R \sim 10^9$  ГэВ. В этом случае максимальное значение

<sup>23</sup>Столь низкие температуры разогрева предпочтительны и для решения “проблемы гравитино” в суперсимметричных теориях: при более высоких температурах слишком активно идёт тепловое рождение гравитино, которые доживают до стадии нуклеосинтеза и нарушают его течение, см. раздел 9.6.3.



параметра Хаббла  $H_R = T_R^2/M_{Pl}^*$  имеет порядок  $H_R \sim 1$  ГэВ. Для массы  $\phi$ -поля, большей 1 ГэВ (а это — наиболее реалистичная возможность), это означает, что условия медленного скатывания никогда не выполняются на горячей стадии: из (4.52) следует, что одно из этих условий выглядит как  $m^2 \ll H^2$ . В этом случае механизм Аффлекса–Дайна может тем не менее работать, но на стадии пост-инфляционного разогрева.

Обсудим ещё одну особенность механизма Аффлекса–Дайна, по-прежнему считая  $r_i \sim M_{Pl}$ . Когерентные осцилляции (11.145) поля  $\phi$  обладают плотностью энергии  $\rho_\phi$ , которая падает как  $a^{-3}(t)$ , см. (4.64). Эти осцилляции дополнительно затухают из-за рождения фермионов, описываемого лагранжианом (11.142). Обратное время этого затухания грубо оценивается величиной

$$\Gamma \lesssim \frac{m}{8\pi} . \quad (11.156)$$

Действительно, осциллирующее поле (11.145) представляет собой совокупность покоящихся  $\phi$ - и  $\bar{\phi}$ -бозонов, а  $\Gamma$  — ширина их распада на фермионы; в теориях со слабой связью всегда имеет место неравенство (11.156). Таким образом, осцилляции сохраняются до того момента времени  $t_{dec}$ , когда

$$H(t_{dec}) \sim \Gamma ,$$

а затем исчезают за время порядка хаббловского. Поскольку  $\rho_\phi$  падает как  $a^{-3}$ , а плотность энергии горячей плазмы падает как  $a^{-4}$ , к моменту  $t_{dec}$  осцилляции скалярного поля могут давать доминирующий вклад в плотность энергии. Этого не происходит, если

$$\frac{\rho_\phi(t_{dec})}{g_* T_{dec}^4} \ll 1 , \quad (11.157)$$

где

$$T_{dec} \equiv T(t_{dec}) \sim (\Gamma M_{Pl}^*)^{1/2} , \quad (11.158)$$

температура, при которой распадается конденсат  $\phi$ -частиц. Для оценки  $\rho_\phi(t_{dec})$  заметим, что за несколько хаббловских времён, в течение которых поле скатывается от начального значения  $\phi_i$  в окрестность минимума потенциала, ни плотность энергии, ни масштабный фактор не успевают сильно измениться. Поэтому в качестве грубой оценки имеем

$$\rho_\phi(t) = \frac{a^3(t_r)}{a^3(t)} \cdot \lambda r_i^4 , \quad (11.159)$$

где, по-прежнему, индекс  $r$  относится к окончанию режима медленного скатывания; в (11.159) мы учли, что в этот момент плотность энергии поля оценивается величиной  $\lambda r_i^4$ . Из (11.159) следует, что

$$\begin{aligned} \rho_\phi(t_{dec}) &\sim \frac{T_{dec}^3}{T_r^3} \cdot \lambda r_i^4 \\ &\sim \frac{\lambda^{1/4} T_{dec}^3 r_i^{5/2}}{M_{Pl}^{*3/2}} , \end{aligned}$$

где мы воспользовались (11.153). Условие (11.157) вместе с (11.158) дают

$$\frac{\lambda^{1/4} r_i^{5/2}}{g_* M_{Pl}^{*2} \Gamma^{1/2}} \ll 1 ,$$

т.е.

$$\frac{\lambda^{1/4}}{g_*} \left( \frac{r_i}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{r_i}{M_{Pl}^*} \right)^2 \ll 1 .$$

Для  $r_i \sim M_{Pl}$  и  $m \sim 1$  ТэВ имеем отсюда ограничение (с невысокой точностью, поскольку мы опускали численные коэффициенты)

$$\lambda < 10^{-24} .$$

Таким образом, обратным влиянием осцилляций поля  $\phi$  на темп расширения Вселенной можно пренебречь, опять-таки только если константа  $\lambda$  чрезвычайно мала. В противном случае эти осцилляции вносят доминирующий вклад в плотность энергии на относительно поздней стадии эволюции; Вселенная на этой стадии расширяется так, как если бы она была заполнена нерелятивистским веществом. Появление промежуточной “пылевидной” стадии — ещё одна характерная, хотя и не обязательная особенность механизма Аффлека–Дайна.

▷ *Задача 27. В ситуации с промежуточной пылевидной стадией оценка (11.154) перестаёт быть справедливой. Оценить  $\Delta_B$  для этого случая, считая по-прежнему, что нарушение условий медленного скатывания происходит на радиационно-доминированной стадии.*

Обсудим вкратце вариант механизма Аффлека–Дайна, в котором начальное значение  $r_i$  определяется динамически, а требования к плоскостности скалярного потенциала слабее, чем в изложенном выше сценарии. Предположим, что помимо слагаемых в действии, выписанных в (11.140), имеется ещё одно слагаемое

$$S_{R\phi} = - \int d^4x \sqrt{-g} c R |\phi|^2 , \quad (11.160)$$

где  $c$  — положительная постоянная, которую мы выберем несколько большей единицы. Для однородной изотропной Вселенной  $R = -12H^2$ , поэтому добавление этого слагаемого эффективно изменяет массовый член в потенциале

$$m^2 |\phi|^2 \rightarrow (m^2 - 12cH^2) |\phi|^2 . \quad (11.161)$$

На ранних временах, когда  $H \gg m$ , потенциал имеет *максимум* при  $\phi = 0$ , и в пределе  $\lambda' \rightarrow 0$  долину минимумов на окружности в комплексной плоскости

$$|\phi|^2 \equiv \frac{r^2}{2} = \frac{12cH^2}{\lambda} . \quad (11.162)$$

Условия медленного скатывания при этом *не* выполняются (для этого нам и нужно  $c > 1$ ) для движения вдоль радиального направления, поэтому  $r(t)$  приближённо определяется равенством (11.162). При малых, но конечных  $\lambda'$  долина (11.162) слегка наклонена (потенциал зависит от фазы  $\theta$ ), но фаза является почти плоским направлением, для которого возможно выполнение условий медленного скатывания.

▷ *Задача 28. Показать, что условия медленного скатывания выполняются (на этапе  $H \gg m$ ) для эволюции фазы  $\theta$  при  $\lambda' \ll \lambda$ .*

Таким образом, при  $\lambda' \ll \lambda$  значение фазы  $\theta = \theta_i$  держится постоянным вплоть до момента, когда

$$H_i \sim m. \quad (11.163)$$

Примерно в этот момент времени эффективный массовый член (11.161) меняет знак (считаем, что  $s$  не слишком сильно превышает единицу), и поле скатывается в направлении к  $\phi = 0$ , начиная со значения

$$r_i \sim \frac{m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \theta = \theta_i. \quad (11.164)$$

Дальнейший анализ, приводящий к (11.152), остаётся неизменным, и с учётом (11.163) и (11.164) получаем для асимметрии

$$\Delta_B \sim \frac{\lambda'}{g_* \lambda^2} \left( \frac{m}{M_{Pl}^*} \right)^{3/2} \sin 4\theta_i.$$

Требуемое значение асимметрии получается, например, если положить  $\lambda \sim 10^{-11}$ ,  $\lambda'/\lambda^2 \sim 0.1$ ,  $\sin 4\theta_i \sim 1$  и  $m \sim 10^6$  ГэВ. Отметим, однако, что описанный вариант работает на горячей стадии, только если температура разогрева весьма высока: требование  $H_i < H_R = T_R^2/M_{Pl}^*$ , вместе с (11.163) даёт

$$T_R > (m M_{Pl}^*)^{1/2},$$

что для приведённых выше численных значений означает  $T_R > 10^{12}$  ГэВ.

Итак, механизм Аффлекса–Дайна при достаточно жёстких ограничениях на параметры теории может работать на горячей стадии расширения Вселенной. При этом скалярный потенциал должен быть достаточно плоским, а максимальная температура во Вселенной — достаточно высокой. Интересная возможность, связанная с этим механизмом, состоит в том, что на некотором этапе когерентные осцилляции скалярного поля дают доминирующий вклад в плотность энергии, и во Вселенной имеется промежуточная пылевидная стадия.

Если максимальная температура Вселенной не слишком велика,  $T_R \lesssim 10^{10}$  ГэВ, а масса поля  $\phi$  — порядка 1 ТэВ или выше, то поле  $\phi$  скатывается в сторону минимума потенциала до наступления горячей стадии. Это — вполне реалистическая возможность. В таком случае механизм Аффлекса–Дайна может работать на стадии разогрева Вселенной после инфляции. Соответствующие оценки отличаются от сделанных выше, но общий вывод о возможности генерации наблюдаемой барионной асимметрии остаётся справедливым.

▷ *Задача 29. Рассмотреть описанный только что механизм при  $s \gg 1$ , где  $s$  — параметр в действии (11.160). Может ли этот механизм работать на горячей стадии и приводить к наблюдаемой барионной асимметрии при  $T_R \lesssim 10^9$  ГэВ?*

## 11.7 Заключительные замечания

Рассмотренные в этой Главе механизмы генерации барионной асимметрии Вселенной далеко не исчерпывают обсуждаемые в литературе возможности. Кроме всего прочего, генерация барионной асимметрии могла происходить на стадии постинфляционного разогрева, а не на горячей стадии, как мы предполагали в этой Главе. К сожалению, многие механизмы (например, рассмотренные в разделах 11.3 и

11.4) основываются на гипотетических физических явлениях, которые могут иметь место лишь при сверхвысоких энергиях, недоступных для ускорителей в обозримом будущем. Поэтому прямых экспериментальных или наблюдательных доказательств того или иного механизма генерации барионной асимметрии получить будет крайне трудно, если вообще возможно. Исключение составляет электрослабый механизм, который будет доказан или опровергнут коллайдерными экспериментами недалёкого будущего. Что касается механизма Аффлека–Дайна, то сильным аргументом в его пользу послужило бы обнаружение так называемых барионных возмущений постоянной кривизны в спектре возмущений плотности энергии вещества в ранней Вселенной<sup>24</sup>. Поиски этой моды возмущений космической плазмы идут и будут продолжены путём детальных измерений анизотропии и поляризации реликтового излучения. Этот круг вопросов мы рассмотрим во второй части книги.

---

<sup>24</sup> Генерация заметной амплитуды этой моды возмущений — возможное, но совсем не обязательное следствие механизма Аффлека–Дайна, поэтому отвергнуть его на основании наблюдательных данных будет нельзя.

## Глава 12

# Топологические дефекты и солитоны во Вселенной

В этой Главе мы рассмотрим особенности космологии теоретико-полевых моделей, допускающих существование солитонных или солитоноподобных решений. Эти решения представляют собой специфические (иногда — макроскопические) конфигурации поля, чья стабильность обусловлена нетривиальной топологией пространства вакуумов теории (топологические дефекты) или существованием сохраняющихся глобальных зарядов (нетопологические солитоны, в т.ч. Q-шары). Интерес представляют как частицеподобные объекты (монополи, Q-шары), так и протяжённые — космические струны и доменные стенки. Подобные конфигурации возникают в различных обобщениях Стандартной модели физики частиц, и подробно рассмотрены в соответствующей литературе. Вообще говоря, могут представлять интерес также нестабильные солитоноподобные решения, если их время жизни соизмеримо со временем жизни Вселенной. В дальнейшем мы не будем рассматривать такие решения, поскольку часто они приводят к тем же следствиям для космологии, что и аналогичные стабильные солитоны.

В этой книге мы обсудим образование солитонных конфигураций в ранней Вселенной, их последующую эволюцию и возможное влияние на процессы, происходящие в расширяющейся Вселенной. До сих пор неоспоримых данных о существовании солитоноподобных объектов во Вселенной нет. Тем не менее, их теоретическое изучение представляет несомненный интерес. Как мы увидим, в моделях с солитонами возможны изменение темпа расширения Вселенной, появление новых механизмов образования структур, линзирование далёких источников, искажение картины анизотропии реликтового излучения, новые процессы, приводящие к генерации барионной асимметрии и многое другое. Характерные энергетические масштабы процессов, приводящих к образованию топологических дефектов, заметно превышают электрослабый масштаб. Экспериментальное обнаружение топологических дефектов могло бы свидетельствовать о том, что в ранней Вселенной температуры действительно достигали соответствующих величин.<sup>1</sup> Кроме того, обнаружение солитонов дало бы неоспоримое свидетельство в пользу существования новой физики за рамками Стандартной модели физики частиц. Исследование свойств топологических дефектов позволило бы изучать масштабы энергий, намного превышающие возмож-

---

<sup>1</sup>Вообще говоря, существуют механизмы рождения топологических дефектов, не требующие столь высоких температур во Вселенной. Однако в любом случае плотности энергии в ранней Вселенной должны быть достаточно высоки.

ности современных ускорителей.

Причиной, лежащей в основе существования топологических дефектов в рамках некоторых моделей физики частиц является нетривиальная структура вакуумов этих теорий. Математически, “нетривиальность структуры” означает, что некоторая гомотопическая группа  $\pi_N$  многообразия  $\mathcal{M}$  вакуумов теории нетривиальна,

$$\pi_N(\mathcal{M}) \neq 0, \quad (12.1)$$

т.е. существуют нетривиальные отображения  $N$ -мерной сферы  $S^N$  в многообразие вакуумов  $\mathcal{M}$ . В большинстве случаев это означает, что солитонная конфигурация задаёт нетривиальное отображение пространственных асимптотик (сферы  $S^N$ , в общем случае) в многообразие вакуумов (поскольку на пространственной бесконечности полявые конфигурации должны переходить в вакуумные, чтобы не нести бесконечно большой полной энергии). В пространстве-времени размерности  $d+1$  условие (12.1) указывает на существование солитонов (стабильных нетривиальных полевых конфигураций) пространственно-временной размерности  $d - N$ . Стабильность солитонов обусловлена требованием конечности энергии, поскольку их разрушение требует перестройки вакуума на пространственной бесконечности. С каждой нетривиальной конфигурацией связан сохраняющийся заряд — топологический инвариант. Для четырёхмерного пространства-времени возможны топологические дефекты трёх типов: пространственно-временных размерностей  $2 + 1$  (стенки),  $1 + 1$  (струны) и  $0 + 1$  (монополи), а также возможны гибридные варианты, включающие комбинации дефектов различных размерностей.

## 12.1 Образование топологических дефектов в ранней Вселенной

Достаточно общим свойством теоретико-полевых моделей с топологическими дефектами является то, что эти дефекты существуют лишь в фазе со спонтанно нарушенной симметрией, в которой имеются отличные от нуля средние скалярных полей. В симметричной фазе решения, описывающие топологические дефекты, отсутствуют в таких моделях. Именно с этой ситуацией мы столкнёмся в разделах 12.2, 12.3, 12.4, 12.5. Как мы обсуждали в Главе 10, при достаточно высоких температурах реализуется фаза с ненарушенной симметрией<sup>2</sup>, а фаза с нарушенной симметрией возникает во Вселенной при понижении температуры в результате фазового перехода. Таким образом, существование топологических дефектов возможно во Вселенной лишь после соответствующего фазового перехода, т.е. при  $T < T_c$ , где  $T_c$  — температура фазового перехода.<sup>3</sup>

Одним из механизмов образования топологических дефектов является тепловой механизм: после фазового перехода возможно образование дефектов в результате взаимодействия частиц среды. В отсутствие других механизмов оно стремится привести концентрацию топологических дефектов к равновесной. Тепловой механизм часто малоэффективен: например, если речь идёт о частицеподобных солитонах (скажем, о магнитных монополях, которые мы рассмотрим в разделе 12.2), то их масса  $M_{TD}$ , как правило, велика по сравнению с критической температурой, и равновесная концентрация подавлена больцмановским фактором

$$n_{TD}^{(eq)} \propto e^{-\frac{M_{TD}}{T_c}}. \quad (12.2)$$

Для струн и доменных стенок подавление ещё сильнее.

---

<sup>2</sup>В некоторых моделях теории поля имеются исключения из этой общей картины, но мы не будем на них останавливаться.

<sup>3</sup>Образование топологических дефектов возможно как при тепловом фазовом переходе, происходящем в результате понижения температуры первичной плазмы, так и при нетепловых фазовых переходах, возможных на стадии пост-инфляционного разогрева.

Имеется, однако, и другой механизм, который называют механизмом Киббла. Мы подробно рассмотрим этот механизм в разделе 12.2 на примере магнитных монополей, но в действительности, как мы увидим, он имеет общий характер. Если в результате фазового перехода пространство вакуумов оказалось в широком смысле несвязным, то могли образоваться топологические дефекты соответствующей размерности. В причинно-связанной на момент фазового перехода области полевые конфигурации скоррелированы, а значит в такой области образуется связная компонента нового вакуума. В то же время, на достаточно больших расстояниях вакуумы не скоррелированы, поэтому топология полей на масштабах, превышающих размер причинно связанной области, может совпадать с топологией соответствующего дефекта. При дальнейшей релаксации эта топология не изменяется, и во Вселенной возникает топологический дефект. В этом и состоит механизм Киббла. Это далеко не единственный механизм образования дефектов, однако он является наиболее универсальным, т.е. обеспечивает образование дефектов различных типов и достаточно слабо зависит от  $M_{TD}/T_c$ .

Чтобы оценить плотность топологических дефектов сегодня, требуется вычислить их плотность  $n_{TD}(t_c)$  на момент образования  $t_c$  и знать их последующую эволюцию в расширяющейся Вселенной. В случае теплового рождения концентрация дефектов после фазового перехода оценивается величиной

$$n_{TD}(T_c) \lesssim n_{TD}^{(eq)}(T_c) ,$$

причём равновесная плотность  $n_{TD}^{(eq)}$ , как правило, экспоненциально мала, см. (12.2). Для топологических дефектов, образовавшихся по механизму Киббла,  $n_{TD}(t_c)$  определяется корреляционной длиной  $l_{cor}$ , которая заведомо не превосходит<sup>4</sup> линейного размера причинно-связанной области на момент фазового перехода, т.е. размера горизонта на тот момент времени. Для метрики Фридмана–Робертсона–Уокера (2.13) размер горизонта определяется формулой (3.22),

$$l_H(t_c) = a(t_c) \int_0^{t_c} \frac{dt'}{a(t')} .$$

В частности, для радиационно доминированной стадии расширения Вселенной с  $a(t) \propto \sqrt{t}$  размер причинно-связанной области равен обратному параметру Хаббла на момент фазового перехода,

$$l_H(t_c) = 2t_c = \frac{1}{H(t_c)} ,$$

что в свою очередь, используя (3.28), удобно представить через температуру фазового перехода  $T_c$  и параметр  $M_{Pl}^*$ . Окончательно для плотности числа топологических дефектов в момент их образования имеем

$$n_{TD}(t_c) \gtrsim l_H(t_c)^{-3} = \frac{T_c^6}{M_{Pl}^{*3}} . \quad (12.3)$$

---

<sup>4</sup>Для фазового перехода первого рода  $l_{cor}$  определяется как средний размер пузырей на момент перколяции. Для фазового перехода второго рода  $l_{cor}$  определяется как линейный размер области, в которой энергия, необходимая для разматывания топологически нетривиальных конфигураций (например, для перехода через потенциальный барьер между вакуумами) по порядку величины равна температуре.

Оценка (12.3) является с точностью до численного фактора (который в ряде случаев может заметно отличаться от единицы) более или менее общей для всех типов топологических дефектов. Что касается дальнейшей эволюции плотности  $n_{TD}(t)$ , то она различна для различных типов дефектов. Заметим, что эта эволюция, как правило, является существенно неравновесным процессом: плотность энергии топологических дефектов эволюционирует с масштабным фактором (а значит и с температурой первичной плазмы) по степенному закону, в то время как равновесные плотности дефектов при  $T \ll T_c$  экспоненциально подавлены. Эта эволюция будет рассмотрена в следующих разделах, где обсуждаются наиболее часто встречающиеся типы топологических дефектов. Здесь же отметим, что в первые моменты после образования топологические дефекты не влияют на темп расширения Вселенной, поскольку их плотность энергии пропорциональна  $n_{TD}(t_c)$  и подавлена малым фактором  $T_c^3/M_{Pl}^3$  по сравнению с плотностью энергии релятивистского вещества. На более поздних этапах эволюции Вселенной плотность энергии, накопленная в топологических дефектах, может стать существенной и даже доминирующей.

Отметим, что группа симметрии теории  $G$  может быть локальной (калибровочной) или глобальной. Соответствующие дефекты также называются локальными или глобальными. В первом случае энергия дефекта локализована, а в случае глобальных дефектов плотность энергии (градиентная часть) падает с расстоянием от “центра” дефекта лишь степенным образом, или даже слабее. Распределение плотности энергии глобального дефекта, вообще говоря, простирается за горизонт на момент формирования,  $l_H(t_c)$ . В физически интересном случае нескольких дефектов это означает, что нельзя пренебрегать взаимодействием между ними. С учётом энергии взаимодействия полная энергия конфигурации оказывается конечной.

## 12.2 \*Монополи ’т Хоффа–Полякова

### 12.2.1 Монополи в калибровочных теориях

Классическим примером модели, где существуют решения вида монополей (и антимонполей), является модель Джорджи–Глэшоу:  $SU(2)$ -калибровочная теория с триплетом скалярных полей  $\phi^a$ ,  $a = 1, 2, 3$  (они преобразуются по присоединённому представлению группы  $SU(2)$ ). Лагранжиан модели имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_\mu\phi^a\mathcal{D}^\mu\phi^a - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - v^2)^2, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \\ \mathcal{D}_\mu\phi^a &= \partial_\mu\phi^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Помимо калибровочных взаимодействий между векторными полями  $A_\mu^a$  и скалярными полями он включает самодействие скалярных полей. В модели имеет место спонтанное нарушение симметрии: вакуумное среднее скалярного поля, определяемое из условия минимума скалярного потенциала,

$$\langle\phi^a\phi^a\rangle = v^2, \quad (12.5)$$

инвариантно лишь относительно подгруппы  $U(1)$  группы калибровочной симметрии  $SU(2)$ . Выбрав основное состояние скалярного поля в виде

$$\langle\phi^a\rangle = \delta_3^a v, \quad (12.6)$$



найдем, что поле  $A_\mu^3$  остаётся безмассовым (калибровочное поле ненарушенной подгруппы  $U(1)$ ), а поля

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \pm iA_\mu^2) \quad \text{и} \quad h = \phi^3 - v ,$$

приобретают массы

$$m_W = gv , \quad \text{и} \quad m_h = \sqrt{2\lambda}v ,$$

соответственно.

▷ *Задача 1.* Написав в модели (12.4) квадратичное действие для малых возмущений над вакуумом (12.6), убедиться в справедливости сделанных утверждений относительно низкоэнергетического спектра теории.

Мы будем интересоваться статическими конфигурациями вида

$$A_0^a = 0 , \quad A_i^a = A_i^a(\mathbf{x}) , \quad \phi^a = \phi^a(\mathbf{x}) ,$$

с граничными условиями, определяемыми требованием конечности энергии, которая имеет вид

$$E = \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + \frac{1}{2} \mathcal{D}_i \phi^a \mathcal{D}_i \phi^a + \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v^2)^2 \right] . \quad (12.7)$$

На пространственной бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ , где  $r^2 \equiv \mathbf{x}^2$ ) поля принимают вакуумные значения, т.е.  $\phi^a \phi^a = v^2$ ,  $A_\mu^a = 0$  (с точностью до калибровочных преобразований), причём их поведение там ограничено условиями

$$\begin{aligned} F_{ij}^a(r \rightarrow \infty) &\propto r^{-1-\alpha} , & \alpha &> \frac{1}{2} , \\ \mathcal{D}_i \phi^a(r \rightarrow \infty) &\propto r^{-1-\beta} , & \beta &> \frac{1}{2} , \\ [\phi^a \phi^a(r \rightarrow \infty) - v^2] &\propto r^{-1-\gamma} , & \gamma &> \frac{1}{2} , \end{aligned} \quad (12.8)$$

следующими из требования интегрируемости плотности энергии в (12.7). На пространственной бесконечности модуль вектора  $(\phi^1, \phi^2, \phi^3)$  отличен от нуля, не зависит от направления и равен  $v$ . Тем самым этот вектор задаёт отображение сферы  $S_\infty^2$  пространственной бесконечности в сферу  $S_{vac}^2$  внутреннего пространства (пространства всех вакуумов теории, т.е. векторов, удовлетворяющих (12.5)). Поскольку

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z} \neq 0 ,$$

то это отображение может быть нетривиальным, а значит, данная конфигурация — топологически стабильной.

Простейшее нетривиальное отображение получается для асимптотической конфигурации скалярного поля, напоминающей ежа, см. рис. 12.1,

$$\begin{aligned} \phi^a(r \rightarrow \infty) &= vn^a , \\ n^a &\equiv \frac{x^a}{r} , \end{aligned} \quad (12.9)$$

при этом векторное поле должно асимптотически совпадать с

$$A_i^a(\mathbf{x}) = \frac{1}{gr} \epsilon^{aj} n_j , \quad (12.10)$$

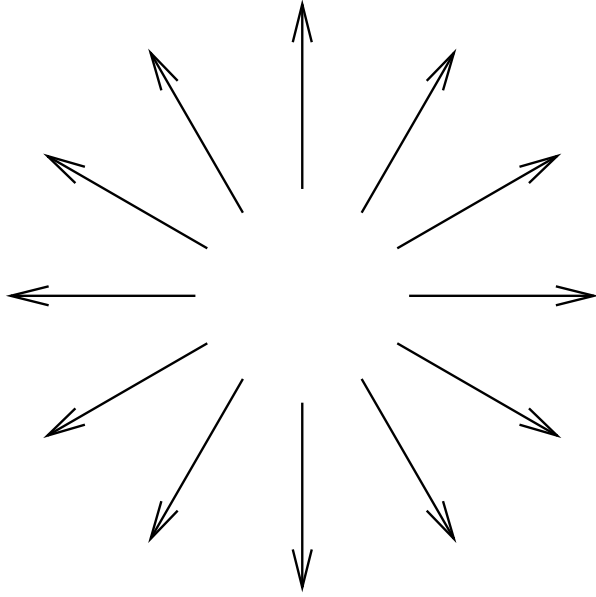


Рис. 12.1: Асимптотика хиггсовского поля монополя. Хиггсовское поле (показано стрелками) направлено во внутреннем пространстве так же, как радиус-вектор в физическом пространстве.

чтобы удовлетворить требованию конечности энергии (12.8). Таким образом, интересующая нас конфигурация может быть описана анзацем

$$\begin{aligned}\phi^a &= vn^a \cdot (1 - f(r)) , \\ A_i^a &= \frac{1}{gr} \epsilon^{aij} n^j (1 - a(r)) .\end{aligned}\quad (12.11)$$

Этот анзац симметричен относительно пространственных вращений, дополненных вращениями во внутреннем пространстве — глобальными  $SU(2)$ -преобразованиями. Функции  $f(r)$  и  $a(r)$  должны удовлетворять требованиям отсутствия сингулярности в начале координат и конечности полной энергии конфигурации, что приводит к граничным условиям

$$\begin{aligned}f(r \rightarrow \infty) &= a(r \rightarrow \infty) = 0 , \\ [1 - f(r \rightarrow 0)] &\propto r^{1+\tilde{\alpha}} , \quad \tilde{\alpha} \geq 0 , \\ [1 - a(r \rightarrow 0)] &\propto r^{2+\tilde{\beta}} , \quad \tilde{\beta} \geq 0 .\end{aligned}$$

▷ *Задача 2. Показать, что анзац (12.11) проходит через уравнения поля модели Джорджи–Глэшоу (12.4). Убедиться, что при  $g \sim \sqrt{\lambda}$  функции  $f(r)$  и  $a(r)$  экспоненциально убывают на пространственной бесконечности.*

Построенная нами конфигурация является примером магнитного монополя. Действительно, для асимптотики (12.10) неабелево электрическое поле равно нулю, а неабелево магнитное поле имеет вид

$$B_i^a = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}^a = \frac{1}{gr^2} n_i n_a . \quad (12.12)$$

Напомним, что в обычной электродинамике магнитное поле вида  $B_i = \frac{1}{g} \frac{n_i}{r^2}$  создавал бы монополи Дирака — магнитный заряд величины  $g_m = \frac{1}{g}$ , расположенный в начале координат. Поэтому полученную нами конфигурацию также называют монополем (точнее, монополем т'Хоофта–Полякова).

Отметим, что в случае малых отклонений полей от вакуумных значений и при выборе калибровки (12.6) магнитным полем, соответствующим ненарушенной подгруппе  $U(1)$ , является поле  $B_i^3$ . В произвольной калибровке такое магнитное поле параллельно во внутреннем пространстве вектору  $\phi^a$  и по величине равно  $(B_i^a \phi^a / v)$ . Используя (12.9), получим, что асимптотика (12.12) соответствует, как и следовало ожидать, магнитному монополю ненарушенной подгруппы  $U(1)$ , причём последнее совпадает с полем монополя Дирака. Массивные хиггсовское и векторные поля экспоненциально убывают вдали от центра монополя. Если отождествить ненарушенную подгруппу  $U(1)$  с группой электромагнетизма, то монополи т'Хоофта–Полякова вдали от их центра выглядят как частицы, обладающие магнитным зарядом.

Для дальнейшего полезно заметить, что наряду с монополями всегда имеются решения типа антимонполей. Они отличаются поведением хиггсовского поля,

$$\phi^a = -vn^a(1 - f(r)) ,$$

а поле  $A_i^a$  — такое же, как для монополя. Магнитное поле  $(B_i^a \phi^a / v)$  имеет противоположный знак по сравнению с полем монополя.

Для моделей с  $m_W \sim m_h$  массу монополя можно найти из размерных соображений, сделав в интеграле (12.7) замену переменных

$$x = (gv)^{-1} \xi , \quad A_\mu^a = v \mathcal{A}_\mu^a , \quad \phi^a = v \varphi^a .$$

В результате энергия (12.7) примет вид

$$E = \frac{m_W}{g^2} \int d^3 \xi \left[ \frac{1}{4} \mathcal{F}_{ij}^a \mathcal{F}_{ij}^a + \frac{1}{2} \mathcal{D}_i \varphi^a \mathcal{D}_i \varphi^a + \frac{m_h^2}{8m_W^2} (\varphi^a \varphi^a - 1)^2 \right] .$$

Поскольку монополярная конфигурация минимизирует функционал энергии, а подынтегральное выражение при  $m_W \sim m_h$  не содержит существенно отличающихся от единицы (больших или малых) параметров, то массу монополя можно оценить как

$$m_M \simeq \frac{4\pi m_W}{g^2} = \frac{4\pi v}{g} ,$$

где фактор  $4\pi$  соответствует интегрированию по углам. Таким образом, масса монополя превышает энергетический масштаб  $v$ , характеризующий нарушение симметрии  $SU(2) \rightarrow U(1)$ .

Сформулируем необходимое условие существования монополей в калибровочных теориях общего вида. Пусть лагранжиан теории инвариантен относительно калибровочной группы  $G$ , а основное состояние инвариантно лишь относительно группы  $H$ , являющейся подгруппой  $G$ ,  $H \subset G$ . Многообразие  $\mathcal{M}$  эквивалентных вакуумов в такой теории представляет собой фактор-пространство  $G/H$  (предполагается, хотя это и не необходимо, что группа  $G$  действует на многообразии  $\mathcal{M}$  транзитивно, т.е. все вакуумы связаны между собой преобразованием симметрии). Стабильные монополярные конфигурации — дефекты пространственно-временной размерности  $0+1$  — возможны, если многообразие вакуумов теории  $\mathcal{M}$  содержит нестягиваемые сферы, т.е. вторая гомотопическая группа этого многообразия нетривиальна,

$$\pi_2(G/H) \neq 0 .$$

Если калибровочная группа  $G$  — простая или полупростая (калибровочные группы всегда компактны), а  $H$  включает в себя одну фактор-группу  $U(1)$ , то

$$\pi_2(G/H) = \pi_1(H) = \mathbb{Z} ,$$

так что монополи в таких моделях всегда существуют. В Стандартной модели  $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ,  $H = SU(3) \times U(1)$  и  $\pi_2(G/H) = 0$ ; таким образом, в Стандартной модели монополей нет. Иная ситуация имеет место в теориях Большого объединения: там калибровочная группа, как правило, — простая (реже — полупростая), а нарушается она при высоких энергиях до  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$ , а в конечном итоге — до  $SU(3)_c \times U(1)_{em}$  (примером служит теория  $SU(5)$ , рассмотренная в разделе 11.2.2).

Существование магнитных монополей является общим свойством теорий Большого объединения. В контексте теорий Большого объединения монополи имеют массы порядка  $m_M \sim 10^{16}$  ГэВ и образуются при фазовом переходе Большого объединения, т.е. при температуре  $T_c \sim 10^{16}$  ГэВ. Это верно, конечно, в предположении, что такие температуры достигались в ранней Вселенной.

### 12.2.2 Механизм Киббля

Обсудим на примере монополей т'Хоофта–Полякова в модели Джорджи–Глэшоу, как работает механизм Киббля. При высоких температурах среднее хиггсовского поля равно нулю, среда находится в фазе с ненарушенной симметрией, и монополей не существует. В результате фазового перехода хиггсовское поле становится отличным от нуля. На расстоянии больше корреляционной длины  $l_{cor}$  направления хиггсовского поля сразу после фазового перехода никак не скоррелированы. В результате во Вселенной имеются как области с хиггсовским полем, направленным так, как изображено на рис. 12.2а, так и области с конфигурациями хиггсовского поля, изобра-

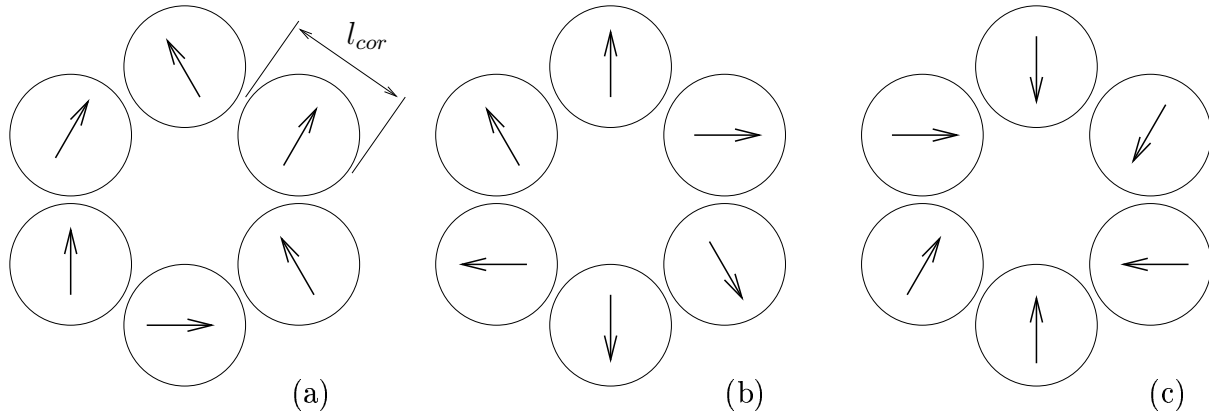


Рис. 12.2: Возможные конфигурации хиггсовского поля сразу после фазового перехода. Обведены области с линейными размерами порядка  $l_{cor}$ .

жёнными на рис. 12.2b и 12.2c. Конфигурация рис. 12.2а топологически тривиальна, и в результате дальнейшей эволюции она релаксирует к состоянию без монополя. Конфигурация рис. 12.2b имеет топологию ежа (ср. с рис. 12.1); в результате её эволюции в системе образуется монополю. Из конфигурации рис. 12.2c в конечном итоге образуется антимонополю. Вероятности реализации всех трёх типов конфигураций примерно одинаковы (а для рис. 12.2b и 12.2c в точности равны), поэтому концентрации монополей и антимонополей сразу после фазового перехода можно оценить как

$$n_M = n_{\bar{M}} \sim \frac{1}{l_{cor}^3}.$$

Образование хиггсовского конденсата заведомо происходит независимым образом на расстояниях, превышающих размер космологического горизонта, откуда и следует упоминавшееся в разделе 12.1 ограничение

$$l_{cor} \lesssim H^{-1}(T_c).$$

Таким образом, концентрация монополей, образованных за счёт механизма Киббля, действительно оценивается формулой (12.3).

### 12.2.3 Остаточная концентрация: проблема монополей

При температурах ниже температуры фазового перехода, сопровождаемого образованием монополей, последние являются (или быстро становятся) нерелятивистскими

объектами, и в расширяющейся Вселенной ведут себя как пыль: плотность монополей падает как

$$n_M(t) \propto a^{-3}(t) .$$

(здесь мы пренебрегаем аннигиляцией монополей и антимонполей, см. ниже). Это означает, в частности, что отношение плотности монополей к плотности энтропии во Вселенной, которая изменяется с масштабным фактором по тому же закону (см. (5.36)) остаётся почти неизменным,

$$\frac{n_M(t)}{s(t)} = \text{const} .$$

Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы оценить современный вклад монополей в плотность энергии во Вселенной. По-прежнему пренебрегая возможной аннигиляцией монополей и антимонполей, будем иметь

$$\begin{aligned} \rho_{M,0} &= m_M n_{M,0} = m_M \frac{n_{M,T_c}}{s(T_c)} \cdot s_0 = 4.57 \sqrt{g_*} \cdot m_M \frac{T_c^6}{M_{Pl}^3} \frac{g_0^* T_0^3}{T_c^3} \\ &\sim 10^{12} \frac{m_M}{10^{16} \text{ ГэВ}} \left( \frac{T_c}{10^{16} \text{ ГэВ}} \right)^3 \sqrt{\frac{g_*}{10^2}} \text{ ГэВ см}^{-3} , \end{aligned} \quad (12.13)$$

где мы учли выражение (5.31) для плотности энтропии горячей Вселенной. Для типичных энергетических масштабов теорий Большого объединения,  $T_c \sim m_M \sim 10^{16}$  ГэВ, получившаяся плотность энергии более чем на 17 порядков превосходит критическую плотность  $\rho_c \sim 10^{-5}$  ГэВ см<sup>-3</sup>. В этом состоит проблема монополей: полученный результат означает, что либо по тем или иным причинам в ранней Вселенной не происходило рождение монополей (например, на горячей стадии температуры не достигали значений  $T_c \sim 10^{16}$  ГэВ), либо топология пространства вакуумов фундаментальной теории не подразумевает существования монополей. Последняя возможность не совместима с идеей Большого объединения.

Учёт возможной аннигиляции монополей и антимонполей не изменяет на качественном уровне вывода о том, что фазовые переходы с образованием монополей в горячей Вселенной должны быть запрещены. Убедимся в этом.

Нерелятивистский монополь, двигаясь в плазме заряженных релятивистских частиц, испытывает эффективную силу трения, вызванную электромагнитным взаимодействием с частицами плазмы. Величину этой силы можно оценить как  $f \sim n(T) \cdot \sigma \cdot \Delta p$ , где  $n(T)$  — плотность взаимодействующих с монополем частиц плазмы,  $\sigma \sim \alpha g_m^2 / T^2$  — сечение взаимодействия, и  $\Delta p \sim T v_M$  — импульс, отбираемый у монополя, движущегося со скоростью  $v_M \ll 1$ . Таким образом,  $f = -\kappa T^2 v_M$ , где  $\kappa \sim \alpha g_m^2 g_* \sim g_*$ . Записав второй закон Ньютона для монополя (расширением Вселенной пока пренебрегаем),

$$m_M \frac{dv_M}{dt} = -\kappa T^2 v_M ,$$

найдем, что за время  $t_M \sim m_M / (\kappa T^2)$  монополь существенно меняет свою скорость за счёт взаимодействий в плазме. Это время свободного пробега всегда много меньше хаббловского времени  $M_{Pl}^* / T^2$ , поэтому монополи эффективно взаимодействуют с плазмой и, следовательно, движутся с “температурной” скоростью  $v_M \sim v_T = \sqrt{T/m_M}$ . Длина свободного пробега монополя в плазме равна

$$l_M \sim v_T \cdot t_M = \frac{1}{\kappa T} \sqrt{\frac{m_M}{T}} .$$

Видно, что длина свободного пробега монополя мала при высоких температурах.

Эффективная аннигиляция монополей и антимонполей могла происходить на ранних этапах эволюции Вселенной, когда длина свободного пробега монополей в плазме была мала. Нерелятивистские монополь и антимонполь сближаются благодаря силе электромагнитного притяжения, а взаимодействие с плазмой позволяет уменьшить их относительную скорость и сформировать *монополоний* — связанное состояние, которое в дальнейшем аннигилирует в обычные частицы (аналог позитрония). Именно так, в две стадии, и происходит аннигиляция монополей в ранней Вселенной.

Связанное состояние будет образовано, если энергия электромагнитного взаимодействия монополь-антимонпольной пары превысит по величине температуру, т.е. при  $r \lesssim r_0 = g_m^2/T$ . Отсюда получим для эффективного сечения образования монополония и, следовательно, аннигиляции монополей<sup>5</sup>,

$$\sigma_{\text{анн}} \sim r_0^2 \equiv g_m^4/T^2.$$

Эта оценка справедлива при высоких температурах, когда длина свободного пробега  $l_M$  мала по сравнению с  $r_0$ ; в противном случае монополоний не образуется, и аннигиляция идёт медленно.

При высоких температурах концентрация монополей поддерживается такой, что время свободного пробега монополя по отношению к аннигиляции примерно равно хаббловскому времени, т.е.

$$\sigma_{\text{анн}} n_M v_M \sim \frac{T^2}{M_{Pl}^*}.$$

Вспоминая, что монополи имеют тепловую скорость  $v_M \sim v_T \sim \sqrt{T/m_M}$ , получим отсюда

$$\frac{n_M}{s} \cdot g_* g_m^4 \frac{M_{Pl}^*}{\sqrt{m_M T}} \sim 1, \quad (12.14)$$

где мы учли, что  $s \sim g_* T^3$ . Видно, что за счёт аннигиляции отношение  $n_M/s$  падает с уменьшением температуры. Этот режим имеет место до тех пор, пока выполняется условие  $l_M \ll r_0$ , и при  $l_M \sim r_0$  аннигиляция прекращается. Из последнего условия получаем температуру закалки,

$$T_f \sim \frac{m_M}{g^4 \kappa^2}.$$

Концентрацию монополей в этот момент найдём из (12.14),

$$\frac{n_M}{s} \sim \frac{1}{\kappa g_m^6} \frac{m_M}{M_{Pl}^* g_*}.$$

Это отношение сохраняется до нашего времени; подставляя  $g_m^2 \sim \alpha^{-1} \sim 100$ ,  $\kappa \sim g_* \sim 100$ , имеем для современной плотности массы монополей,

$$\rho_{M,0} = m_M \cdot \frac{n_M}{s} \cdot s_0 \sim 10^7 \cdot \left( \frac{m_M}{10^{16} \text{ ГэВ}} \right)^2 \text{ ГэВ см}^{-3}.$$

Эта величина значительно меньше, чем вклад монополей без учёта аннигиляции (12.13), однако она всё равно слишком велика в случае теорий Большого объединения, где для массы монополя имеется оценка  $m_M \sim 10^{16} \text{ ГэВ}$ .

---

<sup>5</sup>В простых моделях время аннигиляции монополония оказывается заметно меньше хаббловского времени, определяющего темп расширения Вселенной, поэтому момент образования монополония можно считать совпадающим с моментом аннигиляции монополя и антимонполя в частицы.

Исторически, указанная проблема монополей была сильным аргументом против экстраполяции теории горячей Вселенной в область температур выше  $10^{16}$  ГэВ. Этот аргумент был (и сейчас является) одним из доводов в пользу инфляционной теории.

▷ *Задача 3. Найти температуру в воображаемой Вселенной, в которой при температуре  $T \sim 10^{16}$  ГэВ образовались монополи с массой  $m_M \sim 10^{16}$  ГэВ, а параметр Хаббла принимает значение, характерное для наблюдаемой Вселенной.*

## 12.3 \*Космические струны

### 12.3.1 Струнные конфигурации

Минимальная модель, в которой имеются топологические дефекты размерности один — космические струны, — это абелева модель Хиггса<sup>6</sup> с лагранжианом

$$\mathcal{L} = D^\mu \phi^* D_\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \lambda \left( \phi^* \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2, \quad (12.15)$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ie A_\mu \phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

где  $\phi$  — комплексное скалярное поле,  $A_\mu$  — калибровочное поле группы  $U(1)$ . Лагранжиан (12.15) инвариантен относительно  $U(1)$  калибровочных преобразований

$$\phi \rightarrow \phi e^{i\alpha(x)}, \quad \phi^* \rightarrow \phi^* e^{-i\alpha(x)}, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x).$$

В теории (12.15) имеет место спонтанное нарушение симметрии: вакуумы теории, определяемые из условия минимума скалярного потенциала, описываются равенством

$$|\langle \phi \rangle|^2 = \frac{v^2}{2} \quad (12.16)$$

и нарушают симметрию  $G = U(1)$  полностью ( $G \rightarrow H$ ,  $H = I$ ). Многообразие эквивалентных вакуумов теории описывается уравнением (12.16) и представляет собой окружность  $S^1$  (это соответствует соотношению  $G/H = U(1)$ ),

$$\langle \phi \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\alpha}, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

Спектр теории найдём, как обычно, представив лагранжиан (12.15) в виде разложения в ряд Тейлора вокруг вакуумного значения полей  $\phi^{vac} = \langle \phi \rangle$ ,  $A_\mu^{vac} = 0$  в калибровке  $\text{Im} \phi = 0$ , т.е.  $\phi = v/\sqrt{2} + h$  с действительным  $h$ . Квадратичная по возмущениям часть лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial_\mu h - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu.$$

Таким образом, в результате спонтанного нарушения симметрии все поля становятся массивными: в модели имеются вещественные векторное и скалярное поля с массами

$$M_V = ev \quad \text{и} \quad M_\phi = \sqrt{2\lambda}v,$$

<sup>6</sup>В моделях с глобальной абелевой группой симметрии возможно образование глобальных струн.

соответственно.

В горячей Вселенной при температурах  $T \gg v$  как действительная, так и мнимая компоненты комплексного поля  $\phi$  принимают разные значения в различных точках пространства: случайная фаза  $\alpha(\mathbf{x})$ , определённая в каждой точке формально как  $\arctg[\text{Re}\phi/\text{Im}\phi]$ , распределена равномерно. В момент фазового перехода при некоторой температуре  $T_c$  хиггсовское поле приобретает ненулевое среднее, и значения  $\alpha(\mathbf{x})$  фиксируются. Они оказываются, вообще говоря, разными в различных точках, однако поскольку в полную энергию конфигурации даёт вклад и градиентный член, то с последующим охлаждением плазмы конфигурация стремится стать более однородной. В конечном итоге фазы  $\alpha(\mathbf{x})$  могут полностью сравняться во всём объёме горизонта, однако такого может и не произойти: при обходе по окружности фаза поля  $\phi$  может измениться. Однозначность поля требует лишь, чтобы при полном обходе вдоль любого замкнутого контура  $C$  фаза поля  $\phi$  изменялась бы на величину, кратную  $2\pi$ ,

$$\Delta\alpha = \oint_C \frac{d\alpha}{d\theta} d\theta = 2\pi N, \quad (12.17)$$

где  $\theta$  — азимутальный угол в физическом пространстве. Конфигурации с  $N \neq 0$  получили название струн, а описанный механизм их образования является не чем иным, как механизмом Киббла. Космическая струна вновь может быть проиллюстрирована рис. 12.1, однако теперь плоскость рисунка — это плоскость, перпендикулярная струне, а стрелки изображают вектора в двумерном внутреннем пространстве  $(\text{Re}\phi, \text{Im}\phi)$ . С этим уточнением механизм Киббла вновь иллюстрируется рис. 12.2; он приводит к образованию порядка одного участка струны длины  $l_{cor}$  в объёме  $l_{cor}^3$ .

Непрерывность поля  $\phi$  гарантирует, что струны должны быть либо замкнутыми, либо бесконечными — открытыми струнами с концами, уходящими за горизонт<sup>7</sup>. Непрерывность поля  $\phi$  гарантирует также зануление  $\phi$  на некоторой линии, проходящей внутри контура  $C$ , по которому ведётся интегрирование в (12.17). Это означает, что вдоль этой линии поле  $\phi$  по-прежнему находится в ненарушенной фазе,  $\langle\phi\rangle = 0$ , а значит, локально вблизи этой линии (сердцевины струны) рассмотренная нами конфигурация сохраняет большую плотность энергии,  $\mathcal{E} \sim v^4$ .

Итак, в абелевой модели Хиггса (12.15) образуются одномерные топологические дефекты — струны. Они представляют собой нетривиальные полевые конфигурации, удовлетворяющие на пространственной бесконечности условию минимума скалярного потенциала (12.16), но имеющие для  $\phi$  и  $A_\mu$  нетривиальную зависимость от угловых переменных. В частном случае бесконечной прямой струны, направленной вдоль оси  $z$ , полевая конфигурация не зависит от  $z$  и имеет нетривиальные асимптотики на пространственной бесконечности в плоскости  $(x, y)$  (здесь и далее мы опускаем произвольную постоянную фазу в значении вакуумного среднего поля  $\phi$ , поскольку её всегда можно обнулить переопределением полей),

$$\phi \rightarrow \frac{v}{\sqrt{2}} e^{iN\theta}, \quad A_\mu \rightarrow \frac{N}{e} \partial_\mu \theta, \quad (12.18)$$

где  $\theta$  — полярный угол цилиндрической системы координат, ориентированной вдоль оси  $z$ , а  $N$  — целое число, определяющее число накруток (оборотов) во внутреннем

---

<sup>7</sup>По этой причине от космических струн, если они есть во Вселенной, довольно трудно “избавиться”.



пространстве ( $\mathcal{M} = G/H = S^1$ ) на каждый оборот в физическом пространстве (на плоскости  $(x, y)$ ). Число намоток  $N$  является топологическим инвариантом. Выписанная в (12.18) асимптотика поля  $A_\mu$  выбирается таким образом, что асимптотически, при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ , выполняется

$$D_\mu \phi \rightarrow 0, \quad F_{\mu\nu} \rightarrow 0,$$

так что физических полей вдали от струны нет, и энергия струны (на единицу длины) конечна.

Сформулируем необходимые условия существования струнных дефектов в калибровочных теориях общего вида. Пусть лагранжиан теории инвариантен относительно группы калибровочной симметрии  $G$ , а основное состояние инвариантно лишь относительно группы  $H$ , являющейся подгруппой  $G$ . Многообразие  $\mathcal{M}$  эквивалентных вакуумов в такой теории как правило совпадает с  $G/H$ . Существование  $(1+1)$ -мерных пространственно-временных полевых конфигураций — космических струн — возможно, если многообразие вакуумов  $\mathcal{M}$  не является односвязным, т.е. содержит нестягиваемые петли — нетривиальные отображения одномерной сферы (окружности) в пространство вакуумов. Поэтому необходимым, хотя и не достаточным условием существования стабильных струн является нетривиальность первой гомотопической группы многообразия вакуумов теории

$$\pi_1(G/H) \neq 0, \quad (12.19)$$

т.е. многосвязность пространства вакуумов  $\mathcal{M}$ .

Хотя в общем случае аналитического решения уравнений поля с асимптотикой (12.18) не существует, известны приближения, на качественном уровне хорошо согласующиеся с численными результатами. Для получения приближённого вида полевых конфигураций используют следующий анзац, согласующийся с асимптотическим поведением (12.18),

$$\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} (1 - f(\rho)) e^{iN\theta}, \quad A_i = -\frac{N \epsilon_{ij} x^j}{e\rho} (1 - a(\rho)), \quad i, j = 1, 2, \quad (12.20)$$

где  $\rho = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$  — радиальная координата на плоскости  $(x, y)$ . Поскольку при больших  $\rho$  поля струнной конфигурации должны выходить на асимптотики (12.18), то для функций  $f(\rho)$ ,  $a(\rho)$  будем иметь

$$f(\rho \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad a(\rho \rightarrow \infty) \rightarrow 0.$$

Как мы уже отмечали, фаза поля  $\phi$  изменяется на  $2\pi N$  после полного оборота вокруг оси  $z$ ,

$$\Delta\alpha = \oint \frac{d(N\theta)}{d\theta} d\theta = 2\pi N,$$

при этом для потока магнитного поля  $\mathbf{B} = [\nabla, \mathbf{A}]$  вдоль струны (т.е. вдоль оси  $z$ ) получим

$$\int \mathbf{B} ds = \oint A_\theta d\theta = \frac{2\pi}{e} N.$$

Как мы увидим ниже (см. (12.21) и (12.22)), такое квантование магнитного потока вдоль струны обеспечивает конечность натяжения струны (линейной плотности энергии): лидирующие по  $1/\rho$  вклады от производной скалярного поля и от слагаемого  $\phi A_\theta$  взаимно сокращаются.

При малых  $\rho$  поля  $\phi$  и  $A^\mu$  постепенно уменьшаются и обращаются в нуль при  $\rho = 0$ . Отсюда для функций  $f(\rho)$ ,  $a(\rho)$  получим единичные асимптотики в нуле,

$$f(\rho \rightarrow 0) \rightarrow 1 \quad a(\rho \rightarrow 0) \rightarrow 1.$$

Такое поведение обеспечивает гладкость всей конфигурации при  $\rho \rightarrow 0$ . Зануление поля означает, что сердцевина струны образует область с ненарушенной  $U(1)$  симметрией. В теории твёрдого тела такие струны называют вихрями Абрикосова — это трубки магнитного потока в сверхпроводниках. В физике частиц обсуждаемые решения называют струнами Абрикосова–Нильсена–Олесена, или просто космическими струнами.

Оценим энергию, приходящуюся на единицу длины струны (натяжение). Поступая так же, как в случае монополя, запишем

$$\begin{aligned} \mu = \frac{dE}{dz} &= \int d^2x \left[ D_i \phi^* D_i \phi + \frac{1}{4} F_{ij}^2 + \lambda \left( \phi^* \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \right] \\ &= v^2 \int d^2\xi \left[ D_i \varphi^* D_i \varphi + \frac{1}{4} \mathcal{F}_{ij}^2 + \frac{\lambda}{e^2} \left( \varphi^* \varphi - \frac{1}{2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (12.21)$$

где сделана замена переменных  $\phi = v\varphi$ ,  $x = (ev)^{-1}\xi$ ,  $A_i = v\mathcal{A}_i$  и введены обозначения

$$D_j \varphi = (\partial_j - i\mathcal{A}_j) \varphi, \quad (12.22)$$

$$\mathcal{F}_{ij} = \partial_i \mathcal{A}_j - \partial_j \mathcal{A}_i. \quad (12.23)$$

. Отсюда следует оценка для натяжения

$$\mu \sim \pi v^2, \quad (12.24)$$

если  $N \sim 1$  и  $\lambda \sim e^2$ . Отсюда также следует, что толщина струны, т.е. размер области, где плотность энергии отлична от нуля, оценивается как  $\xi \sim 1$ , т.е.  $\rho \sim (ev)^{-1}$ . Для специального случая  $M_\phi = M_A$  оказывается, что струнная конфигурация  $A_\mu(x^1, x^2)$ ,  $\phi(x^1, x^2)$  является решением уравнений первого порядка, которые можно получить, несколько преобразовав выражение для натяжения струны. При этом интегралы, входящие в (12.21) можно вычислить аналитически, получив в результате

$$\mu = \pi v^2, \quad (12.25)$$

что подтверждает оценку (12.24).

▷ **Задача 4.** Выразить в кг/см плотность энергии струны при  $v \sim 10^{16}$  ГэВ.

Сравнить массу Земли с массой струны, опоясывающей Землю по экватору.

Стабильность асимптотик типа (12.18) обеспечивается топологией:

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \neq 0,$$

причём параметр  $N \in \mathbb{Z}$  как раз определяет число намоток при отображении пространственной асимптотики полевой конфигурации в многообразие вакуумов теории,  $S^1$ . В то же время асимптотики типа (12.18) не обеспечивают единственности решения с  $|N| > 1$ : эти асимптотики одинаковы для одного вихря с намоткой  $N$  и для  $N$  вихрей с единичной намоткой. В зависимости от параметров модели, те или иные конфигурации могут быть предпочтительнее. При  $M_A < M_\phi$  струнам с  $N > 1$  энергетически выгодно распадаться в  $N = 1$  струны, а при  $M_A > M_\phi$ , наоборот, выгоден процесс слияния вихрей (в теории сверхпроводимости эти случаи

соответствуют сверхпроводникам второго и первого рода). В то же время, в ранней Вселенной образование струн с  $|N| > 1$  подавлено: в результате фазового перехода образуются в основном струны с  $|N| = 1$ .

Чтобы понять, какое влияние оказывают космические струны на геометрию пространства, найдём тензор энергии-импульса струны. В общем случае для лагранжиана (12.15) имеем:

$$T_{\mu\nu} = -\mathcal{L}g_{\mu\nu} + D_\mu\phi^*D_\nu\phi - F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho}g^{\lambda\rho},$$

что для конфигурации (12.20) даёт

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 0, 0, -1) \cdot \mathcal{L}. \quad (12.26)$$

Отметим, что как конфигурация (12.20), так и тензор энергии импульса (12.26) инвариантны относительно лоренцевых бустов вдоль струны. Ясно, что в такой ситуации перемещение всей конфигурации (как “единого объекта”) вдоль направления струны нефизично.

В дальнейшем нас будут интересовать масштабы расстояний  $l \gg (ev)^{-1}$ , т.е. много большие толщины струны. При изучении таких масштабов тензор энергии-импульса (12.26) можно положить равным

$$T_{\mu\nu} = \mu \cdot \text{diag}(1, 0, 0, -1) \delta(x)\delta(y), \quad (12.27)$$

где  $\mu$  является натяжением и с точностью до численного множителя (зависящего от безразмерных параметров  $N$  и  $\lambda/e^2$ ) определяется выражением (12.24). Приближение (12.27) называют приближением бесконечно тонкой струны, и для изучения основных гравитационных и космологических эффектов, связанных со струнами, этого приближения нам будет вполне достаточно.

▷ *Задача 5. Получить с точностью до численного коэффициента тензор энергии-импульса бесконечной прямой струны (12.27), исходя из соображений размерности, цилиндрической симметрии, сохранения тензора-энергии импульса и требований лоренц-инвариантности относительно бустов вдоль струны и локализованности энергии.*

В тензоре энергии-импульса струны (12.27) лишь две компоненты отличны от нуля: плотность энергии  $T_{00}$  и давление вдоль струны  $T_{33}$ . Энергия и давление совпадают по величине, но оказываются разного знака. Этот факт указывает на то, что мы имеем дело с релятивистским объектом, для исследования гравитационных свойств которого нельзя ограничиваться лишь ньютоновским приближением. Тем не менее можно думать, что вдали от струны метрика пространства-времени близка к плоской, и поэтому можно использовать уравнение для статического скалярного ньютонова потенциала  $\Phi$ , определённого во внешней метрике Минковского соотношением

$$g_{00} = \eta_{00} + 2\Phi.$$

Это уравнение имеет вид (см. (A.112), (A.114))

$$\Delta\Phi = 8\pi G \left( T_{00} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \right) = 4\pi G (T_{00} + T_{11} + T_{22} + T_{33}). \quad (12.28)$$

Для источника (12.27) ньютонов потенциал равен нулю, поскольку уравнение (12.28) принимает вид однородного уравнения Лапласа:

$$\Delta\Phi = 4\pi G (T_{00} + T_{11} + T_{22} + T_{33}) = 0. \quad (12.29)$$

Это означает, что вне сердцевины струны ньютоновское гравитационное поле отсутствует. Прямые покоящиеся струны гравитационно не отталкивают и не притягивают ни пыль, ни друг друга! Другими словами, с точки зрения гравитации, струны и нерелятивистская материя находятся в безразличном равновесии, т.е. такая конфигурация гравитационно стабильна. Мы подробно обсудим геометрию пространства в присутствии бесконечной прямой струны в разделе 12.3.3.

Мы обсуждаем здесь бесконечные прямые струны. Для искривлённых струн, или струн с рябью, тензор энергии импульса на расстояниях, много больших характерных линейных размеров ряби, можно также считать локализованным вдоль одной линии, однако плотности энергии  $T_{00}$  и давление вдоль струны  $T_{33}$  у такого эффективного тензора уже не будут совпадать по величине,  $|T_{00}| \neq |T_{33}|$ . При этом плотность энергии  $T_{00}$  будет несколько больше плотности энергии прямой струны  $\mu$ , поскольку с точки зрения удалённого наблюдателя на одной и той же единице длины “укладывается” больший отрезок струны с рябью, чем отрезок прямой струны. По той же причине натяжение струны с рябью  $T_{33}$  будет по величине меньше натяжения  $\mu$ , причём между натяжениями и плотностями энергий этих струн будет выполняться соотношение,  $\mu^2 = T_{00} \cdot |T_{33}|$ . Поскольку для искривлённых струн  $|T_{00}| \neq |T_{33}|$ , правая часть в уравнении для ньютонова потенциала (12.29) будет отлична от нуля: струны с рябью создают статическое гравитационное поле.

В процессе эволюции струна замечает, вообще говоря,  $1+1$ -мерное многообразие в пространстве-времени — мировую поверхность. Действие для тонкой космической струны определяется как площадь мировой поверхности струны (по аналогии с тем, как действие для частицы — точечного объекта — определено как длина мировой линии):

$$S = -\mu \int \sqrt{-\gamma} d^2\xi, \quad \xi^\alpha = (\tau, \sigma), \quad (12.30)$$

где  $\tau$  — собственное время,  $\sigma$  — координата точки на струне,  $X^\mu = X^\mu(\sigma, \tau)$  — уравнение мировой поверхности, а

$$\gamma \equiv \det(\gamma_{\alpha\beta}), \quad \text{и} \quad \gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu(\tau, \sigma) \partial_\beta X^\nu(\tau, \sigma) g_{\mu\nu}$$

— индуцированная метрика на струне. Это действие называется действием Намбу–Гото, и оно хорошо описывает динамику космических струн за исключением точек их пересечений, где становится существенной ненулевая толщина струны.

Действие Намбу–Гото можно получить как главное приближение к эффективному действию для движущейся искривлённой космической струны в абелевой модели Хиггса (12.15). Чтобы вывести это действие, надо найти (приблизённо) вид струнной конфигурации, подставить его в действие (12.15) и произвести интегрирование по поперечным к струне координатам.

Введём  $\xi^0$  и  $\xi^1$  как, соответственно, времениподобную и пространственноподобную координаты на пространственно-временном многообразии  $X^\mu(\xi)$  — мировой поверхности — где хиггсовское поле  $\phi$  принимает нулевое значение. Если кривизна струны мала по сравнению с её толщиной, то вблизи каждой точки  $X^\mu(\xi)$  хорошим приближением к струнному решению будет статическая струнная конфигурация вида (12.20), обобщённая на случай ненулевой поперечной скорости. В любой точке на мировой поверхности можно выбрать два пространственноподобных вектора (нормали к мировой поверхности)  $e_\mu^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , ортонормированных,  $e_\mu^{(\alpha)} e_\nu^{(\beta)} g^{\mu\nu} = -\delta^{\alpha\beta}$ , и ортогональных к тангенциальным к мировой поверхности векторам  $\partial X^\mu / \partial \xi^\beta$ , т.е.  $e_\mu^{(\alpha)} \partial X^\mu / \partial \xi^\beta = 0$ . Координату любой точки  $x^\mu$ , близкой к мировой поверхности  $X^\mu(\xi)$ , можно теперь представить в виде

$$x^\mu \equiv x^\mu(\zeta) = X^\mu(\xi) + \sum_{\alpha=1}^2 e^{(\alpha)\mu}(\xi) \eta^\alpha, \quad \zeta = (\xi^0, \xi^1, \eta^1, \eta^2),$$

где мы ввели две новые координаты  $\eta^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ ; в случае прямой струны они параметризуют точки в перпендикулярной к струне плоскости. Новые координаты  $\zeta^\mu$  будут однозначно определёнными, если расстояние от точки  $x^\mu$  до мировой поверхности струны меньше, чем её радиус кривизны. Якобиан перехода от координат  $x^\mu$  к координатам  $\zeta^\mu$  имеет вид

$$\sqrt{-g} \cdot \det \left( \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) = \sqrt{-\det \left( g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^\rho} \right)} \approx \sqrt{-\gamma} + \dots, \quad (12.31)$$

причём в разложении мы учли только слагаемые, не подавленные обратным радиусом кривизны струны.

В новых координатах для струнной полевой конфигурации будем иметь:

$$\phi(x(\zeta)) = \phi^{(s)}(\eta^1, \eta^2) \quad A^\mu(x(\zeta)) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} e^{(\alpha)\mu} A_\alpha^{(s)}(\eta^1, \eta^2),$$

где функции с индексами  $(s)$  — это функции двух пространственных координат, определяющие решение для прямой струны, ортогональной плоскости  $(x_1, x_2)$  (см анзац (12.20), при этом место переменных  $x_1, x_2$  займут переменные  $\eta^1, \eta^2$ ). В лидирующем порядке по обратной кривизне струны получим также

$$D_\mu \phi^* D^\mu \phi \approx D_\mu \phi^{(s)*} D^\mu \phi^{(s)}, \quad F_{\mu\nu}^2 \approx F_{(s)\mu\nu}^2, \quad V(\phi) \approx V(\phi^{(s)}). \quad (12.32)$$

Окончательно, подставляя в действие модели (12.15) якобиан (12.31) и выражения (12.32), и интегрируя по “поперечным” координатам  $\eta^\alpha$ , получим действие Намбу–Гото (12.30).

▷ *Задача 6.* Убедиться, что к действию Намбу–Гото (12.30) не появляется поправок, линейных по отношению толщины струны к её кривизне.

### 12.3.2 Газ космических струн

Бесконечные струны, пересекаясь в ходе эволюции, приводят к появлению замкнутых струн конечной длины  $R$ . Такие струны стремятся уменьшить свою длину, что достигается: (i) в результате самопересечений, когда образуются струны меньшей длины, (ii) вследствие излучения гравитационных волн. Вдали от замкнутой струны создаваемое ею гравитационное поле совпадает с полем точечной частицы массы  $M_s = 2\pi R\mu$ . Поэтому в пренебрежении диссипацией энергии струн, космология газа замкнутых струн (с  $R \ll l_H$ ) совпадает либо с космологией фотонного газа, если замкнутые струны движутся со скоростями близкими к скорости света, либо с космологией тёмной материи, если струны движутся медленно. Более реалистичная ситуация, в которой диссипационные процессы важны, будет рассмотрена в конце этого раздела.

Иначе выглядит космология газа бесконечных струн. В дальнейшем мы воспользуемся приближением идеального газа: космические струны<sup>8</sup>, удалённые друг от друга на расстояние, много большее их толщины, взаимодействуют посредством полей  $A_\mu$  и  $\phi$  экспоненциально слабо.

▷ *Задача 7.* Доказать сделанное утверждение.

Гравитационное взаимодействие между удалёнными струнами также можно считать несущественным.<sup>9</sup> Чтобы определить уравнение состояния газа бесконечных струн, рассмотрим конфигурацию из  $N$  покоящихся струн, параллельных оси  $z$  и удалённых друг от друга в среднем на расстояние  $L$ , заметно превышающее толщину струны. Тензор энергии-импульса такой конфигурации имеет вид:

$$T_{\mu\nu}^{(0)}(x, y) = \mu \cdot \text{diag}(1, 0, 0, -1) \cdot \sum_i^N \delta(x - x_i) \delta(y - y_i).$$

<sup>8</sup>Речь идёт о струнах Абрикосова–Нильсена–Олесена. Для глобальных струн ситуация иная.

<sup>9</sup>Отметим, что для реалистичного случая газа из искривлённых струн с некоторым количеством (само)пересечений используемое нами приближение также хорошо работает, если можно пренебречь диссипацией энергии струн, возникающей вследствие образования замкнутых струн и излучения гравитационных волн.

В пределе большого числа струн получим для усреднённого тензора энергии-импульса

$$\langle T_{\mu\nu}^{(0)} \rangle = \frac{\int T_{\mu\nu}^{(0)}(x, y) dx dy}{\int dx dy} = \frac{\mu}{L^2} \cdot \text{diag}(1, 0, 0, -1) . \quad (12.33)$$

Это — тензор энергии-импульса для статической конфигурации. Пусть теперь струны движутся со скоростью  $u$  относительно покоящегося наблюдателя в положительном направлении вдоль оси  $x$ . Тензор энергии-импульса для такой конфигурации можно получить из (12.33) посредством соответствующего преобразования Лоренца<sup>10</sup> — буста вдоль оси  $x$  со скоростью  $u$ ,

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(u_x)} = \frac{\mu}{L^2} \begin{pmatrix} \gamma^2 & \gamma^2 u & 0 & 0 \\ \gamma^2 u & \gamma^2 u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} .$$

Усредняя по направлениям буста, опустим линейные по скорости элементы в  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(u_x)}$ . Рассматривая аналогично конфигурацию струн, движущихся вдоль оси  $y$ , и усредняя по обеим осям (напоминаем, что для рассмотренной нами конфигурации струн, параллельных оси  $z$ , движение вдоль оси  $z$  нефизично), получим

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle^{(u_{xy})} = \frac{\mu}{L^2} \cdot \text{diag} \left( \gamma^2, \frac{\gamma^2 u^2}{2}, \frac{\gamma^2 u^2}{2}, -1 \right) .$$

Наконец, повторяя всю процедуру для конфигураций струн, параллельных осям  $x$  и  $y$ , и усредняя по всем трём направлениям, получим окончательно тензор энергии-импульса для идеального газа бесконечных струн

$$T_{\mu\nu}^{gs} \equiv \langle T_{\mu\nu} \rangle^{(u)} = \frac{\mu}{L^2} \cdot \text{diag} \left( \gamma^2, \frac{u^2 \gamma^2 - 1}{3}, \frac{u^2 \gamma^2 - 1}{3}, \frac{u^2 \gamma^2 - 1}{3} \right) . \quad (12.34)$$

В пределе  $u \rightarrow 1$  уравнение состояния газа струн, как можно было ожидать, переходит в уравнение состояния релятивистского газа,  $p = \rho/3$ . Вклад в расширение Вселенной на более поздних этапах её развития, наоборот, дают медленные струны,  $u \ll 1$ , для которых уравнение состояния принимает вид

$$p = -\frac{1}{3}\rho . \quad (12.35)$$

Поскольку тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}^{gs}$  обратно пропорционален квадрату среднего расстояния между струнами (см. (12.34)), то энергия и давление струнного газа эволюционируют во Вселенной как

$$\rho, p \propto a^{-2}(t) . \quad (12.36)$$

Конечно, такой закон эволюции следует просто из размерных соображений: в пренебрежении искривлением и диссипацией энергии для бесконечной струны расширение приводит к росту её энергии  $E_s \propto a(t)$ , однако плотность струн падает как  $n_s \propto a^{-3}(t)$ , что даёт для плотности энергии  $\rho_s \propto E_s n_s \propto a^{-2}(t)$ . Отметим, что закон эволюции (12.36) согласуется с ковариантным сохранением энергии-импульса для уравнения состояния (12.35). Это следует из результатов раздела 3.2.4 в частном случае, когда параметр  $w$  принимает значение  $-1/3$ .

<sup>10</sup>При этом учитывается не только изменение плотности энергии и импульса отдельных струн в результате буста, но и изменение расстояния между струнами из-за лоренцева сокращения длин.

- ▷ *Задача 8. Пренебрегая столкновениями струн и диссипацией их энергии (что на самом деле неверно), оценить количество струн в видимой части Вселенной, если они были образованы в результате фазового перехода, происходившего при температуре  $T_c \sim 100$  ГэВ. То же для  $T_c \sim 10^{16}$  ГэВ. Указание: считать, что струны образуются за счёт механизма Киббла, так что сразу после фазового перехода имеется порядка одного участка струны хаббловской длины на хаббловский объём.*

Найденный нами закон (12.36) изменения плотности энергии газа длинных струн в расширяющейся Вселенной показывает, что их роль становится существеннее на более поздних этапах эволюции. Действительно, плотности энергии релятивистского газа или пыли падают с масштабным фактором быстрее, чем плотность энергии струнного газа, которая эволюционирует по тому же закону, что и вклад пространственной кривизны (см. (4.2)).

- ▷ *Задача 9. Предположив в рамках абелевой модели Хиггса с лагранжианом (12.15), что струны образовались в результате фазового перехода при температуре  $T \sim v$ , поставить ограничение на энергетический масштаб фазового перехода  $v$ , исходя из требования малости вклада струнного газа в современную плотность энергии Вселенной. Считать, что реализуются условия, описанные в задаче 8.*

Во Вселенной, чья эволюция определяется газом космических струн, масштабный фактор растёт со временем по линейному закону

$$a(t) \propto t.$$

Отсюда следует, что предположение о доминировании струн в современной Вселенной противоречило бы наблюдениям: современная Вселенная расширяется с ускорением. Из анализа данных по анизотропии реликтового излучения и поведения яркости сверхновых типа Ia модель струнного газа как доминирующей сегодня компоненты плотности энергии Вселенной закрыта на уровне достоверности, превышающем  $3\sigma$  (см. (4.46) и рис.4.7). Отсюда следует, что вклад струн в полную плотность энергии, если он существует, не был доминирующим и в прошлом, поскольку этот вклад растёт с уменьшением  $a$  медленнее, чем вклады нерелятивистского вещества ( $\rho \propto a^{-3}$ ) и радиации ( $\rho \propto a^{-4}$ ). Наиболее удачно наблюдаемое расширение описывает модель с ненулевой космологической постоянной (см. Главу 4), чей вклад в плотность энергии не изменяется с масштабным фактором. Это означает, что если струны и существуют в нашей Вселенной, их относительный вклад в плотность энергии современной Вселенной падает, а значит на темп расширения нашей Вселенной космические струны никакого заметного вклада как не оказывали, так и не будут оказывать.

### 12.3.3 Дефицит угла

Теперь перейдём к рассмотрению других гравитационных эффектов, характерных для моделей с бесконечными струнами.

Найдём искажение пространственной геометрии в присутствии бесконечной прямой струны. Мы видели, что такие струны не взаимодействуют друг с другом гравитационно, тем не менее они оказывают влияние на геометрию, причём весьма

нетривиальное. Проще всего в этом убедиться, рассматривая возмущение  $h_{\mu\nu}$  над метрикой Минковского, и работая в гармонической калибровке,

$$\partial_\mu h_\nu^\mu - \frac{1}{2} \partial_\nu h_\mu^\mu = 0 . \quad (12.37)$$

В этой калибровке линеаризованные уравнения Эйнштейна принимают вид (см. раздел А.9)

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_\lambda^\lambda \right) , \quad (12.38)$$

где  $\square = \partial_\lambda \partial^\lambda$  — даламбертиан в пространстве Минковского.

Для космической струны правая часть (12.38) определяется формулой (12.27) и имеет ненулевые компоненты (11) и (22), так что нетривиальными являются лишь компоненты  $h_{11}$  и  $h_{22}$ , каждая из которых удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) h_{11(22)} = 16\pi G \mu \delta(x) \delta(y) .$$

Таким образом, для возмущения метрики получим в гармонической калибровке

$$h_{\mu\nu} = 4G\mu \ln \left( \frac{x^2 + y^2}{\rho_0^2} \right) \cdot \text{diag} (0, 1, 1, 0) , \quad (12.39)$$

где  $\rho_0$  — произвольный обезразмеривающий параметр. Его появление связано с приближением бесконечно тонкой струны: для реалистичного случая струны конечной толщины, именно эта толщина определяет  $\rho_0$ . С учётом поправки (12.39) метрика бесконечной тонкой струны имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - \left[ 1 - 4G\mu \ln \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \right] \cdot (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2) ,$$

где  $\rho$  и  $\theta$  — радиальная и угловая координаты на плоскости  $(x, y)$ . Это выражение справедливо при  $G\mu \ll 1$  и  $\rho \gg \rho_0$ , но  $4G\mu \ln \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \ll 1$ ; именно в этом случае возмущения (12.39) малы, а деталями внутренней структуры струны можно пренебречь. Удобно сделать координатное преобразование к новой радиальной координате  $\tilde{\rho}$ , такой, что

$$d\tilde{\rho}^2 = \left( 1 - 4G\mu \ln \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \right) d\rho^2 . \quad (12.40)$$

В главном порядке по  $G\mu$  получим

$$\tilde{\rho} = \rho \cdot \left( 1 - 4G\mu \ln \frac{\rho}{\rho_0} + 4G\mu \right) ,$$

так что

$$\rho^2 \cdot \left( 1 - 4G\mu \ln \left( \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) \right) = \tilde{\rho}^2 \cdot (1 - 4G\mu)^2 . \quad (12.41)$$

Из соотношений (12.40) и (12.41) следует, что метрика покоящейся прямой струны, протянутой вдоль оси  $z$ , может быть представлена в виде (тильду над  $\rho$  опускаем),

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - d\rho^2 - (1 - 4G\mu)^2 \rho^2 d\theta^2 . \quad (12.42)$$



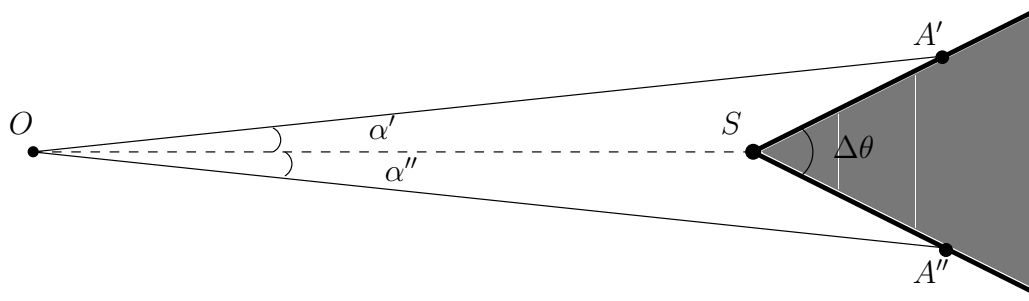


Рис. 12.3: Распространение света до наблюдателя  $O$  от источника  $A' = A''$ , расположенного за струной  $S$ .

▷ *Задача 10.* Найти метрику для асимптотически плоского пространства с бесконечной струной с рябью,  $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\mu', 0, 0, \mu'')\delta(x)\delta(y)$ ,  $\mu'\mu'' = \mu^2$ , работающая в первом порядке теории возмущений по  $G\mu'$ ,  $G\mu''$ . Убедиться, что в этом случае пространство вне струны искривлено.

Метрика (12.42) представляет собой пример метрики с конической сингулярностью. Окружности  $\rho = \text{const}$  имеют длину менее  $2\pi\rho$ . Заменой координат

$$\theta \rightarrow (1 - 4G\mu)\theta$$

метрика (12.42) переводится в метрику Минковского с той лишь разницей, что полярный угол  $\theta$  теперь принимает значения в более узком интервале,

$$0 \leq \theta < 2\pi(1 - 4G\mu) .$$

В связи с этим говорят, что у данного пространства имеется дефицит угла,

$$\Delta\theta = 8\pi G\mu . \quad (12.43)$$

Таким образом, пространство-время остаётся локально плоским, но геометрия  $(x, y)$ -плоскости представляет собой геометрию конуса.<sup>11</sup>

Отметим, что мы получили результат (12.42), используя линеаризованные уравнения Эйнштейна. Однако утверждение о том, что метрика прямой струны вне её сердцевины соответствует плоскому пространству-времени с дефицитом угла, является в действительности точным.

Наличие дефицита угла приводит к ряду интересных физических явлений. Одно из таких явлений — формирование двойного изображения объекта, расположенного за струной. Работая в системе координат, где метрика совпадает с метрикой Минковского, это явление легко проиллюстрировать на рисунке. Рассмотрим наблюдателя на расстоянии  $d$  от прямой бесконечной космической струны: на рис. 12.3 изображена плоскость, перпендикулярная струне  $S$  и проходящая через наблюдателя  $O$ . Полупрямые  $SA'$  и  $SA''$  на этом рисунке необходимо отождествить, а тёмную область — вырезать: именно в этом случае будет иметься дефицит угла  $\Delta\theta$ . Лучи света в этой плоскости, исходящие от наблюдателя под одинаковыми углами  $\alpha' = \alpha''$  к направлению  $OS$  на струну, в конце концов оказываются в одной точке, поскольку точки

<sup>11</sup>Метрика (12.42) получена в предположении  $4G\mu \ln\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \ll 1$ . Однако ясно, что (12.42) является решением уравнений Эйнштейна и при больших  $\rho$ , таких что  $4G\mu \ln\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \gtrsim 1$ : эта метрика является локально плоской, и для неё  $R_{\mu\nu} = 0$ .

$A'$  и  $A''$  отождествлены (расстояния  $SA'$  и  $SA''$  одинаковы из-за симметрии). Если теперь в точке  $A' = A''$  поместить источник света, то к наблюдателю  $O$  свет придёт с двух различных направлений:  $OA'$  и  $OA''$ . В результате наблюдатель будет видеть два одинаковых источника в двух различных направлениях, причём угол между этими направлениями,  $\Delta\alpha = \alpha' + \alpha''$ , пропорционален дефициту угла; при малых  $\Delta\theta$  справедливо

$$\Delta\theta = \frac{l+d}{l}\Delta\alpha, \quad (12.44)$$

где  $l$  — расстояние от струны до источника, а  $d$  — расстояние от наблюдателя до струны. Если расстояние от наблюдателя до источника можно определить (например, измеряя красное смещение), то расстояние до струны  $d$  непосредственно измерить нельзя, поэтому в общем случае измерение углового расстояния между источниками ( $A'$  и  $A''$ ) позволяет получить лишь нижнюю границу для дефицита угла,

$$\Delta\theta \geq \Delta\alpha.$$

Поскольку дефицит угла пропорционален натяжению струны (см. (12.43)), измерение  $\Delta\alpha$  даёт ограничение на масштаб энергий  $v$ , характеризующий спонтанное нарушение симметрии,

$$v \gtrsim \frac{M_{Pl}}{2} \sqrt{\frac{\Delta\alpha}{2\pi}}.$$

Чтобы проиллюстрировать указанное явление линзирования в системе координат (12.42) потребовалось бы вырезать тёмную область на рис.12.3 и склеить границы  $SA'$  и  $SA''$ . В результате поверхность рисунка (ранее — плоский лист) станет конусом с вершиной в точке  $S$  расположения струны. Свет распространяется по геодезическим — кратчайшим траекториям между двумя точками. Между источником  $A' = A''$  и наблюдателем  $O$  таких пути два — в обход вершины конуса слева и справа. Отсюда и два образа для наблюдателя  $O$ .

▷ *Задача 11. Используя уравнение геодезических в метрике (12.42), убедиться другим способом в линзировании источников космическими струнами.*

В нашем рассмотрении мы пренебрегали расширением Вселенной. В общем случае коэффициент пропорциональности между  $\Delta\theta$  и  $\Delta\alpha$  зависит от космологической эволюции. Например, в плоской Вселенной с  $\Omega_M = 1$  аналог соотношения (12.44) имеет вид

$$\Delta\alpha = \Delta\theta \cdot \left( 1 - \frac{1 - (1 + z_S)^{-1/2}}{1 - (1 + z_A)^{-1/2}} \right), \quad (12.45)$$

где  $z_S$  и  $z_A$  — красные смещения струны и источника, соответственно.

▷ *Задача 12. Проверить формулу (12.45). Получить аналогичную формулу для расширяющейся Вселенной, в плотности энергии которой доминирует вклад космологической постоянной. Обобщить полученную формулу, а также формулу (12.45) для струны, наклоненной к плоскости рис. 12.3 под произвольным углом  $\delta$ .*

Для простоты мы рассматривали линзирование точечного источника. Экспериментальным подтверждением “тождественности” образов было бы совпадение их спектров. Для протяжённых источников связь между образами, вообще говоря, более сложная, однако непересекающиеся образы должны быть одинаковыми: одной интенсивности и без искажений.

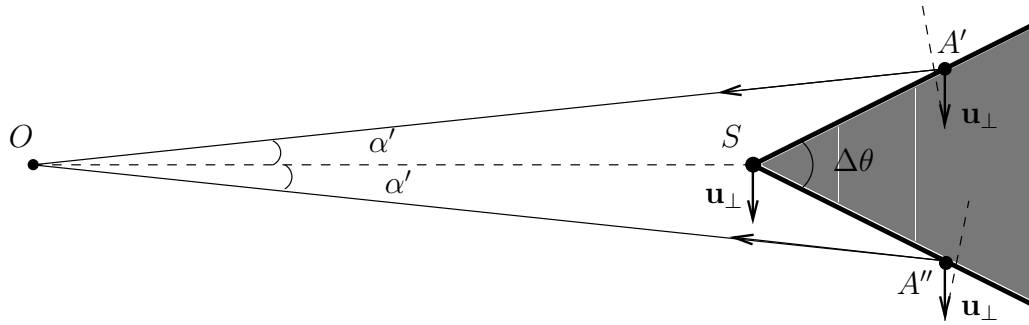


Рис. 12.4: Распространение света до наблюдателя  $O$  от источника  $A' = A''$ , расположенного за движущейся со скоростью  $u_{\perp}$  струной  $S$ .

Другое явление, обусловленное космическими струнами, состоит в специфическом искажении картины анизотропии реликтового излучения. Если струна и наблюдатель покоятся относительно реликтового излучения, то наблюдатель обнаружит вдоль струны повторения в распределении температурных пятен реликтового излучения, что объясняется обсуждавшимся выше струнным линзированием. В данном случае источник — элемент сферы последнего рассеяния реликтовых фотонов — расположен от струны на более далёком расстоянии, чем наблюдатель, поэтому угловое расстояние между одинаковыми температурными пятнами совпадает с дефицитом угла (см. формулу (12.44) в пределе  $l \gg d$ ),

$$\Delta\theta = \Delta\alpha.$$

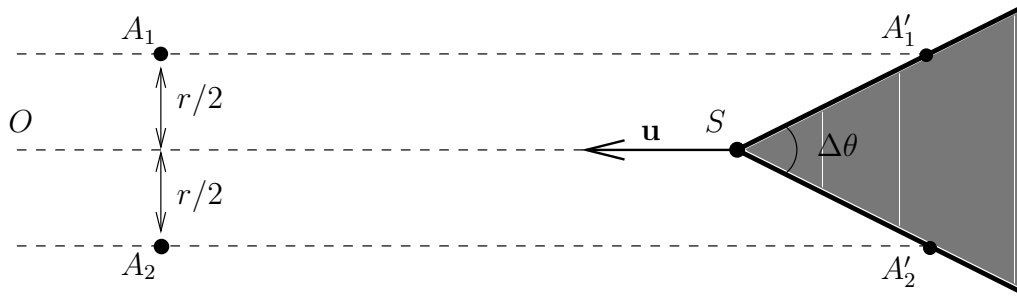
Если же струна движется в поперечном к лучу зрения направлении, то появляется дополнительный эффект — систематический сдвиг частот (температуры) реликтовых фотонов, “обходящих” струну с разных сторон. Это явление проиллюстрировано на рис. 12.4, где мы опять работаем в координатах, в которых метрика совпадает с метрикой Минковского, и все обозначения совпадают с обозначениями рис. 12.3. Рассмотрим снова два образа  $A'$  и  $A''$  одного и того же источника. Поскольку струна  $S$  движется со скоростью  $u_{\perp}$  в поперечном к линии наблюдения направлении, то с той же скоростью движутся и все точки угла  $A'SA''$ . В момент испускания сигнала источник  $A'$  имел скорость  $u_{\perp}$ , чья проекция на ось наблюдения  $OA'$  сонаправлена импульсу испущенного фотона. Для источника  $A''$  соответствующая компонента будет противоположна импульсу фотона. В результате продольного эффекта Доплера получим изменение частоты фотона,

$$OA': \quad \Delta\omega = u_{\perp} \frac{\Delta\theta}{2} \gamma, \quad OA'': \quad \Delta\omega = -u_{\perp} \frac{\Delta\theta}{2} \gamma,$$

где  $\gamma = 1/\sqrt{1 - u_{\perp}^2}$  и мы положили  $\Delta\alpha \approx \Delta\theta$ , имея в виду фотоны реликтового излучения. Мы видим, что фотоны, пролетающие перед струной, краснеют, а фотоны, пролетающие за струной, синеют. Вообще говоря, это приводит к искажению спектра реликтового излучения, однако для малых  $\Delta\theta$  и реалистичных  $u_{\perp}$  искажение мало: эффективное изменение температуры реликтовых фотонов составляет

$$\frac{\delta T}{T} = 3u_{\perp} \Delta\theta = 1.7 \cdot 10^{-6} \gamma \frac{u_{\perp}}{10^{-1}} \frac{\mu}{(10^{16} \text{ ГэВ})^2},$$

что для типичного масштаба Большого объединения  $\mu \simeq 10^{16}$  ГэВ и типичных значений средней скорости струны, получаемых в численных расчётах,  $u_{\perp} \sim 0.1$ , меньше

Рис. 12.5: Распространение струны  $S$  в облаке пыли.

вклада в анизотропию реликтового излучения флуктуаций плотности материи и находится за рамками чувствительности выполненных экспериментов.

Обычно рассмотрение спектра анизотропии реликтового излучения проводится в предположении гауссовости флуктуаций температуры (см. формулу (1.9) и обсуждение в разделе (1.2.5)). При такой обработке существующие экспериментальные данные по анизотропии реликтового излучения позволяют исключить струнные конфигурации (сети) с  $\mu \gtrsim (1.3 \cdot 10^{16} \text{ ГэВ})^2$ . Это ограничение [36] следует из анализа суммы двух вкладов в анизотропию реликтового излучения — вклада обычных первичных флуктуаций материи, и вклада флуктуаций, вызванных движением струн в пространстве, заполненном нерелятивистским веществом.

В то же время, поскольку движущаяся струна приводит к (небольшому) скачку температуры вдоль линии — проекции струны на небесную сферу — то это привело бы к *негауссовости* в угловом распределении температуры реликтового излучения. Поскольку такой негауссовости не наблюдают, то отсюда можно получить ограничение на параметр  $\mu$  [37]. Оно оказывается более сильным, чем остальные существующие ограничения, и составляет  $\mu \lesssim (0.7 \cdot 10^{16} \text{ ГэВ})^2$  для бесконечной прямой струны, движущейся со скоростью  $u_{\perp} = 1/\sqrt{2}$ .

Наконец, ещё одно явление, обусловленное движением космической струны, на этот раз в пылевидной среде, — формирование в кильватере (за струной) областей повышенной плотности материи. Этот процесс проиллюстрирован на рис. 12.5, где мы вновь используем систему координат, в которой метрика совпадает с метрикой Минковского. Струна  $S$  перпендикулярна плоскости рисунка. В плоскости рисунка рассмотрим два объекта (две пылинки)  $A_1$  и  $A_2$ , покоящихся на расстоянии  $r/2$  от прямолинейной траектории струны  $OS$ , движущейся со скоростью  $u$ . После прохождения струны между объектами они начнут постепенно приближаться друг к другу, пока не встретятся в одной точке (на рис. 12.5 это совпадающие точки  $A'_1 = A'_2$ )! Действительно, в системе покоя струны частицы  $A_1$  и  $A_2$  движутся на неё со скоростью  $u$ , и в конце концов попадут в точки  $A'_1$  и  $A'_2$ , соответственно.

Найдём скорость, которую приобретают нерелятивистские частицы в направлении к кильватеру. Для частицы  $A_1$  это направление перпендикулярно линии  $SA'_1$  (эта линия и есть кильватер, как и линия  $SA'_2$ ), а в системе покоя струны эта частица движется со скоростью  $u$  по прямой  $A_1A'_1$ . Поэтому её скорость в точке  $A'_1$  в направлении к кильватеру равна

$$\begin{aligned} v_y &= u \cdot \sin \frac{\Delta\theta}{2} \\ &= 4\pi G\mu u, \end{aligned} \quad (12.46)$$

где мы считаем  $G\mu \ll 1$ . В случае релятивистского движения струны формула (12.46) обобщается следующим образом:

$$v_y = 4\pi G\mu \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (12.47)$$

Полагая для оценки  $u \sim 0.1$ , получим численно

$$|\Delta v_y| = 0.8 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\mu}{(10^{16} \text{ ГэВ})^2}.$$

### 12.3.4 Струны во Вселенной

Появление ненулевой скорости в направлении к кильватеру приводит к формированию вдоль кильватера области с повышенной концентрацией нерелятивистских частиц. Эти неоднородности в распределении плотности нерелятивистских частиц, эволюционируя в расширяющейся Вселенной, могут в свою очередь приводить к формированию гравитационно-связанных конфигураций. Для этого необходимо, чтобы в соответствующих пространственных областях плотность энергии, накопленной в неоднородностях  $\delta\rho \equiv \rho(\mathbf{x}, t) - \rho(t)$ , становилась порядка или даже превышала среднюю плотность энергии  $\rho(t)$ . Именно такие конфигурации служат основой для формирования галактик. В данном случае галактики будут образовываться вдоль кильватеров движущихся струн, формируя тем самым двумерные структуры. Отметим, что наблюдения указывают, что на небольших масштабах в распределении галактик действительно имеются двумерные (стенки) и одномерные (филаменты) структуры. Вычисления показывают, однако, что лишь небольшая часть материи попадает в кильватеры, что не объясняет существования пустот (voids) — больших областей Вселенной, обеднённых структурами.

Другой механизм формирования структур в моделях с космическими струнами основан на аккреции нерелятивистской материи на струнные петли. Получающийся спектр возмущений плотности материи оказывается почти масштабно инвариантным, что согласуется с наблюдениями. Кроме того, с наблюдениями согласуются и предсказываемые корреляционные длины галактик и скоплений галактик. Однако, струнный механизм формирования структур предсказывает противоречащую эксперименту картину анизотропии реликтового излучения (см. рис. 12.6), поэтому он сегодня является исключённым. Наиболее реалистичным механизмом формирования структур служит рост первичных возмущений, образовавшихся на инфляционной стадии эволюции Вселенной в результате усиления квантовых вакуумных флуктуаций. Формирование одномерных и двумерных структур в распределении галактик происходит и в этом случае, что подтверждается численными расчётами и является результатом нетривиальной динамики гравитирующих систем.

Некоторый вклад струн в формирование структур возможен, однако он заведомо не является единственным. Отметим, что в некоторых инфляционных моделях (например, в подклассе моделей гибридной инфляции) наряду со вкладом первичных квантовых флуктуаций предсказывается также вклад в спектр возмущений плотности, обусловленный динамикой струн. Современные ограничения сверху на вклад струн в анизотропию реликтового излучения находятся на уровне 10% от обычного вклада в моделях  $\Lambda$ CDM, что в свою очередь примерно на таком же уровне ограничивает влияние струн на процессы формирования структур во Вселенной — галактик и их скоплений.

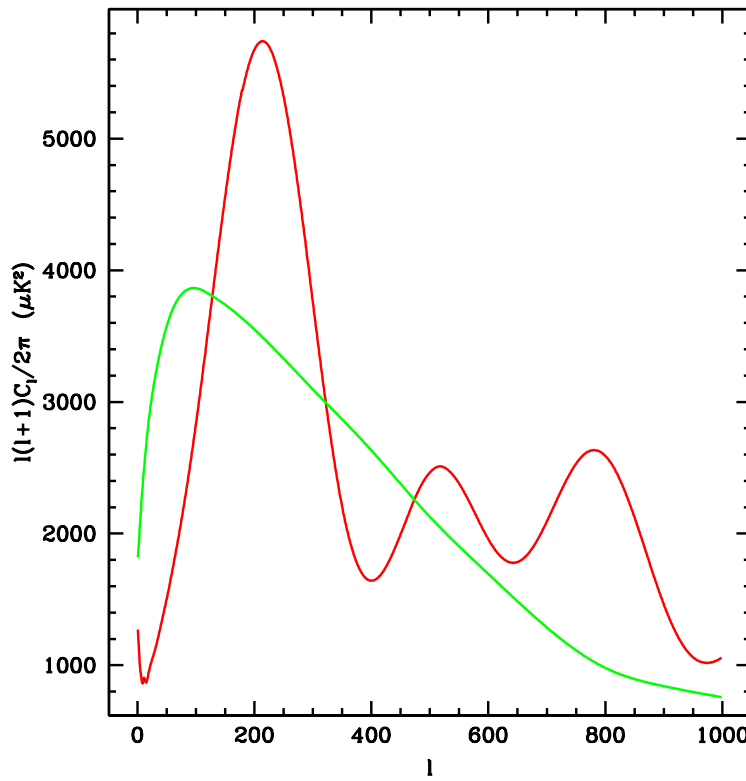


Рис. 12.6: Спектры анизотропии реликтового излучения, типичные для: модели  $\Lambda$ CDM (красная линия) и для модели, где основным источником флуктуаций материи являются космические струны (зелёная линия) [38]. Отсутствие особенностей во втором спектре обусловлено тем, что одинаковые длины волн в спектре возмущений материи создаются не одновременно, как в инфляционных моделях, а на протяжении довольно длительного времени. Единственный пик в спектре обусловлен влиянием ньютоновского потенциала, созданного струнами с рябью.

Отметим, что многие подробности, относящиеся к динамике космических струн, на количественном уровне не удаётся получить с использованием лишь аналитических методов. Поэтому для анализа эволюции газа космических струн активно используют численные методы. Так, численное исследование процесса формирования струн показало, что сразу после фазового перехода массовая доля первичных бесконечных струн примерно в четыре раза превосходит массовую долю струн замкнутых, средняя скорость бесконечных струн во Вселенной достаточно велика,  $u \approx 0.15$ , а плотность замкнутых струн в широком интервале радиусов  $R$  определяется лишь величиной радиуса,  $n_R dR \sim R^{-4} dR$ . Численные расчёты показали, что в процессе эволюции струны активно теряют энергию, так что их вклад в плотность энергии Вселенной никогда не доминирует. Поэтому, в отличие от монополей и доменных стенок, космические струны в реалистических теориях, обобщающих Стандартную модель физики частиц, всё ещё разрешены в космологии.

На эволюцию струн существенную роль оказывают два процесса. Во-первых, это пересечения и самопересечения струн, в результате чего длинные струны образуют петли. Во-вторых, небольшие петли активно испускают гравитационные волны и быстро исчезают. Действительно, мощность излучения  $P_{gw}$  определяется третьей

производной по времени квадрупольного момента системы (см. например, [19]), в данном случае — квадрупольного момента струнной петли  $Q$ ,

$$P_{gw} \sim \frac{1}{M_{Pl}^2} \left( \frac{d^3 Q}{dt^3} \right)^2.$$

Для оценки квадрупольного момента петли радиуса  $R$  можно положить  $Q \sim \mu R^3$ . Уравнение движения петли, следующее из вариации действия (12.30), показывает, что петли активно вращаются и осциллируют со скоростями порядка единицы,  $dR/dt \sim 1$ . С учётом этого получим:

$$P_{gw} = C_{gw} \frac{\mu^2}{M_{Pl}^2},$$

где константа  $C_{gw}$  получается из аккуратного вычисления и довольно велика,  $C_{gw} \simeq 10^2$ . Таким образом, за время

$$t_{gw} \sim \frac{\mu R}{P_{gw}} = \frac{M_{Pl}^2 R}{C_{gw} \mu} \quad (12.48)$$

основная часть энергии петли перейдёт в энергию гравитационных волн. В результате размер петли уменьшится настолько, что её радиус станет порядка толщины струны,  $R \sim v^{-1}$ , и петля распадётся на энергичные частицы<sup>12</sup>.

Обратимся теперь к пересечению струн. Численные расчёты показывают, что пересечение почти в 100% случаев приводит к перезамыканию, т.е. самопересечения неизбежно приводят к распаду струн на более короткие петли. Изучение динамики струн в расширяющейся Вселенной дало несколько неожиданный результат: закон эволюции плотности энергии струнных конфигураций быстро начинает совпадать с законом эволюции полной плотности энергии Вселенной,  $\rho \propto t^{-2}$ . При этом в любой момент времени в видимой части Вселенной (под горизонтом) находится около десятка открытых длинных струн размером с горизонт, множество замкнутых струн и особенно много небольших петель. Такое несколько неожиданное поведение — результат активного образования петель и последующего перехода энергии, накопленной в них, в излучаемые гравитационные волны.

Чтобы понять на качественном уровне физику этого процесса, оценим плотность энергии небольших замкнутых струн — петель — на радиационно-доминированной стадии эволюции Вселенной. Плотность числа петель небольшого фиксированного радиуса  $R$  из-за расширения Вселенной убывает со временем как

$$n_l(R, t) \propto a(t)^{-3} \sim t^{-3/2}.$$

В масштабно-инвариантном режиме из размерных соображений получим

$$n_l(R, t) \sim \frac{1}{(Rt)^{3/2}} \sim \left( \frac{\mu}{Et} \right)^{3/2},$$

---

<sup>12</sup>Отметим, что это — один из возможных механизмов генерации во Вселенной космических лучей сверхвысоких энергий. При  $\mu = (10^{16} \text{ ГэВ})^2$  для этого механизма требуются замкнутые струны размера  $R \sim 1 \text{ Мпк}$ : из (12.48) следует, что время жизни именно таких струн имеет порядок возраста современной Вселенной.

где  $E \sim R\mu$  — масса петли. Для плотности энергии петель будем иметь

$$\rho_l(t) \sim \int_{E_{min}}^{E_{max}} E dE \frac{dn_l(R, t)}{dE} = \left(\frac{\mu}{t}\right)^{3/2} \int_{E_{min}}^{E_{max}} \frac{dE}{E^{3/2}} . \quad (12.49)$$

Этот интеграл набирается на нижнем пределе, поэтому

$$\rho_l(t) \sim \left(\frac{\mu}{t}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{E_{min}}} , \quad (12.50)$$

где  $E_{min}$  — минимально возможная энергия петель. Мы видим, что основной вклад в плотность энергии дают самые лёгкие (но весьма многочисленные) петли.

В справедливости закона  $n_l(R, t) \propto (Et)^{-3/2}$  можно убедиться из следующего рассмотрения. Пусть  $n_l(R, t)$  — плотность числа петель в момент времени  $t$  с фиксированным радиусом  $R$ . Петли с характерными радиусами между  $R$  и  $R + dR$  несут плотность энергии

$$\rho_l(R, t) dR = \mu R n_l(R, t) dR ,$$

где мы оценили массу петли радиуса  $R$  как  $\mu R$ . Плотность энергии петель падает из-за расширения Вселенной, в то же время постоянно появляются новые петли благодаря (само)пересечениям длинных струн. Масштабно-инвариантное поведение системы струн означает, что образование петель также определяется масштабно-инвариантной функцией, которую мы обозначим как  $f(R/l_H)$ , где  $l_H$  — размер горизонта, определяющий характерный для Вселенной пространственный масштаб. Потеря энергии длинными струнами в объёме горизонта на рождение петель с радиусами между  $R$  и  $R + dR$  параметризуется тогда следующим образом

$$\mu \frac{dR}{l_H} \cdot f(R/l_H) .$$

Окончательно, уравнение баланса энергии петель в расширяющейся Вселенной принимает вид

$$\frac{d\rho_l(R, t)}{dt} + 3H(t)\rho_l(R, t) = \frac{\mu}{l_H^4} f(R/l_H) ,$$

причём  $H(t) = 1/(2t)$  и  $l_H = 2t$ . Решение этого уравнения,

$$\rho_l(R, t) = \frac{1}{16} \frac{\mu}{(Rt)^{3/2}} \int_{R/t}^{\infty} \sqrt{\xi} f(\xi/2) d\xi ,$$

на поздних временах,  $R/t \rightarrow 0$ , даёт закон эволюции плотности энергии петель (12.49).

Напомним, что петли нестабильны: осциллируя, они теряют энергию на излучение гравитационных волн, и за время (12.48) полностью исчезают. Именно соотношение (12.48), фиксирующее время жизни небольших петель, определяет закон изменения минимального радиуса петель, а значит и минимальной энергии,

$$R_{min}(t) \sim C_{gw} \frac{\mu}{M_{Pl}^2} t , \quad E_{min}(t) \sim C_{gw} \frac{\mu^2}{M_{Pl}^2} t .$$

Окончательно для плотности энергии петель получаем

$$\rho_l(t) \simeq \frac{\sqrt{\mu} M_{Pl}}{\sqrt{C_{gw}}} \frac{1}{t^2} ,$$

т.е. плотность энергии петель изменяется со временем на радиационно-доминированной стадии эволюции Вселенной так же, как и плотность энергии радиации. Энергия струн быстро переходит в энергию гравитационных волн, которые ведут себя в расширяющейся Вселенной как газ безмассовых частиц, т.е. как радиация. Добавим,



что численные расчёты показывают, что петли не оказывают заметного влияния на процессы формирования структур: флуктуации материи появляются, в основном, за счёт движения десятка бесконечных струн.

Наконец, оценим энергию, переходящую в гравитационные волны. С учётом потери энергии гравитационных волн на красное смещение, плотность энергии гравитационных волн  $\rho_{gw}$  определяется уравнением

$$\dot{\rho}_{gw} + 4H\rho_{gw} = -\frac{d\rho_l}{dt} = 2\frac{\sqrt{\mu}M_{Pl}}{\sqrt{C_{gw}}} \frac{1}{t^3}.$$

Решением этого уравнения служит

$$\begin{aligned}\rho_{gw} &= \frac{1}{t^2} \int_{t_1}^t \left( -\frac{d\rho_l}{dt'} \right) t'^2 dt' \\ &= 2\frac{\sqrt{\mu}M_{Pl}}{\sqrt{C_{gw}}} \frac{1}{t^2} \ln \frac{t}{t_1},\end{aligned}$$

где  $t_1$  обозначает время испускания первых гравитационных волн — начало распада струн. На радиационно-доминированной стадии плотность энергии Вселенной равна (см. раздел 3.2)

$$\rho = \frac{3M_{Pl}^2}{32\pi t^2},$$

что даёт для доли излучённых струнами гравитационных волн в общей плотности энергии

$$\frac{\rho_{gw}}{\rho} \simeq \frac{64\pi}{3M_{Pl}} \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{C_{gw}}} \ln \frac{t}{t_1}.$$

Как мы видим, относительная доля энергии рождённых струнами гравитационных волн изменяется со временем медленно, логарифмически, однако по величине эта доля довольно велика и может составлять десятки доли процента. Таким образом, распадающиеся струны являются мощным источником реликтовых гравитационных волн. На сегодняшний день нет никаких экспериментальных данных, указывающих на возможное существование таких гравитационных волн, однако точность измерений недостаточна для того, чтобы на их основе сделать вывод об отсутствии процессов интенсивного распада струн в ранней Вселенной.

Возможность возникновения космических струн (т.е. струн с длинами, сопоставимыми с размером космологического горизонта) рассматривается не только в рамках моделей Большого объединения, где процессы перестройки вакуума в остывающей Вселенной могут сопровождаться образованием струн. Такая возможность изучается и в теории суперструн — наиболее известного кандидата на роль теории, объединяющей сильные и электрослабые взаимодействия Стандартной модели с гравитацией. В теории суперструн также существуют объекты, напоминающие с точки зрения обычного “трёхмерного” наблюдателя струны — одномерные протяжённые объекты. В простых случаях существование космических струн запрещено экспериментально: натяжение струн оказывается порядка  $\mu \sim M_{Pl}^2$ , что привело бы в конечном итоге к слишком большой анизотропии реликтового излучения. Кроме того, как мы уже неоднократно отмечали, на горячей стадии развития Вселенной температуры, вероятнее всего, были значительно ниже планковских, поэтому струны с натяжением  $\mu \sim M_{Pl}^2$  если и образовывались во Вселенной, то лишь на инфляционной стадии её развития. После завершения инфляции плотность струн (как и плотность любых топологических дефектов или частиц) падает до столь малого значения, что в современной Вселенной их, вообще говоря, не должно быть вообще (см. подробности во второй части книги). В довершение, в простых струнных теориях струны оказываются нестабильными на космологических временах.

Тем не менее, возможны струнные теории, в которых струны имеют интересные и феноменологически приемлемые свойства. Помимо фундаментальных струн ( $F$ -струн), в последнее время активно изучается другой тип решений, получивший название  $D$ -струны. Это частный случай так называемых  $Dp$ -бран (где  $p$  — пространственная размерность объекта).

Перечисленные выше типы струн имеют особенности, которые отличают их от обычных космических струн. В первую очередь это относится к эволюции струнных конфигураций. Существуют отличные от механизма Киббла способы возникновения  $F$ - и особенно  $D$ -струн. По-иному устроено и взаимодействие таких струн. Как мы уже упоминали, пересечения космических струн приводят с вероятностью, близкой к единице, к перезамыканию струн. В случае  $F$ - и  $D$ -струн вероятность перезамыкания заметно меньше. При пересечении  $F$ - и  $D$ -струн возможно образование гибридных  $FD$ -струн, соединяющих  $F$ - и  $D$ -струны. При этом образование петель (а значит потери энергии) оказывается сильно подавленным. В ряде струнных теорий подобные конфигурации образуют стабильные сети космологических масштабов. Натяжения струн не обязаны быть планковского масштаба, а потому подобные конфигурации могут быть феноменологически приемлемыми. Возможные следствия для космологии в моделях с подобными типами струн интенсивно изучаются в последние годы.

## 12.4 \*Доменные стенки

Рассмотрим простейшую теоретико-полевую модель, в которой есть решения типа доменных стенок: теорию вещественного скалярного поля  $\phi$  с самодействием,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2. \quad (12.51)$$

Лагранжиан (12.51) инвариантен относительно изменения знака скалярного поля  $\phi \rightarrow -\phi$  (группа симметрий  $\mathbb{Z}_2$ ). В результате спонтанного нарушения симметрии поле  $\phi$  приобретает ненулевое вакуумное среднее

$$\langle \phi \rangle = +v, \quad \text{или} \quad \langle \phi \rangle = -v,$$

т.е. пространство вакуумов оказывается несвязным и состоит из двух точек. В результате фазового перехода во Вселенной образуются домены двух типов: в одних среднее значение поля положительно<sup>13</sup>,  $\langle \phi \rangle = +v$ , а в других  $\langle \phi \rangle = -v$ . Нетривиальные полевые конфигурации, интерполирующие в пространстве между различными вакуумами  $\phi = \pm v$  получили название доменных стенок — это границы между областями с различными вакуумами.

Сформулируем в общем виде необходимые условия стабильности доменных стенок. Пусть лагранжиан теории инвариантен относительно группы внутренней симметрии  $G$ , а основное состояние инвариантно лишь относительно группы  $H$ , являющейся подгруппой  $G$ . Многообразие  $\mathcal{M}$  эквивалентных вакуумов в такой теории имеет структуру  $G/H$ . В теории возможны стабильные решения в виде доменных стенок — топологических дефектов пространственно-временной размерности  $2+1$  — если фундаментальная гомотопическая группа многообразия вакуумов теории нетривиальна,

$$\pi_0(G/H) \neq 0.$$

Это условие означает, что многообразие вакуумов  $\mathcal{M}$  состоит из нескольких несвязных компонент.

В простейшем случае статической бесконечной доменной стенки, лежащей в плоскости  $z = 0$ , искомая конфигурация зависит лишь от координаты  $z$  и является решением уравнения

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} - \lambda (\phi^2 - v^2) \phi = 0, \quad (12.52)$$

с граничными условиями  $\phi(z \rightarrow \pm\infty) = \pm v$  (кинк) или  $\phi(z \rightarrow \pm\infty) = \mp v$  (антикинк). Эти конфигурации имеют вид:

$$\text{кинк:} \quad \phi(z) = v \operatorname{th} \frac{z}{\Delta}, \quad \Delta^2 = \frac{2}{\lambda v^2} \quad (12.53)$$

$$\text{антикинк:} \quad \phi(z) = -v \operatorname{th} \frac{z}{\Delta}. \quad (12.54)$$

<sup>13</sup>Температурное среднее поля  $\phi$  сразу после фазового перехода не совпадает, вообще говоря, с вакуумным значением  $v$ , однако здесь это для нас не существенно.

▷ *Задача 13.* Убедиться, что кинк действительно является решением уравнения (12.52).

В причинно-связанных областях<sup>14</sup> значения поля  $\phi$  различаются слабо, поэтому в результате фазового перехода с образованием ненулевого среднего поля  $\langle\phi\rangle$  это среднее будет одним и тем же в пределах одной причинно-связанной области. В то же время, в разных таких областях знаки  $\langle\phi\rangle$  нескоррелированы. Вселенная оказывается разбитой на области, имевшие в момент фазового перехода  $t_c$  размер горизонта  $l_H(t_c)$ , в которых средние поля  $\langle\phi\rangle$  имеют случайные значения знака: в одних областях  $\langle\phi\rangle = v$ , а в других  $\langle\phi\rangle = -v$ . Найденные нами решения типа кинка интерполируют между пространственными областями с разными вакуумами и образуют топологический дефект — доменную стенку. Это — макроскопическая конфигурация, формально простирающаяся до бесконечности (вдоль плоскости  $z = 0$ ) и имеющая толщину (вдоль оси  $z$ ) порядка  $\Delta$ . Чтобы убедиться в этой интерпретации, найдём тензор энергии-импульса для решения типа кинка, полагая пространство-время плоским. Подставляя кинк (12.53) в общее выражение для тензора энергии-импульса скалярного поля,

$$T_{\mu\nu}^{sc} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \mathcal{L}\eta_{\mu\nu} ,$$

получим для доменной стенки

$$T_{\mu\nu}^{DW} = \frac{\lambda v^4}{2 \operatorname{ch}^4 \frac{z}{4\Delta}} \operatorname{diag}(1, -1, -1, 0) . \quad (12.55)$$

Мы видим, что тензор энергии-импульса не зависит от координат  $x, y$  и отличен от нуля лишь в области  $-\Delta \lesssim z \lesssim \Delta$ . Последнее оправдывает интерпретацию  $\Delta$  как толщины доменной стенки. Отметим, что во Вселенной образовавшаяся доменная стенка, вообще говоря, не является плоской. Тем не менее, для несильно искривлённых стенок приближение кинка позволяет получить достаточно точные оценки, заведомо подходящие для изучения возможного влияния доменных стенок на развитие Вселенной.

Интегралы

$$\eta \equiv \int T_{00}^{DW} dz = \frac{2\sqrt{2\lambda}}{3} v^3 \quad \text{и} \quad \int T_{11}^{DW} dz = \int T_{22}^{DW} dz = -\eta$$

определяют поверхностную плотность энергии и давление вдоль доменной стенки, которые в точности совпадают друг с другом по величине<sup>15</sup>, однако имеют разные знаки. Отметим тривиальность компоненты  $T_{33}^{DW}$  в тензоре энергии-импульса, что означает отсутствие натяжения стенки в перпендикулярном к ней направлении (вдоль оси  $z$ ). Совпадение по величине давления и плотности энергии указывает на то, что плоская доменная стенка является релятивистским объектом. Поскольку в ОТО пространственные компоненты тензора энергии-импульса участвуют в формировании гравитационного поля наряду с временными, то для доменных стенок можно ожидать нетривиальных (с точки зрения ньютоновской гравитации) следствий.

<sup>14</sup>В общем случае — в областях размера порядка корреляционной длины.

<sup>15</sup>Совпадение не является полным для искривлённых доменных стенок.

Действительно, уравнения Эйнштейна для скалярного ньютоновского потенциала  $\Phi$  дают (ср. (12.28))

$$\Delta\Phi = 8\pi G \left( T_{00} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \right).$$

Поэтому для конфигурации поля, описывающей доменную стенку, чей тензор энергии-импульса имеет вид (12.55), получим

$$\Delta\Phi = -4\pi GT_{00}^{DW}.$$

Это приводит к гравитационному потенциалу противоположного знака по сравнению с гравитационным потенциалом покоящегося массивного точечного объекта, для которого справедливо

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \quad T_{00} = \rho(\mathbf{x}).$$

В результате доменные стенки оказываются источником “антигравитации”: нерелятивистские частицы отталкиваются от доменной стенки!

Теперь обсудим эволюцию конфигурации поля, содержащей несколько доменных стенок. Такая эволюция существенна спустя некоторое время после фазового перехода, когда под горизонт зайдут области, ранее причинно-несвязанные, а значит, вообще говоря, имеющие разные вакуумы  $\langle\phi\rangle$ . Эти области отделены друг от друга доменными стенками. В общем случае, причинно-связанная в некоторый момент времени часть Вселенной состоит из разделённых доменными стенками областей разных вакуумов, в которые погружены замкнутые области противоположного вакуума, в которых также есть замкнутые области противоположного вакуума и т.д. Доменные стенки при этом образуют непересекающиеся открытые или замкнутые поверхности.<sup>16</sup>

В результате эволюции доменная стенка замечает  $2 + 1$ -мерное многообразие в пространстве-времени. Эта эволюция (без учёта пересечений и соприкосновений, где становится существенной ненулевая толщина стенки) определяется действием, пропорциональным объёму мирового трёхмерного многообразия,

$$S = -\eta \int \sqrt{-\gamma} d^3\xi, \quad \xi^\alpha = (\tau, \sigma^1, \sigma^2),$$

где  $\eta$  — натяжение стенки (плотность энергии на единицу поверхности),  $\tau$  — собственное время,  $(\sigma^1, \sigma^2)$  — координаты точки на поверхности тонкой стенки, а

$$\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha x^\mu (\tau, \sigma^1, \sigma^2) \partial_\beta x^\nu (\tau, \sigma^1, \sigma^2) g_{\mu\nu}$$

— индуцированная метрика на стенке. В процессе эволюции замкнутая стенка (пузырь) стремится уменьшить свою площадь (т.е. “схлопнуться”).

Для подавляющего большинства моделей физики частиц существование хотя бы одной “бесконечной” стенки (с размерами порядка размера горизонта) в видимой части современной Вселенной противоречило бы наблюдательным данным. Это видно хотя бы из того, что энергия доменной стенки с размерами порядка современного

<sup>16</sup>Мы рассматриваем модель (12.51), в которой множество вакуумов состоит лишь из двух точек. Для более сложных ситуаций (например, в моделях с симметрией  $\mathbb{Z}_n$ ,  $n > 2$ ) будет больше различных типов доменов, а значит и интерполирующих между ними стенок, которые, в общем случае, уже смогут пересекаться.

размера горизонта оценивается величиной  $M_{DW} \sim \eta H_0^{-2}$ , в то время как полная энергия в видимой части Вселенной составляет величину порядка  $\rho_c H_0^{-3}$ . Потребовав, чтобы энергия стенки была меньше полной энергии,

$$\eta H_0^{-2} \lesssim \rho_c H_0^{-3} ,$$

получим ограничение на поверхностную плотность энергии стенки,

$$\eta \lesssim \rho_c H_0^{-1} \sim (10 \text{ МэВ})^3 . \quad (12.56)$$

Таким образом, если не вводить в рассмотрение чрезвычайно малые константы связи, то масштаб энергий, характеризующий доменную стенку, должен быть заведомо меньше 10 МэВ, что является очень малой величиной с точки зрения расширений Стандартной модели физики частиц. Иными словами, модели физики частиц, обладающие дискретными симметриями и допускающие доменные стенки, сталкиваются, вообще говоря, с “проблемой доменных стенок”: в них должен существовать механизм, запрещающий образование доменных стенок в ранней Вселенной или обеспечивающий их исчезновение в процессе космологической эволюции. Это требование является, конечно, далеко не тривиальным.

▷ *Задача 14. Найти уравнение состояния для газа невзаимодействующих доменных стенок, движущихся с нерелятивистскими скоростями. Указание: использовать соображения, аналогичные приведённым в разделе 12.3.2.*

В заключение отметим, что помимо возможного влияния на темп расширения Вселенной доменные стенки могли бы приводить и к другим наблюдаемым эффектам. В частности, поскольку доменная стенка является источником гравитационного потенциала, то реликтовые фотоны, распространяющиеся по Вселенной с доменной стенкой массы  $M_{DW} = \eta H_0^{-2}$ , испытывали бы дополнительный сдвиг частоты

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \sim \frac{M_{DW}}{H_0^{-1}} \frac{1}{M_{Pl}^2} = \frac{\eta}{M_{Pl}^2 H_0} .$$

Это явление привело бы к искажению спектра реликтового излучения

$$\frac{\delta T}{T} \propto \frac{\delta\omega}{\omega} ,$$

что не наблюдается. Отсюда следуют ограничения на параметры моделей с доменными стенками.

▷ *Задача 15. В простейшей модели (12.51) вычислить изменение за время порядка  $H_0^{-1}$  частоты фотона, траектория которого: (i) пересекает, (ii) не пересекает доменную стенку. Исходя из утверждения, что наблюдаемый спектр реликтового излучения  $\delta T/T$  соответствует теоретическим предсказаниям с точностью примерно 1%, получить ограничение на константу самодействия скалярного поля, полагая  $v = 100 \text{ ГэВ}$ . Сравнить с ограничением, следующим из требования малости вклада доменной стенки в полную плотность энергии Вселенной (12.56).*

## 12.5 \*Текстуры

С точки зрения космологии интерес представляют и нестабильные топологически нетривиальные конфигурации полей — текстуры. Они также возникают в ранней Вселенной в результате фазовых переходов, сопровождающихся спонтанным нарушением симметрии. Роль топологии здесь состоит в том, что для текстур, как и для других топологических дефектов, работает механизм Киббла. С другой стороны, в силу своей нестабильности текстуры не доживают до современной эпохи, и их появление в ранней Вселенной можно обнаружить лишь косвенно. Одна из возможностей здесь состоит в том, что текстуры вносят вклад в образование первичных возмущений плотности вещества, из которых в конечном итоге образуются структуры — галактики, скопления галактик и т.д. Следует сразу сказать, что до сих пор каких-либо эффектов, связанных с текстурами, экспериментально не обнаружено.

Как и в случаях со стабильными топологическими дефектами, которым посвящены предыдущие разделы этой Главы, текстуры могут появляться в моделях со спонтанным нарушением глобальных или локальных (калибровочных) симметрий. В качестве примера первого типа рассмотрим модель со спонтанным нарушением глобальной симметрии  $O(4) \rightarrow O(3)$  и одним скалярным вещественным четырёхплетом  $\varphi^a$ ,  $a = 1, \dots, 4$ ,

$$\mathcal{L} = \int \sqrt{-g} d^4x \left[ \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi^a \partial_\mu \varphi^a - \frac{\lambda}{4} (\varphi^a \varphi^a - v^2)^2 \right]. \quad (12.57)$$

При нулевой температуре симметрия нарушена, и вакуум можно выбрать в виде

$$\langle \varphi^a \rangle = v \delta_4^a. \quad (12.58)$$

Поля  $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$  при этом остаются безмассовыми — это голдстоуновские бозоны<sup>17</sup>, соответствующие нарушению глобальной симметрии  $O(4) \rightarrow O(3)$ . Поле  $h$ , определяемое как  $h = \varphi^4 - v$ , приобретает массу  $m_h$ , которую мы будем считать достаточно большой.

▷ *Задача 16. Построив квадратичное действие для возмущений над вакуумом (12.58), проверить сделанное утверждение о спектре частиц в модели (12.57).*

Скалярный потенциал модели (12.57) равен нулю, если

$$\varphi^a \varphi^a = v^2. \quad (12.59)$$

Это условие определяет многообразие вакуумов; в данном случае оно представляет собой трёхмерную сферу  $S_{vac}^3$ . Конфигурации поля  $\varphi^a(\mathbf{x})$  с размерами, значительно превышающими  $m_h^{-1}$ , имеют небольшую плотность энергии, если условие (12.59) выполняется в каждой точке пространства. Такие конфигурации имеют конечную полную энергию, если градиент  $\varphi^a$  стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ , т.е.  $\varphi^a(\mathbf{x})$  стремится к постоянному значению, не зависящему ни от углов, ни от  $r$ . Без ограничения общности можно считать, что

$$\varphi^a(r \rightarrow \infty) = v \delta_4^a.$$

<sup>17</sup>Присутствие в теории безмассовых частиц — голдстоуновских бозонов — неизбежно в моделях со спонтанным нарушением глобальных симметрий и может привести к ряду феноменологических трудностей, которые мы здесь оставляем без обсуждения.

С точки зрения топологии это означает, что наше трёхмерное пространство эффективно имеет топологию трёхмерной сферы  $S^3_{space}$ , поскольку при описании полевых конфигураций точки на пространственной бесконечности отображаются в одну и ту же точку многообразия вакуумов  $S^3_{vac}$ . Описанные только что конфигурации поля  $\varphi^a(\mathbf{x})$  задают, таким образом, отображения 3-сферы  $S^3_{space}$  в 3-сферу  $S^3_{vac}$ , которые могут иметь нетривиальную топологию. Топологическое число при этом является числом накрытий сферы  $S^3_{vac}$  при отображении  $S^3_{space} \rightarrow S^3_{vac}$ ; это число является целым.

Простейшая топологически-нетривиальная конфигурация имеет вид

$$\varphi = v \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin \chi \\ \sin \phi \sin \theta \sin \chi \\ \cos \theta \sin \chi \\ \cos \chi \end{pmatrix}, \quad (12.60)$$

где  $\phi$  и  $\theta$  — сферические углы в нашем трёхмерном пространстве, а функция  $\chi(r)$  удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \chi(r=0) &= 0, \\ \chi(r \rightarrow \infty) &= \pi. \end{aligned}$$

Такая конфигурация имеет единичное топологическое число. Это и есть текстура с минимальным топологическим числом.

▷ *Задача 17.* Убедиться, что для конфигурации (12.60) топологическое число, в данном случае являющееся индексом отображения  $S^3 \rightarrow S^3$ , равно 1.

Конфигурация (12.60) не является стабильной. Энергия этой статической конфигурации полностью определяется градиентным членом

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x \nabla \varphi^a \cdot \nabla \varphi^a. \quad (12.61)$$

Поскольку в результате перемасштабирования координат  $x \rightarrow x' = \alpha x$  энергия (12.61) также изменяется пропорционально масштабу  $\alpha$ , т.е.  $E \rightarrow E' = \alpha E$ , то данная полевая конфигурация нестабильна относительно сжатий.<sup>18</sup> Образовавшись, текстура начнёт сжиматься.

Для сжавшегося до размера порядка  $m_h^{-1}$  узла условие (12.59) уже может не выполняться, и узел исчезнет в результате либо классической эволюции, либо квантового туннельного процесса. Накопленная в узле энергия перейдёт в энергию безмассовых частиц — голдстоуновских бозонов.

Отметим, что в случае статического трёхмерного пространства, представляющего собой сферу  $S^3$  не только топологически, но и геометрически, конфигурации типа текстуры могут не коллапсировать из-за ненулевой пространственной кривизны. Соответствующее решение имеет вид (12.60), но теперь  $\chi$  совпадает с координатой на  $S^3_{space}$ , так что метрика пространства имеет вид

$$d\Omega^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (12.62)$$

При этом решение (12.60) нетривиально на всей 3-сфере  $S^3_{space}$ , причём вектор (12.60) можно рассматривать как нормаль к сфере  $S^3_{space}$ , погруженной в фиктивное четырёхмерное евклидово пространство.

<sup>18</sup> Данное свойство иллюстрирует тот факт, что топология даёт необходимое, но не достаточное условие существования нетривиальных стабильных конфигураций.

► Задача 18. Показать, что конфигурация (12.60) является решением в пространстве с метрикой (12.62).

Приведём эвристический аргумент в пользу стабильности решения (12.60) в пространстве с метрикой (12.62). Рассмотрим полевую конфигурацию вида

$$\varphi = v \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \sin(\chi/\alpha) \\ \sin \phi \sin \theta \sin(\chi/\alpha) \\ \cos \theta \sin(\chi/\alpha) \\ \cos(\chi/\alpha) \end{pmatrix}, \quad \varphi = v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.63)$$

для  $0 < \chi \leq \pi\alpha$ ,                      для  $\pi\alpha < \chi \leq \pi$ ,

которая имеет число намоток 1 и интерполирует между нетривиальной и тривиальной вакуумными конфигурациями (12.60) и (12.58), когда  $\alpha$  изменяется от 1 до 0. Энергия конфигурации (12.63) равна

$$\begin{aligned} E &= 4\pi \cdot a \cdot v^2 \cdot \int_0^{\pi\alpha} \left[ \frac{1}{\alpha^2} + 2 \frac{\sin^2(\chi/\alpha)}{\sin^2 \chi} \right] \sin^2 \chi d\chi \\ &= 2\pi^2 \cdot a \cdot v^2 \left[ \frac{1}{2\alpha} + \alpha - \frac{\sin 2\pi\alpha}{4\pi\alpha^2} \right], \end{aligned} \quad (12.64)$$

Поскольку и  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  представляют собой минимумы энергии, то обе предельные конфигурации (т.е. конфигурация с  $\alpha = 0$ , и конфигурация с  $\alpha = 1$ ) являются стабильными и отделены энергетическим барьером друг от друга.

Рассмотрим космологическую эволюцию скалярного поля с действием (12.57), для которого текстуры не являются стабильными. При высокой температуре глобальная  $SO(4)$  симметрия восстановлена, однако с понижением температуры происходит спонтанное нарушение симметрии, приводящее к тому, что скалярное поле приобретает ненулевое вакуумное среднее, различное, вообще говоря, в разных пространственных областях. Это приводит к образованию текстур во Вселенной (механизм Киббля). В процессе дальнейшего остывания Вселенной узлы скалярного поля сжимаются и в конце концов пропадают, излучая голдстоуновские бозоны. В результате плотность энергии, накопленной в узлах, падает с уменьшением температуры, а области пространства, в которых значения скалярного поля оказываются скоррелированными, растут, пока не заполняют всю причинно-связанную на тот момент часть Вселенной, т.е. пока их линейный размер не становится порядка размера горизонта  $H^{-1}$  на тот момент времени. Это достаточно быстрый процесс по сравнению с темпом расширения Вселенной  $H^{-1}$ , поэтому, как и в случае образования других дефектов, можно считать, что характерный размер текстур сразу после фазового перехода составляет  $H^{-1}(T_c)$ , где  $T_c$  — температура фазового перехода. При этом во Вселенной имеется порядка одной текстуры в объёме  $H^{-3}(T_c)$ .

В дальнейшем корреляционная длина растёт со временем, оставаясь порядка размера горизонта. Так же растёт характерный размер текстур. Поскольку плотность энергии узла определяется, в основном, градиентным членом, для плотности энергии в текстуре имеем оценку

$$\delta\rho \sim (\nabla\varphi)^2 \sim v^2 H^2(t) \sim v^2 t^{-2}.$$

Плотность энергии фона — обычного вещества — как на радиационно-доминированной стадии, так и на стадии доминирования материи падает со временем по тому же закону  $\rho \sim t^{-2}$ , поэтому текстуры приводят к относительным флуктуациям плотности энергии постоянной величины, не зависящей от пространственного размера флуктуаций,

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \text{const} \frac{v^2}{M_{Pl}^2}.$$



Важно, что флуктуации такой амплитуды имеются в широком диапазоне пространственных размеров, поскольку в ходе эволюции Вселенной в ней существовали текстуры всех размеров, начиная с  $H^{-1}(T_c)$ . Таким образом, в самом первом приближении спектр флуктуаций плотности энергии будет *масштабно-инвариантным*, что согласуется с наблюдениями.

Для спектра флуктуаций важно, что динамика поля  $\varphi$  отличается от обычной динамики безмассового поля, для которого флуктуации различных длин волн не взаимодействуют друг с другом. В частности, корреляционная длина не остаётся неизменной в сопутствующей системе координат, и нелинейная динамика обеспечивает “отделение” узлов от гладких полевых конфигураций, что в конечном итоге действительно приводит к формированию спектра флуктуаций, близкого к масштабнo-инвариантному. Однако предположение о том, что именно текстуры ответственны за формирование первичных возмущений плотности приводит к неправильному предсказанию свойств анизотропии реликтового излучения: спектр анизотропии качественно совпадает со спектром, получаемым в модели с космическими струнами, см. рис. 12.6. Поэтому текстуры как основной источник первичных возмущений плотности исключены из наблюдений[38].

▷ *Задача 19. Оценить плотность фона голдстоуновских бозонов в модели (12.60).*

*Для каких значений  $v$  этот фон мог бы привести к искажению предсказаний стандартного первичного нуклеосинтеза? Для  $v = 10^{16}$  ГэВ оценить долю голдстоуновских бозонов в плотности энергии релятивистской компоненты вещества в современной Вселенной.*

## 12.6 \*Гибридные топологические дефекты

Помимо топологических дефектов одного типа, в ряде моделей возможно также образование структур, состоящих из топологических дефектов разной размерности. Такое случается, если спонтанное нарушение симметрии в теории происходит в два (или несколько) этапов. На каждом из этапов имеет место перестройка вакуума, и для образования структуры из дефектов разного типа необходимо, чтобы каждое из вакуумных многообразий, образующихся в результате этих перестроек, допускало существование стабильных топологических дефектов. С точки зрения топологии это означает, что на горячей стадии развития Вселенной с понижением температуры происходит цепочка фазовых переходов

$$G \xrightarrow{T_1} H_1 \xrightarrow{T_2} H_2 \longrightarrow \dots, \quad T_1 > T_2 > \dots,$$

причём для образующихся вакуумных многообразий существуют нетривиальные гомотопические группы

$$\pi_{N_1}(G/H_1) \neq 0, \quad \pi_{N_2}(G/H_2) \neq 0, \dots$$

Примерами возможных структур являются: “ворс” — конфигурации струн с концами, расположенными на доменных стенках (и, вообще говоря, перемещающимися вдоль стенок), “ожерелья” — струны с нанизанными на них монополями, и др. Так, ожерелья образуются в моделях с двумя последовательными фазовыми переходами

$$\text{I этап : } G \rightarrow G' \times U(1)$$

$$\text{II этап : } G' \times U(1) \rightarrow H \times \mathbb{Z}_N$$

На первом этапе происходит образование монополей, а на втором между монополями натягиваются струны, причём ожерелья отвечают случаю  $N = 2$ , когда каждый монополю оказывается связанным лишь с двумя другими монополями.

Эволюция гибридных конфигураций, вообще говоря, отличается от эволюций составляющих топологических дефектов. Мы не будем здесь обсуждать это подробно; отметим лишь, что с точки зрения космологических проявлений наиболее интересными представляются именно ожерелья.

## 12.7 \*Нетопологические солитоны: Q-шары

Помимо рассмотренных в предыдущих разделах солитонных решений существуют и другие типы локализованных конфигураций полей, чья стабильность на космологических временах обусловлена причинами, непосредственно не связанными с топологией. В физике частиц популярным примером солитонов такого типа являются Q-шары, которые являются стабильными благодаря существованию сохраняющегося глобального заряда и отсутствию безмассовых заряженных частиц.

### 12.7.1 Модель с двумя полями

Простая модель, в которой имеются нетопологические солитоны типа Q-шаров, содержит действительное скалярное поле  $\chi$  и комплексное скалярное поле  $\phi$ . Лагранжиан модели имеет вид

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - V(\chi) - h^2 \chi^2 |\phi|^2, \quad (12.65)$$

причём потенциал  $V(\chi)$  имеет абсолютный минимум при

$$\chi = v \neq 0, \quad (12.66)$$

так что

$$V(\chi = v) = 0, \quad V(\chi = 0) = V_0 > 0.$$

В вакууме (12.66) поле  $\phi$  имеет массу

$$m_\phi = hv,$$

поле  $\delta\chi \equiv \chi - v$  также будем считать массивным.

Лагранжиан (12.65) инвариантен относительно глобальных фазовых преобразований (группа симметрии  $U(1)$ )

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha} \phi^*, \quad (12.67)$$

причём вакуум (12.66) с  $\phi = 0$  инвариантен относительно этих преобразований. В соответствии с этим свойством в модели имеется сохраняющийся заряд

$$Q = i \int d^3\mathbf{x} (\phi \dot{\phi}^* - \phi^* \dot{\phi}). \quad (12.68)$$

Зададимся вопросом о состоянии с минимальной энергией при фиксированном заряде  $Q$ . Одно из состояний с зарядом  $Q$  — это набор покоящихся  $\phi$ -частиц (в количестве

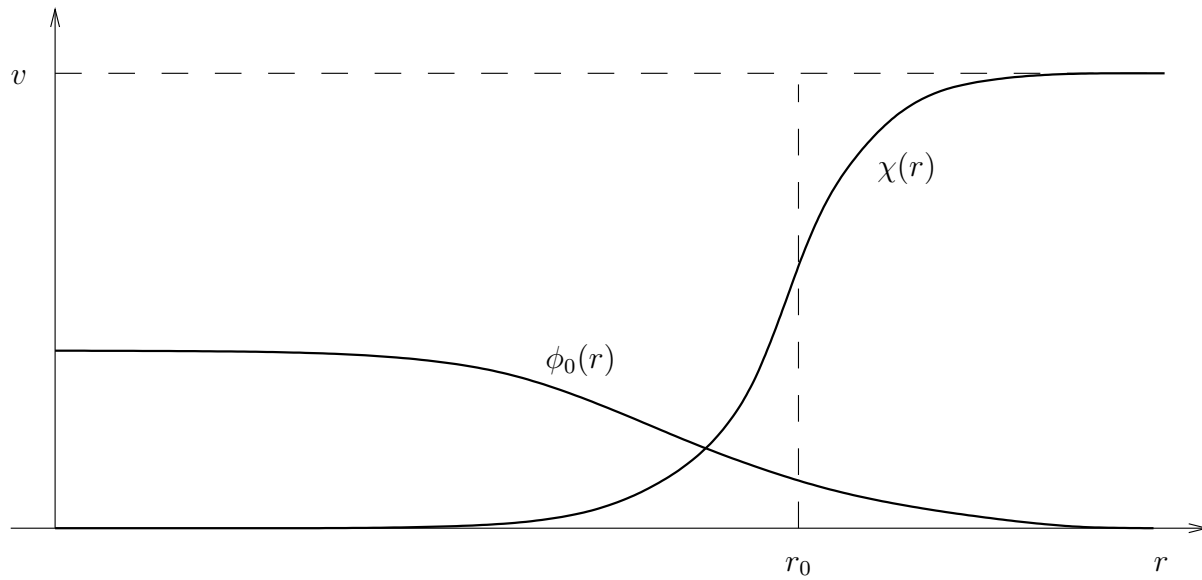


Рис. 12.7: Конфигурация  $Q$ -шара: профиль поля  $\chi(r)$  и волновая функция  $\phi$ -частицы  $\phi_0(r)$ .

$Q$  штук) в вакууме (12.66). Энергия этого состояния равна  $Q \cdot m_\phi$ . Структура конкурирующего с ним состояния  $Q$ -шара — следующая. В области размера  $r_0$ , который нам предстоит найти, поле  $\chi$  принимает нулевое значение, а вне этой области реализуется вакуум (12.66); вблизи границы этой области  $\chi(r)$  гладко меняется от нуля до  $v$  (см. рис. 12.7).

Все  $Q$  частиц  $\phi$  находятся внутри этой области на нижнем уровне энергии, так что их энергия равна по порядку величины  $Q/r_0$ : внутри  $Q$ -шара частицы  $\phi$  безмассовые, а минимальный импульс каждой из них имеет порядок  $1/r_0$ , такой же порядок имеет и энергия частиц  $\phi$ , т.е.  $E_\phi = b/r_0$ , где  $b$  — константа порядка единицы. Полная энергия  $Q$ -шара равна, таким образом,

$$E = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \cdot V_0 + 4\pi r_0^2 \cdot \sigma + b \frac{Q}{r_0}, \quad (12.69)$$

где первое слагаемое — энергия поля  $\chi$  внутри  $Q$ -шара (напомним, что  $V_0 = V(\chi = 0)$ ), а второе — энергия, связанная с переходной областью на границе  $Q$ -шара, поверхностная плотность которой (поверхностное натяжение) равна  $\sigma$ . Мы увидим ниже (см. (12.71)), что для достаточно больших  $Q$  размер  $Q$ -шара велик, так что поверхностным вкладом можно пренебречь, и энергия  $Q$ -шара равна

$$E(r_0) = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \cdot V_0 + b \frac{Q}{r_0}. \quad (12.70)$$

Минимизация этого выражения по  $r_0$  определяет радиус  $Q$ -шара при заданном  $Q$ ,

$$r_0(Q) = \left( \frac{bQ}{4\pi V_0} \right)^{1/4}, \quad (12.71)$$

при этом его энергия (масса) равна

$$E(r_0(Q)) \equiv M_Q = \text{const} \cdot V_0^{1/4} Q^{3/4}, \quad (12.72)$$

с константой порядка единицы. Видно, что энергия  $Q$ -шара растёт с  $Q$  медленнее, чем энергия  $m_\phi Q$  свободных частиц  $\phi$  в вакууме (12.66), так что при достаточно больших  $Q$  наименьшим по энергии состоянием действительно является  $Q$ -шар. Он стабилен относительно распада на частицы  $\phi$  при

$$M_Q < m_\phi Q, \quad (12.73)$$

т.е. при  $Q > Q_c$ , где критическое значение заряда по порядку величины равно

$$Q_c \sim \frac{V_0}{m_\phi^4}. \quad (12.74)$$

Отметим, что для потенциала вида  $V(\chi) = \lambda \cdot (\chi^2 - v^2)^2$  оценка (12.74) принимает вид

$$Q_c \sim \frac{\lambda}{h^4},$$

так что критическое значение заряда велико при  $\lambda \sim h^2 \ll 1$ , т.е. в теории со слабой связью и без специальной подстройки параметров. Если же оценка (12.74) формально приводит к  $Q_c \lesssim 1$  (например, при  $\lambda \lesssim h^4$ ), то приведённое выше рассмотрение неприменимо для критических  $Q$ -шаров, и для получения реального значения  $Q_c$  необходимо более аккуратное исследование. Отметим ещё, что для приведённого вывода существенны два обстоятельства. Во-первых, частицы  $\phi$  предполагались легчайшими частицами, заряженными относительно глобальной группы симметрии  $U(1)$ ; в противном случае в оценке (12.74) вместо  $m_\phi$  фигурировала бы масса легчайшей из частиц, заряженных по  $U(1)$ . Во-вторых, существенно, что частицы  $\phi$  являются бозонами, и внутри  $Q$ -шара они могут находиться на одном энергетическом уровне.

▷ *Задача 20.* Пусть заряженные относительно  $U(1)$  частицы  $\phi$  — это фермионы.

*Являются ли стабильными  $Q$ -шары, аналогичные рассмотренным выше, в теориях со слабой связью и с  $m_\phi \sim m_\chi$ , где  $m_\chi$  — масса частицы  $\chi$  в вакууме (12.66)? Указание: считать для определённости, что  $V(\chi) = \lambda \cdot (\chi^2 - v^2)^2$ ,  $\lambda \ll 1$ .*

Для дальнейшего полезно заметить, что описание  $Q$ -шаров возможно целиком в рамках классической теории поля. Такое описание в действительности адекватно при больших значениях заряда  $Q$ . В рамках классической теории поля вместо рассмотренных частиц  $\phi$  внутри  $Q$ -шара следует рассмотреть классическую конфигурацию скалярных полей  $\phi$  и  $\chi$ . Для статического поля  $\chi$  и зависящего от времени поля  $\phi$  энергия конфигурации равна

$$E = \int d^3\mathbf{x} \left( \dot{\phi}^* \cdot \dot{\phi} + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + h^2 \chi^2 |\phi|^2 + \frac{1}{2} \nabla \chi \cdot \nabla \chi + V(\chi) \right).$$

Для построения  $Q$ -шара требуется найти минимум этого функционала при заданном значении заряда (12.68). В качестве анзаца для  $\chi(r)$  выберем по-прежнему конфигурацию рис. 12.7, а для  $\phi(\mathbf{x}, t)$  запишем

$$\phi(\mathbf{x}, t) = A e^{i\omega t} f(\mathbf{x}), \quad (12.75)$$

где  $A$  — неизвестная пока амплитуда, а  $f(\mathbf{x})$  нормирована условием

$$\int |f(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = 1. \quad (12.76)$$

С учётом этого условия энергия и заряд конфигурации равны

$$E = \omega^2 A^2 + A^2 \cdot \mathcal{E}_f + \frac{4}{3} \pi r_0^3 V_0, \quad (12.77)$$

$$Q = 2\omega A^2, \quad (12.78)$$

где мы вновь пренебрегли поверхностным вкладом в энергию поля  $\chi$  и обозначили

$$\mathcal{E}_f = \int d^3\mathbf{x} (|\nabla f|^2 + h^2 \chi^2(r) |f|^2).$$

Функцию  $f(\mathbf{x})$  выберем так, чтобы она минимизировала  $\mathcal{E}_f$  при условии нормировки (12.76), т.е.

$$-\Delta f + h^2 \chi^2(r) f = \lambda^2 f. \quad (12.79)$$

где  $\lambda$  — множитель Лагранжа. Уравнение (12.79) совпадает со стационарным уравнением Шредингера в потенциале  $h^2 \chi^2(r)$ ; наименьшее собственное значение  $\lambda$  и определяет  $\mathcal{E}_f$ :

$$\mathcal{E}_f = \lambda^2.$$

Таким образом,  $f(\mathbf{x})$  совпадает с волновой функцией основного состояния частицы  $\phi$  в  $Q$ -шаре ( $f_0(r)$  на рис. 12.7), при этом

$$\lambda = E_\phi = \frac{b}{r_0},$$

где  $b$  — тот же коэффициент, что и в (12.69).

Итак, функционал энергии (12.77) имеет вид

$$E = \omega^2 A^2 + A^2 \cdot \frac{b^2}{r_0^2} + \frac{4}{3} \pi r_0^3 V_0. \quad (12.80)$$

Нам осталось найти минимум этого функционала по остающимся переменным  $\omega$ ,  $A$  и  $r_0$  при фиксированном значении заряда (12.78). Из (12.78) получим  $\omega = Q/(2A^2)$ , после чего минимизация (12.80) по  $A$  даёт

$$A^2 = \frac{Q r_0}{2b},$$

при этом  $\omega = b/r_0$ , как и следовало ожидать, а энергия как функция единственного оставшегося параметра  $r_0$  имеет вид (12.70). Дальнейший анализ совпадает с приведённым выше, так что подход в рамках классической теории поля эквивалентен квантовомеханическому подходу.

Обсудим простой механизм, приводящий к космологической генерации  $Q$ -шаров рассматриваемого типа в количестве, необходимом для объяснения ими тёмной материи. Пусть при высоких температурах среднее значение поля  $\chi$  равно нулю, а при понижении температуры до критического значения  $T_c$  происходит фазовый переход

первого рода, в результате которого поле  $\chi$  приобретает среднее значение  $\chi_c$ . Предположим, что в новой фазе массы частиц  $\phi$  велики по сравнению с температурой<sup>19</sup>

$$m_\phi(T_c) = h\chi_c \gg T_c. \quad (12.81)$$

Предположим, наконец, что во Вселенной к моменту фазового перехода имелаась  $Q$ -асимметрия, т.е. была отлична от нуля величина

$$\eta_\phi = \frac{n_\phi - n_{\bar{\phi}}}{n_\phi + n_{\bar{\phi}}} \sim \frac{n_\phi - n_{\bar{\phi}}}{n_\gamma}. \quad (12.82)$$

(считаем  $\phi$  легчайшей частицей, несущей глобальный  $U(1)$  заряд).

Как мы обсуждали в разделе 10.1, фазовый переход первого рода происходит путём образования единичных пузырей новой фазы в хаббловском объёме, которые затем расширяются и сливаются. В результате остаются островки фазы с  $\chi = 0$ . Именно из этих островков и образуются  $Q$ -шары: в силу (12.81) частицы  $\phi$  не могут проникать из областей с  $\chi = 0$  в области с  $\chi = \chi_c$ , т.е.  $Q$ -асимметрия (12.82) оказывается в основном сосредоточенной в островках старой фазы, несущих, таким образом, большой заряд  $Q$ . Для грубой оценки будем считать, что остаётся порядка одного островка старой фазы с  $\chi = 0$  в хаббловском объёме<sup>20</sup>, т.е. плотность числа образовавшихся  $Q$ -шаров при температуре  $T_c$  оценивается величиной

$$n_Q(T_c) \sim H^3(T_c) = \frac{T_c^6}{M_{Pl}^{*3}}.$$

В один такой  $Q$ -шар собирается заряд из хаббловского объёма, опять-таки при температуре  $T_c$ , так что для типичного  $Q$ -заряда образовавшихся шаров имеем оценку

$$\begin{aligned} Q &\sim \left( \eta_\phi \cdot n_\gamma \cdot \frac{1}{H^3} \right)_{T=T_c} \\ &\sim \eta_\phi \cdot \left( \frac{M_{Pl}^*}{T_c} \right)^3. \end{aligned} \quad (12.83)$$

Массы таких  $Q$ -шаров даются формулой (12.72). Учитывая сохранение отношения плотности числа  $Q$ -шаров к плотности энтропии, получим оценку для современной плотности числа  $Q$ -шаров

$$n_{Q,0} = \frac{n_Q(T_c)}{s(T_c)} \cdot s_0 \sim \frac{n_Q(T_c)}{g_*(T_c)T_c^3} \cdot s_0,$$

т.е.

$$n_{Q,0} \sim \sqrt{g_*} \frac{T_c^3}{M_{Pl}^3} \cdot s_0. \quad (12.84)$$

Воспользовавшись (12.72) и (12.83) оценим плотность энергии (массы)  $Q$ -шаров в современной Вселенной

$$\begin{aligned} \rho_{Q,0} &= M_Q \cdot n_{Q,0} \\ &\sim V_0^{1/4} \eta_\phi^{3/4} g_*^{-5/4} \left( \frac{T_c}{M_{Pl}} \right)^{3/4} \cdot s_0. \end{aligned} \quad (12.85)$$

<sup>19</sup>Это в действительности является довольно нетривиальным предположением. В соответствии с (10.34), (10.29) требуется, в частности, чтобы константа самодействия поля  $\phi$  была мала,  $\lambda \ll h^4$ .

<sup>20</sup>Это не совсем так, например из-за того, что скорость стенок пузырей в среде заметно меньше скорости света.

Для окончательной оценки (весьма грубой) положим  $V_0^{1/4}$  и  $T_c$  равными энергетическому масштабу  $v$ , имеющемуся в модели, вспомним, что  $s_0 \sim 10^3 \text{ см}^{-3}$  и положим  $g_* \sim 100$ . В итоге получим

$$\rho_{Q,0} \sim 3 \cdot 10^{-9} \cdot \eta_\phi^{3/4} \left( \frac{v}{1 \text{ ТэВ}} \right)^{7/4} \frac{\text{ГэВ}}{\text{см}^3}.$$

Видно, что для объяснения тёмной материи требуется достаточно большой энергетический масштаб  $v$ : даже при  $\eta_\phi \sim 1$  необходимое значение  $\rho_{Q,0} \sim 0.2\rho_c \sim 10^{-6} \text{ ГэВ/см}^3$  получается при  $v$  порядка нескольких десятков ТэВ. При таких параметрах плотность числа  $Q$ -шаров (12.84) составляет

$$n_{Q,0} \simeq \frac{1}{(2 \cdot 10^{13} \text{ см})^3},$$

т.е. среднее расстояние между  $Q$ -шарами оказывается порядка размера земной орбиты. Массы  $Q$ -шаров при этом равны

$$M_Q = \frac{\rho_{Q,0}}{n_{Q,0}} \sim 10^4 \text{ тонн}.$$

В соответствии с (12.83) и (12.71) заряд и размер такого  $Q$ -шара оцениваются как

$$Q \sim 10^{40}, \quad r_0 \sim 0.05 \text{ нм}.$$

Для бóльших значений энергетического масштаба  $v$  (и соответственно,  $T_c$ )  $Q$ -шары образуются раньше, их современная концентрация больше, а необходимая для обеспечения тёмной материи масса каждого отдельного  $Q$ -шара — меньше.

▷ *Задача 21.* При каком значении  $v$  средняя плотность образованных в результате обсуждаемого механизма  $Q$ -шаров составит  $n_{Q,0} = (10^8 \text{ см})^{-3}$ , так что для обеспечения тёмной материи масса каждого из них должна быть равна  $M_Q = \rho_{CDM}/n_{Q,0} \sim 10^{-6} \text{ г}$ ? Оценить, какое требуется при этом значение зарядовой асимметрии  $\eta_\phi$ .

## 12.7.2 Модели с плоскими направлениями

Несколько иной класс  $Q$ -шаров имеется в моделях с достаточно плоским скалярным потенциалом. Простейшая из них — это модель комплексного скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(\phi^* \phi), \quad (12.86)$$

где потенциал  $V(\phi^* \phi)$  имеет абсолютный минимум в нуле и обладает определёнными свойствами, о которых пойдёт речь ниже. Лагранжиан (12.86) инвариантен относительно глобальных фазовых преобразований (12.67), причём вакуум  $\phi = 0$  инвариантен относительно этих преобразований.

Уравнения движения для скалярного поля с лагранжианом (12.86) имеют вид:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = 0 \quad (12.87)$$

(и аналогичное эрмитово сопряжённое уравнение), а полная энергия определяется интегралом

$$E = \int [|\partial_0 \phi|^2 + |\partial_i \phi|^2 + V(\phi^* \phi)] d^3x. \quad (12.88)$$

При выключении самодействия уравнение (12.87) переходит в уравнение Клейна–Гордона

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi^* = 0 ,$$

описывающее свободные заряженные скалярные частицы с массой

$$m \equiv \sqrt{\frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \phi^*}(0)} . \quad (12.89)$$

По аналогии с (12.75), мы будем интересоваться другим решением уравнения (12.87) — осциллирующей (во внутреннем пространстве) сферически симметричной конфигурацией вида

$$\phi = e^{i\omega t} f(r) , \quad \phi^* = e^{-i\omega t} f(r) , \quad (12.90)$$

где  $r$  — радиальная координата. Подставляя этот анзац в уравнение (12.87), получим

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{df}{dr} - \frac{d}{df} \left( \frac{1}{2} \omega^2 f^2 - \frac{1}{2} V(f) \right) . \quad (12.91)$$

Это уравнение формально совпадает со вторым законом Ньютона для материальной точки с координатой  $f$ , движущейся с трением в потенциале

$$V_{eff}(f) = \frac{1}{2} \omega^2 f^2 - \frac{1}{2} V(f) ,$$

причём радиальная координата играет роль времени. Асимптотику функции  $f(r)$  при больших  $r$  определим из требования конечности энергии (12.86), которая на конфигурации (12.90) принимает вид

$$E = 4\pi \int [\omega^2 f^2 + (\partial_r f)^2 + V(f)] r^2 dr . \quad (12.92)$$

Положив значение потенциала  $V(\phi)$  в минимуме  $\phi = 0$  равным нулю, т.е.

$$V(0) = 0 , \quad V(f \neq 0) \geq 0 ,$$

получим из требования конечности интеграла (12.92), что

$$f(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 . \quad (12.93)$$

Это означает, что искомое решение описывает локализованный объект — солитон. Он и является  $Q$ -шаром.

Противоположная асимптотика при нулевом  $r$  определяется из требования конечности “силы трения” в уравнении (12.91), что даёт

$$\left[ \frac{df}{dr}(r \rightarrow 0) \right] \propto r^{1+\epsilon} , \quad \epsilon \geq 0 . \quad (12.94)$$

Профиль  $Q$ -шара  $f(r)$  описывается решением уравнения второго закона Ньютона (12.91) для “частицы”, начинающей движение с нулевой скоростью в “момент времени”  $r = 0$  из некоторой точки

$$f_0 = f(r = 0) \quad (12.95)$$

и скатывающейся по потенциалу  $V_{eff}(f)$  к нулевому значению  $f(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ .



Ясно, что для существования такого решения, во-первых, эффективный потенциал  $V_{eff}(f)$  должен иметь минимум при  $f = 0$ , а во-вторых, в начале своего движения точка должна обладать некоторой положительной потенциальной энергией, поскольку в конце движения её энергия равна нулю, а в процессе движения часть энергии расходуется на работу против силы трения. Поэтому начальное значение поля обязано удовлетворять неравенству

$$\frac{V(f_0)}{f_0^2} \equiv \omega_0^2 \leq \omega^2. \quad (12.96)$$

Область пространства  $r \lesssim r_0$ , где функция  $f(r)$  существенно отлична от нуля,  $0 < f(r) \lesssim f_0$ , естественно назвать внутренней областью этого сгустка поля, а область  $r \gtrsim r_0$ , где  $f(r) \simeq 0$ , — внешней областью. Величину  $r_0$  естественно назвать радиусом сгустка.

Получившуюся макроскопическую конфигурацию называют  $Q$ -шаром потому, что в ней содержится ненулевой (и обычно довольно большой) заряд (12.68) относительно глобальной группы  $U(1)$ ,

$$Q = 8\pi\omega \int_0^\infty f^2(r)r^2 dr \quad (12.97)$$

$$= \frac{8\pi}{3}\omega f_0^2 r_0^3, \quad (12.98)$$

где при получении равенства (12.98) мы положили

$$f(r) = f_0 \cdot \theta(r_0 - r).$$

Это является хорошим приближением, если оправдано тонкостенное приближение для описания сгустка, т.е. если область  $\Delta r$ , где существенно меняется  $f(r)$ , мала по сравнению с линейным размером сгустка,  $\Delta r \ll r_0$ . Отметим, что равенство (12.98) можно считать формальным определением величины  $r_0$  — расстояния, на котором набирается интеграл (12.97).

Энергия (12.92) для  $Q$ -шара может быть приближённо оценена как

$$E \approx \frac{4\pi}{3}r_0^3 [\omega^2 f_0^2 + V(f_0)] , \quad (12.99)$$

где мы пренебрегли вкладом градиентного члена  $(\nabla f)^2$ , который набирается на стенке шара, а поэтому заведомо мал для достаточно больших  $Q$ -шаров. Размер  $Q$ -шара можно определить, потребовав минимума энергии (12.99) как функции размера шара при фиксированном заряде (12.98). Для этого из (12.98) выразим частоту  $\omega$  через  $Q$  и  $r_0$  и подставим результат в (12.99),

$$E \approx \frac{4\pi}{3}r_0^3 V(f_0) + \frac{3Q^2}{16\pi r_0^3 f_0^2}.$$

Приравнивая нулю производную этой функции по  $r_0$ , получим

$$\frac{4\pi}{3}r_0^3 = \frac{Q}{2f_0} \frac{1}{\sqrt{V(f_0)}}.$$

Окончательно, экстремальное по  $r_0$  значение энергии при большом заряде  $Q$  равно

$$E = \frac{Q}{f_0} \sqrt{V(f_0)},$$

а частота  $\omega$  стремится к критическому значению  $\omega_0$  (см. (12.96)). Наконец, энергия стабильного стационарного решения должна быть минимальна как функция оставшегося параметра  $f_0$  — значения поля в центре  $Q$ -шара. Это возможно, если функция  $V(f)/f^2$  достигает нетривиального минимума при конечном  $f = f_0 \neq 0$ ,

$$\min_f \left[ \frac{V(f)}{f^2} \right] = \frac{V(f_0)}{f_0^2} \neq 0, \quad f_0 \neq 0, \quad f_0 \neq \infty. \quad (12.100)$$

Именно это значение поля реализуется в центре солитона.

Условие существования нетривиального минимума функции  $V(f)/f^2$ , вместе с глобальным минимумом потенциала  $V(f)$  при  $f = 0$ , является весьма нетривиальным, особенно если учесть, что  $V(f)$  в действительности является функцией  $f^2 = \phi^* \phi$  (последнее необходимо для инвариантности относительно глобальной группы  $U(1)$ ). Например, обычно используемый перенормируемый потенциал  $V(\phi) = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2$  этому условию не удовлетворяет. Для существования  $Q$ -шаров необходимы более экзотические скалярные потенциалы, являющиеся достаточно плоскими по крайней мере в некоторой области изменения поля. Мы коротко обсудим в дальнейшем, в каких моделях возникают потенциалы интересующего нас типа, а сейчас продолжим обсуждение  $Q$ -шаров, предполагая, что скалярный потенциал обладает необходимыми свойствами.

Поскольку внутри  $Q$ -шара  $f \simeq f_0 \neq 0$ , то глобальная  $U(1)$  симметрия там нарушена. Формально в этой области степенями свободы являются голдстоуновские бозоны. Вне  $Q$ -шара  $f = 0$ ,  $U(1)$ -симметрия не нарушена и степенями свободы являются скалярные частицы с массой (12.89). Условие стабильности  $Q$ -шара по-прежнему имеет вид (12.73), что даёт

$$\frac{Q}{f_0} \sqrt{V(f_0)} < Q \cdot m. \quad (12.101)$$

С учётом (12.89) это условие накладывает ещё одно нетривиальное ограничение на скалярный потенциал модели,

$$\frac{2V(f_0)}{f_0^2} < \frac{d^2 V(0)}{df^2}.$$

► **Задача 22.** Построить приближённое решение для  $Q$ -шара (полагая заряд  $Q$  большим) в модели с калибровочной группой  $U(1)$ . Оценить заряд  $Q$  и энергию  $E$  для этого решения. Показать, что отношение  $E/Q$  растёт с увеличением  $Q$  из-за вклада электростатической энергии в  $E$ . Это означает, что в случае локальной  $U(1)$  симметрии из-за дополнительной силы отталкивания, вызванной калибровочным взаимодействием, при больших зарядах  $Q$ -шары становятся нестабильными. Они стремятся увеличить энергию связи путём испускания скалярных частиц с поверхности. Отметим, что при достаточно малых калибровочных константах связи  $Q$ -шары с не слишком большим зарядом являются стабильными и в моделях с локальной  $U(1)$  симметрией.

▷ *Задача 23.* Построить решение типа  $Q$ -шара в модели с глобальной неабелевой группой симметрии (например,  $SU(N)$ ).

Соотношения между параметрами потенциала и параметрами  $Q$ -шара, полученные выше, справедливы для случая относительно больших  $Q$ -шаров, когда можно пренебречь вкладами градиентных членов в энергию. В ряде моделей аккуратный учёт всех вкладов показывает, что стабильными могут быть и небольшие  $Q$ -шары, “состоящие” из небольшого числа заряженных частиц.

Теперь рассмотрим случай, когда функция  $V(f)/f^2$  не имеет минимума при конечных и отличных от нуля  $f$ . Если  $V(f)$  растёт с увеличением  $f$  слабее чем  $f^2$ , то минимум функции  $V(f)/f^2$  достигается при  $f \rightarrow \infty$  и равен нулю,

$$\min_f \left[ \frac{V(f)}{f^2} \right] = \left[ \frac{V(f)}{f^2} \right]_{f \rightarrow \infty} = 0. \quad (12.102)$$

Такое возможно в моделях с очень плоскими потенциалами, что действительно реализуется в ряде суперсимметричных обобщений Стандартной модели. В случае (12.102) использованный нами подход для оценки параметров  $Q$ -шара неприменим. Зато в пределе достаточно плоского потенциала,

$$f \rightarrow \infty : \quad V(f) \propto f^\alpha, \quad \alpha < 2,$$

в уравнении движения (12.91) можно пренебречь скалярным потенциалом, и существует приближённое решение с асимптотиками, удовлетворяющими всем обсуждавшимся выше необходимым условиям (12.93)-(12.95),

$$f(r) = f_0 \frac{\sin \omega r}{\omega r} \cdot \theta(r_0 - r). \quad (12.103)$$

Требование самосогласованности решения вблизи границы  $Q$ -шара, т.е. непрерывности  $f(r)$  при  $r = r_0$ , приводит к тому, что в отличие от рассмотренного выше случая (12.100) размер солитона оказывается связанным с частотой осцилляций во внутреннем пространстве:

$$r_0 \simeq \frac{\pi}{\omega}. \quad (12.104)$$

Из вида решения (12.103) ясно, что приближение тонкой стенки в данном случае не работает: изменение  $f(r)$  происходит во всём интервале  $r < r_0$ . Подставляя решение (12.103) в интеграл (12.97), определяющий заряд солитона, и выражая частоту  $\omega$  через размер солитона (12.104), получим

$$Q = 4f_0^2 r_0^2. \quad (12.105)$$

Для энергии такого  $Q$ -шара будем иметь из (12.92)

$$E = 4\pi f_0^2 r_0 + \frac{4\pi}{3} r_0^3 b V(f_0), \quad (12.106)$$

где константа  $b$  — порядка единицы и определяется формой потенциала  $V(\phi)$ . Нам осталось найти минимум энергии (12.106) по  $f_0$  и  $r_0$  при условии, что заряд (12.105) фиксирован. Выразив  $r_0$  через  $f_0$  с помощью (12.105) получим для энергии как функции  $f_0$

$$E(f_0) = 2\pi f_0 Q^{1/2} + \frac{\pi}{6} b \frac{Q^{3/2}}{f_0^3} V(f_0). \quad (12.107)$$

В точке минимума имеем

$$\frac{b}{12} \frac{d}{df_0} \left( \frac{V(f_0)}{f_0^3} \right) = \frac{1}{Q}. \quad (12.108)$$

Для рассматриваемых потенциалов левая часть убывает с ростом  $f_0$ , т.е. решение уравнения (12.108)  $f_0(Q)$  растёт с ростом  $Q$ . В частности, для  $V(f) \sim f^\alpha$  имеем из (12.108)

$$f_0(Q) \propto Q^{\frac{1}{4-\alpha}},$$

так что энергия (12.107) ведёт себя как

$$E(Q) \propto Q^{\frac{6-\alpha}{2(4-\alpha)}}$$

При  $\alpha < 2$  показатель степени здесь меньше единицы, поэтому при достаточно больших  $Q$  энергия солитона превышает массу  $Q$  частиц,  $E < mQ$ , и  $Q$ -шар стабилен. Отметим, что в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  (совсем плоский потенциал при достаточно больших значениях поля) энергия ведёт себя как

$$E \propto Q^{3/4}, \quad (12.109)$$

т.е. аналогично (12.72).

Решения типа  $Q$ -шаров существуют и в реалистических теориях, например, в суперсимметричных обобщениях Стандартной модели физики частиц. Соответствующие скалярные поля тем или иным способом взаимодействуют с полями Стандартной модели. Константы взаимодействия при этом не слишком большие, так что всё построение решений типа  $Q$ -шара происходит так же, как и для простейшей модели (12.86). Всё, за исключением одного важного обстоятельства: ограничение (12.101), связанное со стабильностью относительно распада на свободные заряженные по группе  $U(1)$  частицы, видоизменяется. В результате взаимодействия скалярные частицы  $\phi$  могут стать нестабильными и распадаться в другие частицы меньшей массы.<sup>21</sup> Именно масса легчайших заряженных по этой группе частиц будет входить в правую часть модифицированного ограничения (12.101).

В реалистических моделях роль заряда  $Q$  могут играть, например, барионный, лептонный заряды или их линейные комбинации. Плоскостность потенциала естественным образом реализуется в ряде суперсимметричных теорий, где для низкоэнергетического скалярного потенциала характерно наличие плоских направлений, вдоль которых значение потенциала почти не изменяется. В результате квантовых поправок эти плоские направления “поднимаются”, однако зависимость потенциала от величины поля остаётся слабой, поскольку поправки ведут себя как логарифм величины поля,  $V \propto \ln |\phi|$ .

В суперсимметричных моделях несущее барионный заряд поле  $\phi$  может состоять из полей скварков (суперпартнёров кварков) и хиггсовских бозонов, при этом в обобщении формулы (12.101) место параметра  $m$  займёт масса протона — легчайшего стабильного бариона. В случае лептонного заряда поле  $\phi$  может состоять из слептонов (суперпартнёров лептонов), а место параметра  $m$  в обобщении формулы (12.101) займёт масса соответствующего нейтрино. В моделях с потенциалами вида (12.102) такие решения являются стабильными на космологических масштабах только для достаточно больших величин заряда.

<sup>21</sup> Отметим, что если глобальная симметрия оказывается спонтанно нарушенной, то возникает возможность распада скаляра в безмассовые частицы, в частности, в фотоны. В этом случае  $Q$ -шары будут нестабильными.

- ▷ **Задача 24.** В моделях с потенциалами вида (12.102) оценить заряды стабильного  $B$ -шара (солитона, несущего барионное число) и стабильного  $L$ -шара (солитона, несущего лептонное число). Для численной оценки считать, что при достаточно больших  $f$  потенциал имеет вид  $V(f) \simeq (1 \text{ ТэВ})^4 \cdot (f/1 \text{ ТэВ})^\alpha$  и рассмотреть случаи  $\alpha = 1$  и  $\alpha \rightarrow 0$ .
- ▷ **Задача 25.** Рассмотрим модель, в которой существуют солитоны типа  $Q$ -шара, однако скалярные частицы не являются стабильными, а распадаются в безмассовые фермионы. В такой теории  $Q$ -шары не являются стабильными, однако могут иметь большое время жизни, поскольку из-за фермиевского подавления распад происходит в результате испарения фермионов с поверхности  $Q$ -шара, а не из всего объёма. Полагая, что скорость испарения с единицы площади определяется только частотой  $\omega$ , найти наименьшее значение заряда, начиная с которого время жизни  $Q$ -шаров будет превышать современный возраст Вселенной. Для численной оценки взять те же потенциалы  $V(f)$ , что в предыдущей задаче.

Для больших  $Q$ -шаров важны гравитационные эффекты. При очень больших  $Q$  в решении появляется гравитационная неустойчивость, связанная с коллапсом в чёрную дыру.

- ▷ **Задача 26.** Оценить критические значения зарядов, при которых происходит образование чёрных дыр из  $Q$ -шаров в моделях (12.100) и в моделях (12.102). Для численной оценки все параметры потенциала размерности массы считать равными 1 ТэВ. Сравнить с результатами предыдущей задачи.

В эволюционирующей Вселенной в уравнении движения для скалярного поля (12.87) появляются дополнительные вклады, зависящие от времени, однако для небольших по сравнению с размером горизонта  $Q$ -шаров, плотность энергии внутри которых существенно превышает среднюю плотность энергии расширяющейся Вселенной, эти вклады незначительны, и анзац (12.90) по-прежнему является решением.

Отметим, что если эффективный потенциал  $V(f, T)$  допускает существование стабильных  $Q$ -шаров при температуре ниже некоторой критической, то процессы, протекающие в  $Q$ -симметричной плазме при последующей эволюции Вселенной не разрушают этих солитонных объектов.<sup>22</sup> Если же  $Q$ -шары формируются во Вселенной в результате неравновесных процессов при температурах, не допускающих существования стабильных  $Q$ -шаров, то столкновения с частицами плазмы приводят к “подогреву”  $Q$ -шаров, что может привести к их полному разрушению ещё на ранних этапах эволюции Вселенной.

Основной механизм образования больших  $Q$ -шаров связан с распадом плоских направлений скалярного потенциала — полей модулей. В пределе  $r_0 \rightarrow \infty$  найденные нами решения —  $Q$ -шары — это однородный скалярный конденсат, заполняющий всё пространство. Его образование в ранней Вселенной происходит в определённой степени аналогично образованию заряженного по барионному числу скалярного конденсата, рассмотренному нами в разделе 11.6, посвящённом механизму Аффлек–Дайна генерации барионной асимметрии Вселенной. Для почти плоских направлений скалярного потенциала конденсат начинает эволюционировать после окончания

<sup>22</sup>В  $Q$ -асимметричной плазме размер  $Q$ -шаров изменяется за счёт поглощения частиц и античастиц плазмы.

инфляционной стадии развития Вселенной. Если этот конденсат заряжен по группе глобальной симметрии  $U(1)$ , то развивающиеся в расширяющейся и остывающей Вселенной неоднородные неустойчивости могут приводить к распаду этого однородного конденсата на области с существенно различными плотностями заряда. Области с большим зарядом оказываются локализованными — отделёнными друг от друга областями с малой плотностью заряда, быстро начинающей доминировать в большей части Вселенной. В моделях, допускающих существование стабильных  $Q$ -шаров, энергетически наиболее выгодным состоянием при большом фиксированном заряде являются  $Q$ -шары. Таким образом, области с большой плотностью заряда трансформируются в  $Q$ -шары, а в областях с малой плотностью заряда этот заряд переходит в свободные частицы. Анализ эволюции возмущений скалярного конденсата показывает, что в моделях, допускающих существование стабильных  $Q$ -шаров, распад плоских направлений действительно приводит к эффективному рождению  $Q$ -шаров, причём заметная доля заряда, накопленная полем модуля, оказывается в конце концов локализованной в  $Q$ -шарах.

Рассмотрим указанный механизм более подробно. В разделе 11.6 мы видели, что процесс образования асимметрии (в данном случае речь идёт об асимметрии по отношению к глобальному  $U(1)$ -заряду  $Q$ ) происходит в узком временном интервале вблизи того момента, когда нарушаются условия медленного скатывания скалярного поля<sup>23</sup>

$$\frac{V'(\phi_i)}{\phi_i} \sim H^2(t_c) , \quad (12.110)$$

где  $\phi_i$  — начальное значение поля, а индекс  $s$  относится к окончанию периода медленного скатывания (в разделе 11.6 мы использовали вместо этого индекс  $r$ ). Пусть в результате небольшого явного нарушения  $U(1)$ -симметрии во Вселенной образовалась  $Q$ -асимметрия

$$\eta_Q = \frac{n_Q}{s} ,$$

где  $n_Q$  — плотность  $U(1)$ -заряда. В отличие от предыдущего раздела ненулевая плотность  $Q$ -заряда связана с самим полем  $\phi$ , которое эволюционирует так, как изображено на рис. 11.17.

Убедимся прежде всего, что однородный скалярный конденсат, несущий  $Q$ -заряд, неустойчив по отношению к образованию неоднородностей. Для этого пренебрежём расширением Вселенной (это упрощение мы обоснуем позже) и запишем скалярное поле в виде

$$\phi(x) = f(x) \cdot e^{i\alpha(x)} ,$$

При этом скалярный потенциал будет только функцией  $f$ . Уравнения поля для  $f$  и  $\alpha$  имеют вид

$$\ddot{\alpha} - \Delta\alpha + \frac{2}{f}\dot{\alpha}\dot{f} - \frac{2}{f}\nabla\alpha \cdot \nabla f = 0 \quad (12.111)$$

$$\ddot{f} - \Delta f - f\dot{\alpha}^2 + f\Delta\alpha + V'(f) = 0 \quad (12.112)$$

Рассмотрим для начала случай, когда однородный скалярный конденсат движется по окружности во внутреннем пространстве,

$$f = \text{const} , \quad \alpha = \omega t , \quad \omega = \text{const} , \quad (12.113)$$

<sup>23</sup>Здесь мы используем общее соотношение (4.52), а не соотношение (4.53), справедливое для степенных потенциалов.

причём из (12.112) сразу следует, что

$$\omega^2 = \frac{V'}{f} . \quad (12.114)$$

Заметим, что при  $t > t_c$ , когда нарушены условия медленного скатывания, выполняется  $\omega > H$ . Это в конечном итоге и оправдывает сделанное выше приближение, в котором мы пренебрегли расширением Вселенной.

Рассмотрим линейные возмущения над однородным конденсатом (12.113), причём с учётом трансляционной инвариантности сразу запишем

$$\begin{aligned} \delta f(x) &= \delta f \cdot e^{i\lambda t + i\mathbf{p}\mathbf{x}} , \\ \delta \alpha(x) &= \delta \alpha \cdot e^{i\lambda t + i\mathbf{p}\mathbf{x}} . \end{aligned} \quad (12.115)$$

Из уравнений (12.111) и (12.112) получим

$$\begin{aligned} (2i\lambda f\omega) \cdot \delta f + f^2 \cdot (\lambda^2 - \mathbf{p}^2) \cdot \delta \alpha &= 0 , \\ (\lambda^2 - \mathbf{p}^2 - V''(f) + \omega^2) \delta f - (2i\lambda f\omega) \cdot \delta \alpha &= 0 . \end{aligned}$$

Отсюда для каждого  $\mathbf{p}^2$  найдем уравнение на собственные значения

$$\lambda^4 - \lambda^2 \cdot (2\mathbf{p}^2 + V'' + 3\omega^2) + \mathbf{p}^2 \cdot (\mathbf{p}^2 + V'' - \omega^2) = 0 . \quad (12.116)$$

Нетрудно убедиться, что все решения  $\lambda^2$  этого уравнения действительны. В случае

$$\mathbf{p}^2 + V'' - \omega^2 < 0 , \quad (12.117)$$

один из корней этого уравнения отрицателен,  $\lambda^2 < 0$ , что соответствует чисто мнимым  $\lambda = \pm i\sqrt{|\lambda^2|}$ . Это и означает неустойчивость однородного конденсата: некоторые моды (12.115) экспоненциально растут со временем. Существенно, что эти моды не однородны в пространстве: при  $\mathbf{p} = 0$  решения уравнения (12.117) действительны.

С учётом (12.111) условие (12.117) может выполняться тогда, когда потенциал достаточно плоский,

$$V'' < \frac{V'}{f} . \quad (12.118)$$

Для степенного потенциала  $V \propto f^\alpha$  это условие выполняется при  $\alpha < 2$ , т.е. как раз тогда, когда в модели имеются  $Q$ -шары. Наиболее сильная неустойчивость (наибольшее по модулю отрицательное  $\lambda^2$ ) имеется при

$$|\mathbf{p}| \sim \omega , \quad (12.119)$$

при этом  $|\lambda| \sim \omega$ . Это окончательно убеждает в несущественности расширения Вселенной для данного анализа.

Дальнейшее развитие неустойчивости в нелинейном режиме аналитически изучить трудно, однако сам факт того, что условие существования неустойчивости (12.118) совпадает с условием существования  $Q$ -шаров, указывает на то, что процесс заканчивается образованием  $Q$ -шаров. Численные исследования подтверждают этот вывод. Оценка (12.119) показывает, что  $U(1)$ -заряд собирается в  $Q$ -шар с объёма порядка

$$|\mathbf{p}|^{-3} \sim \omega^{-3} .$$

В расширяющейся Вселенной как эволюция конденсата, так и развитие неустойчивости происходят сразу после нарушения условий медленного скатывания, так что грубая оценка имеет вид

$$|\mathbf{p}| \sim |\lambda| \sim \omega \sim H(t_c) ,$$

где мы воспользовались (12.114) и (12.110). Таким образом, во Вселенной образуется порядка одного  $Q$ -шара на хаббловский объём, взятый в момент  $t_c$ .

Дальнейшие оценки можно провести почти так же, как мы сделали это в конце раздела 12.7.1. Рассмотрим для определённости случай почти плоского потенциала

$$V(f) = v^4 \left( \frac{f}{v} \right)^\alpha , \quad \alpha \ll 1 ,$$

где  $v$  — параметр размерности массы. В этом случае справедлива оценка (12.109), т.е. масса  $Q$ -шара по порядку величины равна

$$M_Q \sim vQ^{3/4} .$$

Результаты раздела 12.7.1 прямо переносятся на рассматриваемую модель, и мы получаем (см. (12.85))

$$\rho_{Q,0} = v\eta_Q^{3/4} g_*^{-5/8} \left( \frac{T_c}{M_{Pl}} \right)^{3/4} s_0 .$$

Отличие, впрочем, состоит в том, что температура  $T_c$  определяется условием (12.110), так что в пределе малых  $\alpha$

$$T_c \sim v \sqrt{\frac{M_{Pl}}{f_i}} .$$

Это вносит дополнительную неопределённость в оценку современной плотности энергии  $Q$ -шаров, связанную с начальным значением поля  $\phi$ . Если положить  $f_i \sim M_{Pl}$ , как мы это делали в разделе 11.6, то будут буквально справедливы результаты конца раздела 12.7.1. При надлежащем подборе параметров  $Q$ -шары рассматриваемого типа могут выступать в роли тёмной материи.

Как мы отмечали, в качестве заряда  $Q$  может выступать барионный, лептонный заряды, или их линейная комбинация.  $Q$ -шары могут оказывать влияние на генерацию барионной асимметрии Вселенной.  $B$ -шары, например, при превышающих электрослабый масштаб температурах, когда процессы с аномальным нарушением барионного и лептонных чисел находятся в термодинамическом равновесии, предотвращают вымывание барионной асимметрии нарушающими лептонные числа взаимодействиями. А именно,  $Q$ -шары с  $(B - L)$ -зарядом позволяют сохранить  $(B - L)$  в эпоху электрослабых сфалеронных переходов.

Особенный интерес при этом представляют нестабильные (на поздних стадиях эволюции Вселенной)  $Q$ -шары. Накопленный в  $Q$ -шарах барионный заряд в результате распада в частицы переходит в барионную асимметрию Вселенной. Это, по существу, один из вариантов механизма Аффлек-Дайна. Он позволяет избежать вымывание асимметрии сфалеронными переходами, если распад  $B$ -шаров происходит уже после электрослабого перехода. Наиболее интригующей выглядит ситуация, когда  $Q$ -шары нестабильны и распадаются на барионы и новые стабильные тяжёлые частицы, способные играть роль тёмной материи. В таких моделях возможно естественное объяснение совпадения (по порядку величины) плотностей энергии барионов и тёмной материи в современной Вселенной. Например, в суперсимметричных



моделях со стабильным легчайшим суперпартнёром (LSP, обычно — нейтралино) при распаде когерентного состояния скварков рождается три частицы LSP на каждый барион. В результате, если основная доля барионного заряда содержалась в  $Q$ -шарах, получаем простое соотношение между плотностями энергии барионов и частиц тёмной материи (LSP):

$$\frac{\rho_B}{\rho_{DM}} \sim \frac{m_p}{3m_{LSP}}. \quad (12.120)$$

В теоретически привлекательных суперсимметричных обобщениях Стандартной модели оценка для феноменологически приемлемых масс нейтралино имеет вид  $m_{LSP} \sim 10 - 100$  ГэВ. Для таких масс соотношение (12.120) даёт всего на один-два порядка меньшую величину  $\rho_B/\rho_{CDM}$  по сравнению с результатами наблюдений. В приведённой оценке (12.120) мы не учли, однако, возможной аннигиляции LSP вблизи поверхности  $Q$ -шара, что ведёт к уменьшению остаточной концентрации LSP.

В завершение раздела отметим, что класс нетопологических солитонов не ограничивается одними  $Q$ -шарами. К этому классу следует отнести также кварковые самородки (quark nuggets), нейтринные шары (cosmic neutrino balls), солитонные звёзды (soliton stars) и другие.

# Приложение А

## Элементы общей теории относительности

### А.1 Тензоры в искривленном пространстве-времени

В этом Приложении мы введём основные понятия, используемые в общей теории относительности (ОТО). Наше изложение не претендует на математическую строгость и полноту; его основная задача состоит в том, чтобы установить обозначения, используемые в тексте, и собрать в одном месте ряд полезных соотношений и формул. Для более глубокого ознакомления с основами общей теории относительности мы рекомендуем обратиться к учебникам [19, 44]. Читателю, заинтересованному в более математически строгом изложении дифференциальной геометрии, можно порекомендовать книгу [45].

Основным объектом изучения ОТО является искривлённое четырёхмерное пространство (“многообразие”)  $\mathcal{M}$ , описывающее наблюдаемое нами пространство-время. Для лучшего понимания абстрактных математических объектов, введённых ниже, иногда бывает полезным представлять это пространство вложенным в плоское объемлющее пространство большей размерности. Подчеркнём, однако, что наше пространство-время в действительности никуда не вложено<sup>1</sup>, и мы нигде не будем опираться на возможность какого-либо вложения. Стоит отметить, что все определения и факты, приведённые в настоящем Приложении, без труда переносятся на псевдо(римановы) пространства произвольной размерности.

Интервал (квадрат инвариантного расстояния)  $ds^2$  между двумя близкими точками пространства-времени представляется в следующем виде<sup>2</sup>

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.1})$$

где индексы  $\mu, \nu$  принимают значения 0, 1, 2, 3, и метрику  $g_{\mu\nu}(x)$  можно рассматривать как симметричную матрицу размера  $4 \times 4$ . Таким образом, метрика определяется десятью независимыми функциями координат  $g_{\mu\nu}(x)$ ,  $\mu \leq \nu$ . В дальнейшем мы будем считать, что метрика имеет сигнатуру  $(+, -, -, -)$ , то есть что у матрицы  $g_{\mu\nu}(x)$  в каждой точке имеется одно положительное и три отрицательных собственных значения. Вектора  $dx^\mu$  с положительными значениями  $ds^2$  соответствуют времениподобным направлениям, вектора с нулевыми значениями  $ds^2$  соответствуют

---

<sup>1</sup>Мы здесь не обсуждаем модели с дополнительными размерностями пространства.

<sup>2</sup>В дальнейшем, если не оговорено противное, подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

светоподобным направлениям, а вектора с отрицательными  $ds^2$  — пространственно-подобным.

Основным принципом ОТО является то, что все выборы локальной системы координат равноправны между собой. Поэтому естественно рассматривать функции (поля) на многообразии  $\mathcal{M}$ , определенным образом преобразующиеся при замене системы координат

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\mu) . \quad (\text{A.2})$$

Простейшим примером такой величины является скалярное поле  $\phi(x)$ , определяемое тем, что при замене системы координат оно преобразуется как<sup>3</sup>

$$\phi'(x') = \phi(x) .$$

Это соотношение показывает, что значение поля в данной точке многообразия не изменяется при преобразовании координат. Следующим важным примером величины, “хорошо” преобразующейся при заменах координат, служит (контравариантный) вектор — набор из четырёх функций  $A^\mu(x)$ , преобразующихся так же, как и малые приращения координат  $dx^\mu$ , то есть

$$A'^\nu(x') = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} A^\mu(x) . \quad (\text{A.3})$$

Ковариантным вектором называется набор  $A_\mu(x)$  из четырёх величин, преобразующихся так же, как производные  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ , то есть

$$A'_\nu(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} A_\mu(x) . \quad (\text{A.4})$$

Пользуясь законами преобразования (A.3) и (A.4), нетрудно получить закон преобразования свёртки  $A^\mu B_\mu$  контравариантного и ковариантного векторов,

$$A'^\mu(x') B'_\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} B_\lambda(x) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\nu} A^\nu(x) B_\lambda(x) = A^\nu(x) B_\nu(x) . \quad (\text{A.5})$$

Мы видим, что такая свёртка преобразуется как скаляр при замене системы координат, то есть её значение в каждой точке не зависит от выбора локальных координат.

Геометрически контравариантный вектор  $A^\mu(x)$  можно представлять себе как касательный вектор к поверхности  $\mathcal{M}$ , если последняя вложена в некоторое объемлющее пространство. К примеру, производная скалярной функции  $\phi(x)$  вдоль направления, определяемого касательным вектором  $A^\mu(x)$ , имеет вид

$$\partial_A \phi(x) = A^\mu(x) \partial_\mu \phi(x) . \quad (\text{A.6})$$

Инвариантность свертки (A.5) относительно замен координат показывает, что ковариантные вектора  $B_\mu(x)$  можно воспринимать как линейные функционалы, отображающие касательное пространство к  $\mathcal{M}$  в числа (с помощью свёртки).

Аналогичным образом можно определить тензор с произвольным количеством верхних и нижних индексов. Такой объект преобразуется так же, как и произведение

---

<sup>3</sup>В дальнейшем все величины со штрихом относятся к новой системе координат, а величины без штриха — к исходной.

соответствующего числа ковариантных и контравариантных векторов. Например, тензор  $B_{\nu\lambda}^{\mu}$  преобразуется при координатных преобразованиях следующим образом:

$$B_{\nu\lambda}^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} B_{\tau\rho}^{\sigma}(x)$$

Непосредственно обобщая приведённые выше рассуждения для случая свёртки ковариантного и контравариантного векторов, нетрудно доказать, что производя свёртку верхнего и нижнего индексов в тензоре произвольного ранга мы снова получаем тензор.

Из того факта, что интервал  $ds^2$  определяет инвариантное расстояние между двумя точками, то есть не зависит от выбора системы координат, следует, что метрика  $g_{\mu\nu}(x)$  является ковариантным тензором второго ранга, то есть преобразуется как

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} g_{\lambda\rho}(x) . \quad (\text{A.7})$$

▷ *Задача 1. Докажите закон преобразования (A.7).*

Другим важным примером тензора второго ранга является  $\delta$ -символ Кронекера  $\delta_{\mu}^{\nu}$ , определенный в произвольной системе координат как единичная диагональная матрица,

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1) .$$

Проверим, что такое определение  $\delta_{\mu}^{\nu}$  совместно с тензорным законом преобразования при замене координат. Если некоторый тензор равен  $\delta_{\mu}^{\nu}$  в исходной системе координат, то в новой системе координат он будет равен

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \delta_{\rho}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} .$$

Правая часть здесь вновь равна символу Кронекера  $\delta_{\nu}^{\mu}$ , так что  $\delta_{\nu}^{\mu}$  — действительно тензор. С помощью метрического тензора  $g_{\mu\nu}$  и тензора Кронекера  $\delta_{\mu}^{\nu}$  можно определить новый контравариантный симметричный тензор второго ранга  $g^{\mu\nu}$  с помощью равенства

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu} . \quad (\text{A.8})$$

Другими словами, тензор  $g^{\mu\nu}$  определяется матрицей, обратной к матрице  $g_{\mu\nu}$ .

▷ *Задача 2. Докажите, что  $g^{\mu\nu}$  действительно является тензором.*

Образуя свёртки с тензорами  $g_{\mu\nu}$  и  $g^{\mu\nu}$ , мы можем определить операцию поднятия и опускания индексов. К примеру,

$$A^{\nu} = g^{\nu\mu} A_{\mu}, \quad B_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} B^{\lambda\rho} ,$$

причём если  $A_{\mu}$  и  $B^{\lambda\rho}$  — тензоры, то  $A^{\nu}$  и  $B_{\mu\nu}$  — тоже тензоры.

Ещё одним важным объектом, необходимым для построения функционала действия в ОТО, является определитель метрического тензора

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} .$$

Для того, чтобы установить, как преобразуется  $g$  при заменах координат, запишем закон преобразования (А.7) в матричной форме:

$$\hat{g}'(x') = \hat{J}\hat{g}(x)\hat{J}^T. \quad (\text{А.9})$$

Крышечки указывают на то, что все величины, входящие в равенство (А.9), представляют собой матрицы размера  $4 \times 4$ . Символом  $\hat{J}$  обозначена матрица Якоби, соответствующая замене координат (А.2),

$$J^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu},$$

а  $\hat{J}^T$  — транспонированная матрица. Из равенства (А.9) вытекает следующий закон преобразования для величины  $g$ :

$$g'(x') = J^2 g(x), \quad (\text{А.10})$$

где  $J$  — якобиан замены координат (А.2),

$$J \equiv \det \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}.$$

Из закона преобразования (А.10) следует, что произведение

$$\sqrt{-g} d^4 x$$

определяет инвариантный элемент 4-объёма<sup>4</sup>.

В пространстве Минковского помимо символа Кронекера имеется еще один тензор, инвариантный относительно преобразований Лоренца — символ Леви–Чивиты  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ . Напомним, что  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$  полностью антисимметричен по своим индексам и, следовательно, однозначно определяется условием

$$\epsilon^{0123} = 1.$$

Однако, символ Леви–Чивиты не является инвариантным тензором при произвольных заменах координат. Действительно, если некоторый тензор равен  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$  в одной системе координат, то в другой системе он равен

$$\epsilon'^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = J^{-1} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}. \quad (\text{А.11})$$

Из закона преобразования (А.11) видно, что естественным обобщением символа Леви–Чивиты на случай произвольных криволинейных координат (и искривленного пространства) является тензор<sup>5</sup> Леви–Чивиты

$$E^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}.$$

Этот тензор полностью антисимметричен по всем своим индексам и переходит в  $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ , когда метрика  $g_{\mu\nu}$  совпадает с метрикой пространства Минковского,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

---

<sup>4</sup>Заметим, что поскольку матрица  $g_{\mu\nu}$  имеет три отрицательных собственных значения и одно положительное, её определитель  $g$  меньше нуля. Поэтому мы используем действительную величину  $\sqrt{-g}$  для определения инвариантного элемента объёма.

<sup>5</sup>Более аккуратно было бы называть  $E^{\mu\nu\lambda\rho}$  псевдотензором, поскольку он преобразуется с неправильным знаком относительно преобразований координат, меняющих ориентацию (с  $J < 0$ ).

## А.2 Ковариантная производная

Для того, чтобы построить действие и выписать уравнения движения, инвариантные относительно произвольных замен координат, необходимо определить ковариантную операцию дифференцирования  $\nabla_\mu$ , которая переводила бы тензоры снова в тензоры. Для скалярного поля естественно потребовать, чтобы эта операция совпадала с обычным дифференцированием,

$$\nabla_\mu \phi(x) \equiv \partial_\mu \phi(x) . \quad (\text{A.12})$$

Как следует из определения (А.4), так определённая производная  $\nabla_\mu \phi$  является ковариантным вектором.

Определить, что такое ковариантная производная векторного поля  $A^\mu(x)$ , таким простым образом не удаётся. Действительно, для того чтобы продифференцировать векторное поле, нужно научиться вычитать касательные векторы, относящиеся к разным точкам пространства  $\mathcal{M}$ . Следовательно, необходимо определить правила параллельного переноса векторов из одной точки пространства в другую.

Рассмотрим параллельный перенос касательного вектора  $A^\mu$  из точки с координатами  $x^\mu$  в точку с координатами

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + dx^\mu$$

(см. рис. (А.1)). Наложив на операцию параллельного переноса естественное тре-

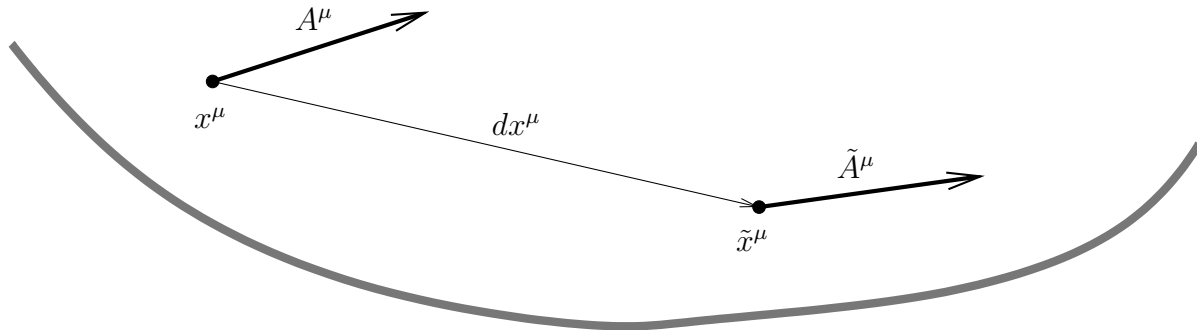


Рис. А.1: Параллельный перенос вектора.

бование линейности (образ суммы двух векторов при параллельном переносе равен сумме образов), получаем, что в ведущем порядке по приращению координат  $dx^\mu$  образ  $\tilde{A}^\mu$  вектора  $A^\mu$  имеет следующий общий вид

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) A^\nu(x) dx^\lambda . \quad (\text{A.13})$$

Величины  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ , входящие в правило параллельного переноса (А.13), носят название символов Кристоффеля или коэффициентов связности<sup>6</sup>. Для того, чтобы определить закон преобразования коэффициентов связности при произвольных заменах локальных координат, произведём замену координат над обеими частями равенства

<sup>6</sup>Вообще говоря, символами Кристоффеля и коэффициентами связности называют разные объекты. В римановой геометрии это одно и то же.

(А.13) и воспользуемся тем, что величины  $\tilde{A}^\mu$ ,  $A^\mu$  и  $dx^\mu$  преобразуются по закону (А.3). Левая часть равенства (А.13) перейдёт в

$$\begin{aligned}\tilde{A}'^\mu(\tilde{x}') &= \frac{\partial x'^\mu(\tilde{x})}{\partial x^\nu} \tilde{A}^\nu(\tilde{x}) = \left( \frac{\partial x'^\mu(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\mu(x)}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} dx^\lambda \right) \tilde{A}^\nu(\tilde{x}) = \\ &= \frac{\partial x'^\mu(x)}{\partial x^\nu} \tilde{A}^\nu(\tilde{x}) + \frac{\partial^2 x'^\mu(x)}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} dx^\lambda A^\nu(x),\end{aligned}\quad (\text{А.14})$$

где во втором равенстве мы разложили производную в ряд вокруг точки  $x^\mu$ , а в третьем равенстве воспользовались тем, что вектора  $\tilde{A}^\nu(\tilde{x})$  и  $A^\nu(x)$  отличаются на величину первого порядка малости по приращениям координат  $dx^\mu$ .

Правая часть равенства (А.13) после замены координат примет следующий вид:

$$A'^\mu(x') - \Gamma'^\mu_{\nu\lambda}(x') A'^\nu(x') dx'^\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) - \Gamma'^\mu_{\nu\lambda}(x') \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} A^\rho(x) \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} dx^\sigma. \quad (\text{А.15})$$

Приравняв результаты преобразований (А.14) и (А.15) друг другу, умножив обе части получившегося равенства на матрицу  $\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$ , обратную к матрице  $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ , и сравнив результат с исходным правилом параллельного переноса (А.13), получаем следующий закон преобразования для символов Кристоффеля:

$$\Gamma'^\mu_{\nu\lambda}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\xi} \Gamma^\xi_{\rho\sigma} + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda}. \quad (\text{А.16})$$

Видно, что второй член в правой части равенства (А.16) приводит к тому, что символы Кристоффеля не преобразуются как компоненты тензора относительно нелинейных замен координат.

Для определения ковариантной производной векторного поля перенесём вектор  $A^\mu(x)$  в точку  $\tilde{x} = x + dx$ , вычтем получившийся вектор из значения векторного поля в точке  $\tilde{x}$  и запишем

$$A^\mu(\tilde{x}) - \tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = \nabla_\nu A^\mu \cdot dx^\nu.$$

Пользуясь правилом параллельного переноса (А.13), приходим к следующему определению ковариантной производной векторного поля  $A^\mu(x)$ :

$$\nabla_\nu A^\mu(x) = \partial_\nu A^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda(x). \quad (\text{А.17})$$

Из закона преобразования символов Кристоффеля (А.16) следует, что  $\nabla_\nu A^\mu$  является тензором второго ранга с одним ковариантным и с одним контравариантным индексом.

Правило параллельного переноса ковариантного вектора  $B_\mu$  вытекает из того факта, что свёртка  $A^\mu B_\mu$  является скаляром, то есть переносится тривиальным образом:

$$\left( \tilde{A}^\mu \tilde{B}_\mu \right) (\tilde{x}) = (A^\mu B_\mu)(x). \quad (\text{А.18})$$

Из соотношения (А.18) и правила параллельного переноса контравариантного вектора (А.13) вытекает следующий закон параллельного переноса ковариантного вектора  $B_\mu$ :

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = B_\mu(x) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} B_\nu(x) dx^\lambda. \quad (\text{А.19})$$

Следовательно, ковариантная производная  $\nabla_\nu B_\mu$  ковариантного векторного поля имеет вид

$$\nabla_\nu B_\mu(x) = \partial_\nu B_\mu(x) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} B_\lambda(x). \quad (\text{А.20})$$

Теперь, когда мы определили ковариантную производную скаляра и векторов обоих типов, не представляет труда обобщить эти определения на случай тензоров произвольного ранга с помощью правила Лейбница:

$$\nabla_\mu (AB) = (\nabla_\mu A) B + A \nabla_\mu B ,$$

где  $A$  и  $B$  — два произвольных тензора (индексы при них не выписаны явно). К примеру, ковариантная производная тензора третьего ранга с одним верхним и двумя нижними индексами равна

$$\nabla_\mu B^\nu_{\lambda\tau} = \partial_\mu B^\nu_{\lambda\tau} + \Gamma^\nu_{\rho\mu} B^\rho_{\lambda\tau} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu} B^\nu_{\rho\tau} - \Gamma^\rho_{\tau\mu} B^\nu_{\lambda\rho} .$$

В принципе, можно рассматривать многообразия с произвольным набором символов Кристоффеля, преобразующихся по закону (А.16). Однако, в ОТО, которая основана на (псевдо)римановой геометрии<sup>7</sup>, накладывают дополнительные условия на компоненты связности  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ . Первое из этих условий заключается в том, что операция параллельного переноса (или, что эквивалентно, операция ковариантного дифференцирования) коммутирует с операцией поднятия и опускания индексов. В частности, требуется выполнение равенства

$$g_{\mu\nu} \nabla_\lambda A^\nu = \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} A^\nu)$$

для произвольного вектора  $A^\nu$ . Из правила Лейбница следует, что такое возможно, только если метрический тензор  $g_{\mu\nu}$  ковариантно постоянен,

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0 . \quad (\text{А.21})$$

Более явно это условие выглядит следующим образом:

$$\partial_\mu g_{\nu\lambda} = \Gamma^\rho_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\nu\rho} .$$

Связности, для которых выполнено условие (А.21), называются связностями, совместными с метрикой (метрическими связностями). Вторым условием, накладываемым на символы Кристоффеля, является требование обращения в нуль антисимметричной по нижним индексам комбинации компонент связности

$$C^\lambda_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0 . \quad (\text{А.22})$$

Из закона преобразования связности (А.16) следует, что  $C^\lambda_{\mu\nu}$  является тензором (“тензором кручения”), следовательно, справедливость соотношения (А.22) не зависит от выбора системы координат.

▷ *Задача 3. Найдите число независимых компонент метрической связности без кручения для пространства размерности  $D = 2, 3, 4$ .*

▷ *Задача 4. Рассмотрим двумерную поверхность  $\Sigma$ , вложенную в трёхмерное евклидово пространство  $R^3$ . Из пространства  $R^3$  на  $\Sigma$  индуцируется метрика: если  $y^i$  ( $i = 1, 2$ ) — координаты на поверхности  $\Sigma$ , то квадрат расстояния между близкими точками, принадлежащими  $\Sigma$ , можно записать в виде*

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j ,$$

---

<sup>7</sup>Псевдориманова геометрия отличается от римановой сигнатурой метрики, которая для римановой геометрии евклидова. Мы будем часто не обращать внимания на эту терминологическую тонкость.



где метрика  $g_{ij}(y)$  однозначно определяется требованием, чтобы  $ds^2$  было квадратом расстояния в  $R^3$ . Для каждой точки поверхности  $\Sigma$  можно определить касательную плоскость; контравариантные вектора, о которых шла речь выше — это вектора, принадлежащие касательной плоскости. Их компоненты  $A^i(y)$  в выбранной системе координат на  $\Sigma$  можно, например, определить соотношением

$$\partial_A \phi(y) = A^i(y) \frac{\partial \phi}{\partial y^i},$$

где  $\phi(y)$  — функция на поверхности  $y$ , а  $\partial_A \phi$  — её производная в направлении, задаваемом вектором  $\vec{A}$ . Параллельный перенос касательного вектора вдоль поверхности  $\Sigma$  осуществляется следующим образом (см. рис. А.2): сначала переносим вектор  $\vec{A}$  из точки  $y$  в точку  $\tilde{y}$  как вектор в  $R^3$  (по-

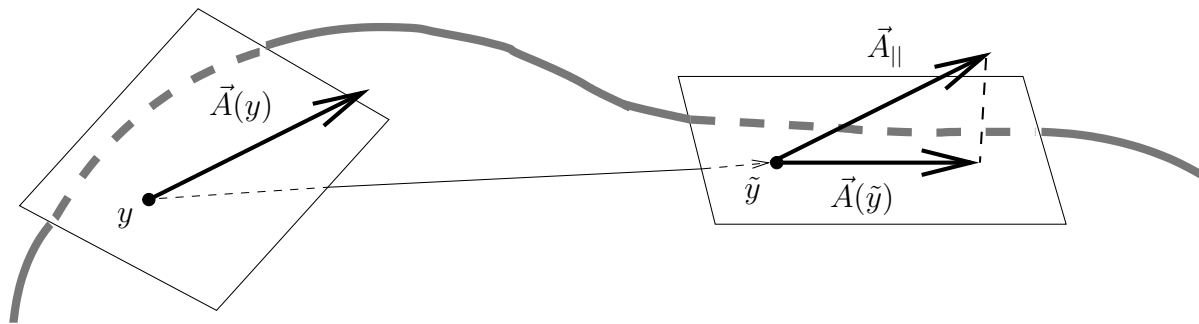


Рис. А.2: Параллельный перенос касательного вектора.

лучая вектор  $\vec{A}_{||}$  на рис. А.2), а затем берём его проекцию на касательную плоскость в точке  $\tilde{y}$ . Пусть поверхность  $\Sigma$  (локально) задана уравнениями

$$x^\alpha = f^\alpha(y^1, y^2), \quad \alpha = 1, 2, 3$$

где  $x^\alpha$  — координаты в  $R^3$ .

- 1) Вычислить компоненты метрики  $g_{ij}(y)$ .
- 2) Вычислить символы Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k(y)$  на поверхности  $\Sigma$ , соответствующие определённой выше операции параллельного переноса вектора.
- 3) Показать, что выполняются свойства (А.21) и (А.22), т.е. геометрия на поверхности  $\Sigma$  является римановой.
- 4) Предложить обобщение операции параллельного переноса вектора, такое, что тензор кручения (А.22) отличен от нуля. Продемонстрировать этой свойство явным вычислением компонент связности. Выполняется ли в этом случае соотношение (А.21)?

Уравнения (А.21) и (А.22) позволяют однозначно выразить символы Кристоффеля через компоненты метрического тензора,

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\lambda}). \quad (\text{А.23})$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать справедливость равенства (А.23).

▷ Задача 5. Выведите формулу (А.23) из соотношений (А.21) и (А.22).

▷ Задача 6. Докажите следующие часто используемые свойства символов Кристоффеля и ковариантной производной:

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\mu} = \partial_{\nu} \ln \sqrt{-g} \quad (\text{А.24})$$

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\lambda\mu}) \quad (\text{А.25})$$

$$\nabla_{\mu} A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} A^{\mu}) \quad (\text{А.26})$$

для антисимметричного тензора  $A^{\mu\nu}$ :

$$\nabla_{\mu} A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} A^{\mu\nu}) , \quad (\text{А.27})$$

для скаляра  $\phi$ :

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi) , \quad (\text{А.28})$$

где

$$\nabla^{\mu} \phi \equiv g^{\mu\nu} \nabla_{\nu} \phi .$$

Из свойства (А.26) следует обобщение формулы Гаусса для интегралов от выражений, имеющих вид полной ковариантной дивергенции:

$$\int (\nabla_{\nu} A^{\nu}) \sqrt{-g} d^4x = \int \partial_{\nu} (\sqrt{-g} A^{\nu}) d^4x = \int \sqrt{-g} A^{\nu} d\Sigma_{\nu} ,$$

где  $d\Sigma_{\nu}$  — элемент поверхности, ограничивающей область интегрирования. Совместно с правилом Лейбница для ковариантных производных эта формула позволяет производить интегрирование по частям в инвариантных интегралах. К примеру,

$$\int A_{\mu} \nabla_{\nu} B^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = - \int (\nabla_{\nu} A_{\mu}) B^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \text{поверхностные члены} .$$

В заключение этого раздела отметим следующий факт. Выбрав подходящую систему координат, можно локально, в заданной точке, обнулить все символы Кристоффеля; это полностью соответствует принципу эквивалентности, поскольку позволяет локально исключить гравитационное поле<sup>8</sup>. В этой системе координат все ковариантные производные совпадают с обычными, а все первые производные метрического тензора обращаются в нуль (в силу (А.21)).

Переход в такую систему для заданной точки, которую мы поместим в начало координат, осуществляет преобразование:

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}(0) x^{\nu} x^{\lambda} , \quad (\text{А.29})$$

где  $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}(0)$  — значения символов Кристоффеля в нуле в координатах  $x$ . Воспользовавшись соотношением (А.16), несложно убедиться, что в новой системе все символы

---

<sup>8</sup>Вообще говоря, справедливо и более сильное утверждение: можно занулить все символы Кристоффеля вдоль любой наперёд заданной мировой линии.

Кристоффеля действительно обнуляются в начале координат. Отметим, что ключевую роль здесь играет симметричность символа Кристоффеля по нижним индексам, формула (А.22).

Поскольку само преобразование (А.29) в начале координат является тождественным, то дополнительно к обращению в нуль символов Кристоффеля можно производить преобразования и с самим метрическим тензором. Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы свести метрический тензор в начале координат к тензору Минковского. Для этого достаточно выбрать  $x^\mu = J^\mu_\nu x'^\nu$ , где  $J^\mu_\nu$  не зависит от координат. В матричных обозначениях будем иметь соотношение (А.9). Ортогональным преобразованием матрицу  $g_{\mu\nu}$  можно привести к диагональному виду, а затем свести к тензору Минковского растяжением координат. Получившаяся в результате система координат, где

$$g_{\mu\nu}(0) = \eta_{\mu\nu} , \quad \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(0) = 0 ,$$

носит название *локально лоренцевой системы*.

### А.3 Тензор кривизны

Как видно из формулы (А.23), символы Кристоффеля отличны от нуля, если метрика нетривиальным образом зависит от координат  $x^\mu$ . Следует понимать, что отличие  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  от нуля ещё не говорит о том, что пространство отличается от плоского. Поскольку величины  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  не образуют тензора, они могут быть тождественно равны нулю в одной системе координат и отличаться от нуля в другой системе координат.

▷ *Задача 7. Найдите символы Кристоффеля в полярной системе координат на двумерной плоскости и в сферических координатах в трёхмерном евклидовом пространстве.*

Величиной, которая действительно характеризует геометрию пространства, а не выбор системы координат, является тензор кривизны (тензор Римана)  $R^\mu_{\nu\lambda\rho}$ . Тензор кривизны определяет то, как коммутатор ковариантных производных действует на тензоры. Например, для произвольного касательного вектора  $A^\lambda$  имеем

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\lambda = A^\sigma R^\lambda_{\sigma\mu\nu} . \quad (\text{А.30})$$

▷ *Задача 8. Проверьте, что равенство (А.30) действительно определяет тензор  $R^\mu_{\nu\lambda\rho}$ . В частности, проверьте, что все члены с производными  $A^\lambda$ , которые могли бы возникнуть в левой части равенства, действительно сокращаются.*

Явное выражение для тензора кривизны имеет следующий вид

$$R^\mu_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} . \quad (\text{А.31})$$

Для того, чтобы лучше понять геометрический смысл тензора Римана, рассмотрим параллельный перенос вектора  $A^\lambda$  из точки  $x$  с координатами  $x^\mu$  в точку  $\tilde{x}$  с координатами

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + dy^\mu + dz^\mu ,$$

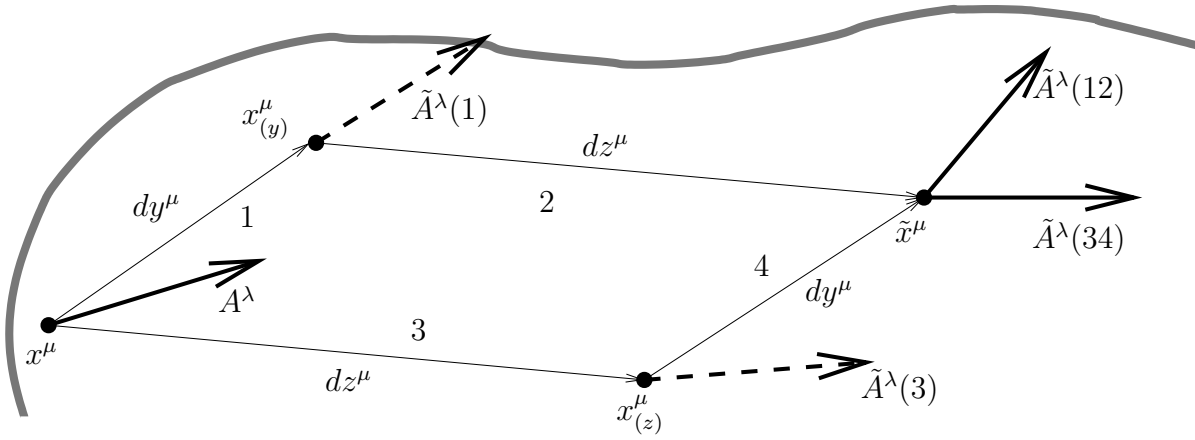


Рис. А.3: Параллельный перенос вектора вдоль различных путей (12) и (34).

где направления векторов  $dy^\mu$  и  $dz^\mu$  не совпадают (см. рис. А.3). Этот параллельный перенос можно произвести различными способами. Например, можно сначала перенести вектор  $A^\lambda$  вдоль пути 1 в точку  $y$  с координатами

$$x^\mu_{(y)} = x^\mu + dy^\mu ,$$

а потом вдоль пути 2 в точку  $\tilde{x}$ . Можно сделать наоборот, а именно, осуществить сначала параллельный перенос вектора  $A^\lambda$  вдоль пути 3 в точку  $z$  с координатами

$$x^\mu_{(z)} = x^\mu + dz^\mu ,$$

а потом вдоль пути 4 в точку  $\tilde{x}$ . Конечно, в плоском пространстве результат параллельного переноса не будет зависеть от выбора пути. В случае искривлённого пространства это уже, вообще говоря, неверно. Пользуясь правилом параллельного переноса (А.13) можно непосредственно убедиться, что результат переноса не зависит от пути в линейном порядке по приращениям координат. Однако, в квадратичном порядке мы получим

$$\tilde{A}^\lambda(12) - \tilde{A}^\lambda(34) = A^\sigma R^\lambda_{\sigma\mu\nu} dz^\mu dy^\nu , \quad (\text{А.32})$$

где  $\tilde{A}^\lambda(12)$  и  $\tilde{A}^\lambda(34)$  — образы вектора  $A^\lambda$  при параллельных переносах вдоль путей (12) и (34) соответственно.

▷ **Задача 9.** Получите равенство (А.32). В частности, убедитесь, что члены второго порядка малости по  $dx^\mu$ , опущенные в правиле параллельного переноса (А.13), не дают вклада в разность  $\left(\tilde{A}^\lambda(12) - \tilde{A}^\lambda(34)\right)$  в квадратичном порядке малости.

Таким образом, тензор  $R^\mu_{\nu\lambda\rho}$  определяет зависимость параллельного переноса от пути, вдоль которого он производится. Следовательно, тензор Римана действительно является нетривиальной характеристикой кривизны пространства.

▷ **Задача 10.** Пользуясь символами Кристоффеля, найденными в задаче 7, проверьте явным вычислением, что все компоненты тензора Римана равны нулю в полярной системе координат на плоскости и в сферических координатах в трёхмерном евклидовом пространстве.

Все рассуждения, приведённые выше, можно с минимальными изменениями перенести на случай ковариантного вектора  $A_\mu$ . Аналог формулы (А.30) имеет в этом случае следующий вид:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\lambda = -A_\sigma R^\sigma_{\lambda\mu\nu} .$$

Действие коммутатора ковариантных производных

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \equiv \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu$$

на тензор произвольного ранга вытекает из того факта, что для оператора  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$  выполнено тождество Лейбница (поскольку оно выполнено для отдельных ковариантных производных  $\nabla_\mu$  и  $\nabla_\nu$ ). К примеру,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\rho_\lambda = R^\rho_{\sigma\mu\nu} A^\sigma_\lambda - R^\sigma_{\lambda\mu\nu} A^\rho_\sigma . \quad (\text{А.33})$$

Перечислим ряд важных свойств тензора Римана

1) Тензор

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} \equiv g_{\mu\sigma} R^\sigma_{\nu\lambda\rho}$$

антисимметричен по первой и по второй паре индексов.

2) Тензор  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$  симметричен относительно перестановки пар индексов  $(\mu\nu) \leftrightarrow (\lambda\rho)$ .

3) Для любых трёх индексов сумма трёх компонент тензора  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ , соответствующих циклической перестановке этих индексов, равна нулю. Например,

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} + R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\nu\lambda\mu\rho} = 0 .$$

4) Справедливо тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\mu} + \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho} = 0 . \quad (\text{А.34})$$

▷ *Задача 11.* Пользуясь явным выражением (А.31) для компонент тензора Римана, докажите свойства 1), 2), 3).

▷ *Задача 12.* Пользуясь свойствами 1), 2), 3) определите число независимых компонент тензора Римана в каждой точке для размерности пространства  $D = 2, 3, 4$ .

Доказательство свойства (4) (тождества Бьянки), использующее явный вид (А.31) тензора Римана, было бы слишком громоздким. Вместо этого удобно непосредственно использовать определение (А.30). А именно, воспользуемся следующим равенством (тождеством Якоби), справедливым для произвольных операторов

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0 .$$

▷ *Задача 13.* Докажите тождество Якоби.

Взяв в качестве операторов  $A, B, C$  ковариантные производные и подействовав на произвольный вектор  $A^\lambda$ , получим

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]A^\lambda + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]A^\lambda + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]A^\lambda = 0. \quad (\text{A.35})$$

Далее, раскрывая один из коммутаторов и пользуясь определением (А.30), получаем

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]A^\lambda = \nabla_\rho(R^\lambda_{\sigma\mu\nu}A^\sigma) - [\nabla_\mu, \nabla_\nu](\nabla_\rho A^\lambda). \quad (\text{A.36})$$

Раскрывая правую часть в (А.36) с помощью тождества Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} [\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]A^\lambda &= \nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu}A^\sigma + R^\lambda_{\sigma\mu\nu}\nabla_\rho A^\sigma - R^\lambda_{\sigma\mu\nu}\nabla_\rho A^\sigma + R^\sigma_{\rho\mu\nu}\nabla_\sigma A^\lambda \\ &= \nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu}A^\sigma + R^\sigma_{\rho\mu\nu}\nabla_\sigma A^\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

При подстановке выражения (А.37) и аналогичных выражений для двух других двойных коммутаторов в тождество Якоби (А.35) получаем, пользуясь свойством (3) тензора Римана, что

$$(\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\mu} + \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho})A^\sigma = 0$$

для произвольного вектора  $A^\sigma$ . Следовательно, тождество Бьянки действительно выполняется.

Сворачивая индексы тензора Римана  $R_{\mu\nu\lambda\rho}$  друг с другом, можно построить новый тензор с меньшим числом индексов, характеризующий кривизну пространства. Из свойств симметрии тензора Римана относительно перестановки индексов следует, что при свёртке любых двух его индексов получается либо нуль, либо следующий симметричный тензор второго ранга

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu},$$

называемый тензором Риччи. В дальнейшем нам часто будет нужен явный вид этого тензора:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \Gamma^\rho_{\nu\lambda}. \quad (\text{A.38})$$

Производя свёртку тензора Риччи по его двум индексам, мы получаем скаляр кривизны

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

▷ **Задача 14.** Найдите компоненты метрики, символы Кристоффеля, компоненты тензоров Римана и Риччи и скаляр кривизны на двумерной сфере  $S^2$ .

▷ **Задача 15.** Покажите, что на произвольной двумерной поверхности величина  $\sqrt{g}R$  является полной производной и, следовательно, интеграл скаляра кривизны по инвариантному объёму

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2x \sqrt{g}R \quad (\text{A.39})$$

не зависит от выбора метрики на поверхности (теорема Гаусса–Бонне). Таким образом, в случае двумерного пространства данный интеграл является характеристикой топологии. Скаляр кривизны совпадает с удвоенной гауссовой кривизной. Интеграл (А.39) даёт степень гауссова отображения и совпадает с эйлеровой характеристикой двумерной поверхности. Найдите значение этого интеграла на сфере и на торе.

## А.4 Уравнения гравитационного поля

Теперь в нашем распоряжении имеются все объекты, необходимые для построения действия ОТО. В ОТО метрический тензор является динамическим полем (“гравитационным полем”), а уравнения ОТО возникают как условия экстремума для функционала действия. Как мы уже упоминали, один из основных принципов ОТО состоит в том, что все выборы системы локальных координат равноправны. Это означает, что вид уравнений на гравитационное поле  $g_{\mu\nu}$ , записанных через ковариантные величины, не зависит от выбора локальных координат. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы действие для гравитационного поля  $S_{gr}$  было скаляром, то есть записывалось в виде интеграла от скалярной плотности Лагранжа  $\mathcal{L}_{gr}$  по инвариантному 4-объёму:

$$S_{gr} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{gr} .$$

Простейшая возможность заключается в том, чтобы взять в качестве плотности Лагранжа постоянную величину  $(-\Lambda)$ , не зависящую от метрики:

$$S_{\Lambda} = -\Lambda \int d^4x \sqrt{-g} . \quad (\text{A.40})$$

Такой член действительно может входить в действие для гравитационного поля и играть важную роль в космологии. Из безразмерности действия следует, что величина  $\Lambda$  имеет размерность (масса)<sup>4</sup>. Эта величина носит название космологической постоянной или, по причинам, которые объяснены в Главе 3, плотности энергии вакуума. Однако, действие (A.40) не может быть полным действием для гравитационного поля. Действительно,  $S_{\Lambda}$  не содержит производных метрики  $g_{\mu\nu}$ , а, следовательно, при его вариации получились бы чисто алгебраические уравнения, что не позволяло бы интерпретировать  $g_{\mu\nu}$  как настоящее динамическое поле.

Ещё одна скалярная величина, имеющаяся в нашем распоряжении, — это скаляр кривизны  $R$ , а, точнее, произвольная функция  $f(R)$ . Чтобы понять, какой выбор функции  $f(R)$  в качестве плотности Лагранжа наиболее естественен, вспомним, что обычно используются уравнения поля, имеющие первый или второй порядок по производным. Чтобы уравнения поля имели порядок по производным не выше второго, обычно требуют, чтобы плотность Лагранжа не содержала производных выше первого порядка. Действительно, рассмотрим теорию поля с действием вида

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, \dots) . \quad (\text{A.41})$$

Здесь символ  $\phi$  обозначает все поля теории, и мы опустили возможные тензорные индексы. Вариация действия (A.41), соответствующая малым изменениям полей  $\phi$ ,

$$\phi \rightarrow \phi + \delta\phi ,$$

имеет вид

$$\delta S = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\phi)} \partial\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^2\phi)} \partial^2\delta\phi + \dots \right) .$$

Предполагая, что вариации полей  $\delta\phi$  обращаются в нуль на бесконечности, и интегрируя по частям, мы приходим к уравнениям движения следующего вида

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\phi)} + \partial^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^2\phi)} + \dots = 0 , \quad (\text{A.42})$$

которые, вообще говоря, содержат производные полей выше второго порядка.

Тензор Римана (А.31), а, следовательно, и скаляр кривизны  $R$ , содержат первые производные от символов Кристоффеля  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ . Последние, в свою очередь, содержат первые производные от метрического тензора  $g_{\mu\nu}$ . Следовательно, если плотность Лагранжа  $\mathcal{L}_{gr}$  нетривиальным образом зависит от скаляра кривизны, то действие обязательно содержит производные второго порядка. Исходя из рассуждения, приведённого выше, можно было бы прийти к выводу, что невозможно написать ковариантное действие для гравитационного поля, приводящее к уравнениям второго порядка по производным. Заметим, однако, что если в уравнении (А.42) плотность Лагранжа  $\mathcal{L}$  зависит от вторых производных полей только через члены вида

$$f(\phi)\partial^2\phi$$

и не содержит более старших производных, то уравнения движения не содержат старших производных. На самом деле это означает, что проинтегрировав действие по частям и отбросив поверхностные члены, можно прийти к плотности Лагранжа, зависящей только от первых производных полей.

Нетрудно убедиться, что действие

$$S_{EH} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (\text{А.43})$$

зависит от вторых производных именно таким образом.

▷ *Задача 16.* С помощью интегрирования по частям найдите действие, эквивалентное действию (А.43), и не содержащее вторых производных. Является ли плотность Лагранжа для этого действия скаляром? А само действие?

Это действие носит название действия Эйнштейна–Гильберта. Как мы убедимся в дальнейшем, константа  $G$ , имеющая размерность  $(\text{масса})^{-2}$ , равна ньютоновской гравитационной постоянной. Масса, соответствующая  $G$ , — это масса Планка

$$M_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{G}} \approx 1.2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ} . \quad (\text{А.44})$$

Полное действие для гравитационного поля имеет вид суммы членов (А.40) и (А.43),

$$S_{gr} = S_\Lambda + S_{EH} . \quad (\text{А.45})$$

Для того, чтобы получить уравнения гравитационного поля, необходимо вычислить вариацию действия  $\delta S_{gr}$  при малом изменении метрики

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} .$$

Начнём с первого, более простого члена  $S_\Lambda$ . Чтобы проварьировать  $S_\Lambda$ , воспользуемся следующей хорошо известной формулой из линейной алгебры

$$\det(M + \delta M) = \det(M) (1 + \text{Tr}(M^{-1}\delta M) + o(\delta M)) , \quad (\text{А.46})$$

где  $M$  — произвольная невырожденная матрица.

▷ *Задача 17.* Докажите формулу (А.46).



Применяя соотношение (А.46) для определителя метрического тензора, получаем

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{А.47})$$

Пользуясь этим результатом, приходим к следующему выражению для вариации  $S_\Lambda$ :

$$\delta S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{А.48})$$

Перейдём теперь к вычислению вариации действия Эйнштейна–Гильберта  $S_{EH}$ . Вариация  $S_{EH}$  может быть записана в виде следующих трёх членов

$$\delta S_{EH} = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 ,$$

где

$$\delta S_1 = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x R \delta(\sqrt{-g}) ,$$

$$\delta S_2 = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

и

$$\delta S_3 = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} . \quad (\text{А.49})$$

Пользуясь соотношением (А.48), мы сразу же получаем явное выражение для  $\delta S_1$ :

$$\delta S_1 = -\frac{1}{32\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{А.50})$$

Для того, чтобы вычислить  $\delta S_2$ , заметим, что варьируя уравнение (А.8), являющееся определением  $g^{\mu\nu}$ , мы получаем

$$g_{\rho\lambda} \delta g^{\mu\rho} = -g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\lambda} .$$

Свернув обе части этого равенства с матрицей  $g^{\lambda\nu}$ , получим

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\lambda} g^{\lambda\nu} . \quad (\text{А.51})$$

Следовательно,

$$\delta S_2 = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{А.52})$$

Остаётся найти вариацию  $\delta S_3$ , которая на первый взгляд выглядит наиболее сложным образом. Для того, чтобы вычислить  $\delta S_3$ , заметим, что из правила преобразования символов Кристоффеля (А.16) следует, что *вариация*  $\delta \Gamma_{\nu\lambda}^\mu$  является тензором. Далее, пользуясь формулой (А.31), получаем следующее выражение для вариации тензора Римана:

$$\delta R_{\nu\lambda\rho}^\mu = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu - \partial_\rho \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \delta \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \delta \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \delta \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma .$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что справедлива формула

$$\delta R_{\nu\lambda\rho}^\mu = \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\nu\rho}^\mu) - \nabla_\rho (\delta \Gamma_{\nu\lambda}^\mu) , \quad (\text{А.53})$$

где ковариантные производные берутся относительно невозмущённой метрики. Из равенства (А.53) получаем следующее выражение для вариации тензора Риччи

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) . \quad (\text{А.54})$$

Подставляя выражение (А.54) в (А.49), получаем

$$\begin{aligned} \delta S_3 &= -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)] \\ &= -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) , \end{aligned} \quad (\text{А.55})$$

где во втором равенстве мы внесли тензор  $g^{\mu\nu}$  под знак ковариантной производной и переименовали индексы суммирования  $\nu$  и  $\lambda$  во втором члене. Наконец, пользуясь свойством (А.26), мы можем переписать  $\delta S_3$  в виде интеграла от полной дивергенции

$$\delta S_3 = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \partial_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) .$$

Следовательно,  $\delta S_3$  не даёт вклада в уравнения поля. Собирая вместе вариации (А.50) и (А.52), получаем для вариации действия Эйнштейна-Гильберта

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{А.56})$$

Отсюда и из (А.48) вытекают следующие уравнения для гравитационного поля (уравнения Эйнштейна):

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi G \Lambda g^{\mu\nu} . \quad (\text{А.57})$$

Видно, что уравнения Эйнштейна действительно квадратичны по производным.

Уравнения Эйнштейна иногда записывают в форме

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G \Lambda g_{\mu\nu} ,$$

где

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

— тензор Эйнштейна.

## А.5 Конформно-связанные метрики

Для некоторых приложений полезно иметь соотношения между тензорами Риччи и скалярами кривизны для метрик, *конформно связанных* между собой. Пусть имеются две метрики  $g_{\mu\nu}$  и  $\hat{g}_{\mu\nu}$ , такие, что

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\varphi(x)} g_{\mu\nu}(x) , \quad (\text{А.58})$$

где  $\varphi(x)$  — некоторая функция координат — скаляр относительно общековариантных преобразований. Задача состоит в том, чтобы выразить  $\hat{R}_{\mu\nu}$  и  $\hat{R}$  — тензор Риччи и скаляр кривизны, построенные по метрике  $\hat{g}_{\mu\nu}$  — через  $R_{\mu\nu}$  и  $R$ , построенные по

метрике  $g_{\mu\nu}$ . Для её решения найдём сначала связь между символами Кристоффеля. Прямая подстановка (А.58) в (А.23) даёт

$$\hat{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} = \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} + \delta_{\lambda}^{\mu} \partial_{\nu} \varphi + \delta_{\nu}^{\mu} \partial_{\lambda} \varphi - g_{\nu\lambda} g^{\mu\rho} \partial_{\rho} \varphi .$$

В результате подстановки этого выражения в (А.38) и прямолинейного (хотя и довольно длинного) вычисления получим

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 2\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \varphi - g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \nabla_{\lambda} \nabla_{\rho} \varphi + 2\partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi - 2g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} \partial_{\lambda} \varphi \partial_{\rho} \varphi , \quad (\text{А.59})$$

где ковариантная производная берётся в метрике  $g_{\mu\nu}$ . Отсюда для скаляра кривизны  $\hat{R} = \hat{g}^{\mu\nu} \hat{R}_{\mu\nu}$  будем иметь

$$\hat{R} = e^{-2\varphi} (R - 6g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \varphi - 6g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi) , \quad (\text{А.60})$$

а тензор Эйнштейна получим в виде

$$\hat{G}_{\mu\nu} \equiv \hat{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{R} = G_{\mu\nu} - 2\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \varphi + 2\partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi + g_{\mu\nu} (2\nabla_{\lambda} \nabla^{\lambda} \varphi + \partial_{\lambda} \varphi \partial^{\lambda} \varphi) , \quad (\text{А.61})$$

причём в правой части подъём и опускание индексов ведётся с метрикой  $g_{\mu\nu}$ . Наконец, для интеграла, входящего в действие гравитационного поля, связь имеет вид

$$\int \hat{R} \sqrt{-\hat{g}} d^4 x = \int e^{2\varphi} R \sqrt{-g} d^4 x + 6 \cdot \int e^{2\varphi} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi \sqrt{-g} d^4 x .$$

Последнее соотношение получается с использованием (А.60) путём интегрирования по частям.

В качестве примера применения полученных формул приведём доказательство того, что “нелинейные гравитационные теории” с действиями вида

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} f(R) , \quad (\text{А.62})$$

где  $f(R)$  — произвольная функция скаляра кривизны  $R$ , динамически эквивалентны обычной гравитации (т.е. общей теории относительности, описываемой лагранжианом Эйнштейна–Гильберта) с самодействующим скалярным полем.<sup>9</sup>

Чтобы убедиться в этом, вначале найдём уравнения поля, обращающие в нуль вариацию действия (А.62). Запишем эту вариацию снова в виде суммы трёх слагаемых

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 , \\ \delta S_1 &= \int d^4 x f(R) \delta(\sqrt{-g}) , \\ \delta S_2 &= \int d^4 x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} f'(R) R_{\mu\nu} , \\ \delta S_3 &= \int d^4 x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} f'(R) \delta R_{\mu\nu} , \end{aligned}$$

---

<sup>9</sup>Из соображений удобства при записи действия (А.62) и до конца этого раздела мы будем работать в системе единиц  $16\pi G = 1$ .

где  $f'(R) \equiv \partial f(R)/\partial R$ . Вариации  $\delta S_1$  и  $\delta S_2$  являются простыми обобщениями аналогичных выражений для лагранжиана Эйнштейна–Гильберта (см. (А.50) и (А.52)):

$$\delta S_1 = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} , \quad (\text{А.63})$$

$$\delta S_2 = - \int d^4x \sqrt{-g} f'(R) R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} . \quad (\text{А.64})$$

Для вычисления  $\delta S_3$  воспользуемся выражением (А.54), в которое подставим вариацию символа Кристоффеля

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\nabla_{\mu} \delta g_{\nu\rho} + \nabla_{\nu} \delta g_{\mu\rho} - \nabla_{\rho} \delta g_{\mu\nu}) .$$

В результате этой подстановки получим из (А.54):

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-\nabla_{\lambda} \nabla^{\lambda} \delta g_{\mu\nu} + \nabla^{\lambda} \nabla_{\mu} \delta g_{\lambda\nu} + \nabla^{\lambda} \nabla_{\nu} \delta g_{\lambda\mu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} \delta g_{\lambda}^{\lambda}) . \quad (\text{А.65})$$

Тогда для вариации  $\delta S_3$  имеем:

$$\delta S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} (\nabla^{\mu} \nabla^{\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_{\lambda} \nabla^{\lambda}) f'(R) , \quad (\text{А.66})$$

где мы дважды проинтегрировали по частям. В случае лагранжиана Гильберта–Эйнштейна выполняется  $f' = 1$ , поэтому выражение (А.66) зануляется и не даёт вклада в уравнения движения.

Окончательно, приравнявая нулю вариацию  $\delta S$ , получаем уравнения движения для теории с действием (А.62):

$$\frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - f'(R) R_{\mu\nu} + (\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} \nabla^{\lambda} \nabla_{\lambda}) f'(R) = 0 . \quad (\text{А.67})$$

Отметим, что полученные уравнения являются уравнениями четвёртого порядка.

Удобно ввести новые переменные  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ , сделав конформное преобразование:

$$g_{\mu\nu} = \psi^{-1} \tilde{g}_{\mu\nu} , \quad \psi = f'(R) . \quad (\text{А.68})$$

Мы будем полагать, что  $\psi > 0$ , тогда новая метрика  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  будет иметь ту же сигнатуру, что и метрика  $g_{\mu\nu}$ . Связь между тензорами Риччи и скалярами кривизны для этих двух метрик даётся формулами (А.59) и (А.60) с  $\varphi = -\frac{1}{2} \ln \psi$ . Имеем, таким образом,

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} + \psi^{-1} \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}_{\nu} \psi + \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_{\lambda} \tilde{\nabla}^{\lambda} \psi - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_{\nu} \psi \tilde{\nabla}_{\mu} \psi + 2 \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_{\lambda} \psi \tilde{\nabla}^{\lambda} \psi) , \quad (\text{А.69})$$

$$R = \psi \tilde{R} + 3 \tilde{\nabla}_{\mu} \tilde{\nabla}^{\mu} \psi - \frac{9}{2} \psi^{-1} \tilde{\nabla}_{\lambda} \psi \tilde{\nabla}^{\lambda} \psi , \quad (\text{А.70})$$

где все символы с тильдой относятся к соответствующим величинам, вычисленным для метрики  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ .

Пусть  $R_0(\psi)$  — единственное решение уравнения

$$f'(R_0(\psi)) - \psi = 0$$

(дальнейшее рассмотрение обобщается и на случай нескольких решений), т.е.  $R_0$  — функция, обратная к  $f'$ . Выберем  $\psi$  так, чтобы

$$R = R_0(\psi) . \quad (\text{A.71})$$

В новых переменных уравнение (A.67) примет вид:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}\tilde{g}_{\mu\nu} = \psi^{-2} \left[ \frac{1}{2} (f(R_0(\psi)) - \psi R_0(\psi)) \tilde{g}_{\mu\nu} + \frac{3}{2}\tilde{\nabla}_\mu\psi\tilde{\nabla}_\nu\psi - \frac{3}{4}\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\lambda\psi\tilde{\nabla}^\lambda\psi \right] . \quad (\text{A.72})$$

Необходимо ещё учесть уравнение (A.71). Левая часть этого уравнения даётся формулой (A.70), а  $\tilde{R}$  найдём, свернув (A.72) с  $\tilde{g}^{\mu\nu}$ . Таким образом, получим уравнение

$$\psi\tilde{\nabla}_\lambda\tilde{\nabla}^\lambda\psi - \tilde{\nabla}_\lambda\psi\tilde{\nabla}^\lambda\psi + \frac{1}{3}(\psi R_0(\psi) - 2f(R_0(\psi))) = 0 . \quad (\text{A.73})$$

Итак, вместо системы уравнений четвёртого порядка (A.67) в новых переменных  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  и  $\psi$  получаем расширенную систему уравнений второго порядка (A.72), (A.73). Эта система совпадает с уравнениями обычной гравитации, взаимодействующей со скалярным полем  $\psi$ .

Можно построить действие, варьирование которого по  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  и по  $\psi$  приводит к уравнениям (A.72) и (A.73), соответственно:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left( \frac{3}{2} \frac{\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\psi\tilde{\nabla}_\nu\psi}{\psi^2} + \frac{R_0(\psi)}{\psi} - \frac{f(R_0(\psi))}{\psi^2} \right) . \quad (\text{A.74})$$

▷ *Задача 18.* Получить уравнения (A.72) и (A.73) варьированием действия (A.74).

В действии (A.74) кинетический член скалярного поля можно привести к каноническому виду заменой  $\psi = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}$ . Окончательно получаем действие

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left\{ \tilde{R} - \tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\mu\phi\tilde{\nabla}_\nu\phi - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} R_0(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}) + e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi} f[R_0(e^{\sqrt{\frac{2}{3}}\phi})] \right\} ,$$

описывающее самодействующее скалярное поле  $\phi$  в рамках обычной гравитации Эйнштейна–Гильберта. Выполненные преобразования показали, что эта теория динамически эквивалентна теории “нелинейной” гравитации с действием (A.62).

▷ *Задача 19.* При каких условиях на функции  $\omega(\varphi)$  и  $V(\varphi)$  скалярно-тензорная теория гравитации, описываемая действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{1}{2}\omega(\varphi)\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\varphi) \right)$$

(здесь  $\varphi$  — скалярное поле), эквивалентна  $f(R)$ -гравитации?

Отметим, что в результате конформного преобразования поля материи начинают взаимодействовать с полем дилатона  $\phi$ . В результате, например для однородного решения  $\phi = \phi(t)$  “космологические часы” (время, входящее в метрику Фридмана) отличаются от “атомных часов” (времени, определяющего эволюцию и взаимодействие полей материи). В этом смысле в присутствии полей материи  $f(R)$ -гравитация не эквивалентна ОТО со скалярным полем.

## А.6 Взаимодействие материи с гравитационным полем. Тензор энергии-импульса

Уравнения (А.57) описывают динамику гравитационного поля без полей материи. Однако, в первую очередь представляет интерес изучение гравитации в присутствии полей материи, служащих источниками гравитационного поля. Для того, чтобы описать такую более общую ситуацию, необходимо добавить к действию (А.45) новое слагаемое

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (\text{А.75})$$

описывающее материю и ее взаимодействие с гравитационным полем. Здесь плотность лагранжиана  $\mathcal{L}$  является скалярной функцией гравитационного поля  $g_{\mu\nu}$  и полей материи, которые мы коллективно обозначим символом  $\psi$ :

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(\psi, g_{\mu\nu}).$$

При добавлении члена (А.75) в действие, уравнения Эйнштейна (А.57) модифицируются следующим образом:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G (\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}), \quad (\text{А.76})$$

где мы перешли к тензорам с нижними индексами. Здесь симметричный тензор  $T_{\mu\nu}$  определяется следующим равенством:

$$\delta S_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{А.77})$$

Последнее равенство можно переписать с учётом (А.51),

$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Уравнение (А.76) (с верхними индексами) получается теперь с использованием (А.56).

Чтобы понять физический смысл тензора  $T_{\mu\nu}$ , вычислим его для двух простых теорий — теории скалярного поля и теории электромагнитного поля. Ковариантное действие, описывающее действительное скалярное поле, взаимодействующее с гравитацией, имеет следующий вид:

$$S_{sc} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right), \quad (\text{А.78})$$

где скалярный потенциал  $V(\phi)$  может быть произвольной функцией поля  $\phi$ . Вообще говоря, к действию (А.78) можно добавить следующий член, обращающийся в нуль в плоском пространстве

$$S_\xi = \xi \int d^4x \sqrt{-g} R U(\phi), \quad (\text{А.79})$$

где  $U(\phi)$  — произвольная функция. Мы ограничимся случаем  $\xi = 0$ . В этом случае взаимодействие скалярного поля с гравитацией называется минимальным.

Используя определение (А.77), получаем следующее выражение для тензора  $T_{\mu\nu}$  скалярного поля:

$$T_{\mu\nu}^{sc} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{sc}, \quad (\text{А.80})$$

где  $\mathcal{L}_{sc}$  — лагранжиан скалярного поля.

▷ *Задача 20.* Найти тензор  $T_{\mu\nu}$  для свободного безмассового скалярного поля, неминимальным образом взаимодействующего с гравитацией,  $\xi \neq 0$ , выбрав

$$U(\phi) = \phi^2 ,$$

причём  $V(\phi) = 0$ . При каком значении параметра  $\xi$  след  $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  этого тензора равен нулю на уравнениях движения?

Найдём теперь явный вид тензора  $T_{\mu\nu}$  для электромагнитного поля. Действие для векторного поля  $A_\mu$ , взаимодействующего с гравитацией, имеет вид

$$S_{em} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} , \quad (\text{A.81})$$

где  $F_{\mu\nu}$  — обычный тензор напряжённости,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (\text{A.82})$$

На первый взгляд, в искривлённом пространстве необходимо заменить обычные производные в определении (A.82) ковариантными производными, чтобы  $F_{\mu\nu}$  был тензором. Однако легко проверить, что для симметричной связности члены с символами Кристоффеля сокращаются при антисимметризации по  $\mu$  и  $\nu$ , поэтому  $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

Пользуясь действием (A.81), получаем следующее выражение для тензора  $T_{\mu\nu}$  электромагнитного поля:

$$T_{\mu\nu}^{em} = -F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} g^{\lambda\rho} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} . \quad (\text{A.83})$$

Заметим теперь, что в случае пространства Минковского,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} ,$$

и для скалярного, и для электромагнитного полей тензор  $T_{\mu\nu}$  совпадает с тензором энергии-импульса. Для скалярного поля  $T_{\mu\nu}^{sc}$  в точности равен нётеровскому тензору энергии-импульса, а для электромагнитного поля  $T_{\mu\nu}^{em}$  отличается на уравнениях движения от нётеровского на полную дивергенцию от антисимметричного тензора.

▷ *Задача 21.* Проверьте эти утверждения.

В частности, в пространстве Минковского (00)-компоненты этих тензоров

$$T_{00}^{sc} = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + V(\phi)$$

и

$$T_{00}^{el} = \frac{1}{2} F_{0i}^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \equiv \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2)$$

представляют собой плотности энергии скалярного и электромагнитного полей.

Вообще, тензор  $T_{\mu\nu}$ , определенный равенством (A.77) называется метрическим тензором энергии-импульса. Подчеркнём, что он всегда симметричен. Ниже мы докажем, что в пространстве Минковского он всегда на уравнениях движения равен

нётеровскому тензору энергии-импульса с точностью до полной дивергенции от антисимметричного тензора.

В плоском мире тензор энергии-импульса сохраняется

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.84})$$

что приводит к законам сохранения энергии и импульса. Естественнo предположить, что обобщением закона сохранения (A.84) на случай искривлённого пространства является ковариантный закон сохранения

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.85})$$

Для того, чтобы вывести уравнение (A.85), возьмём дивергенцию от обеих частей уравнений Эйнштейна (A.76),

$$\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 8\pi G \nabla^\mu T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.86})$$

где

$$\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\nu.$$

Докажем, что левая часть уравнения (A.86) *тождественно* равна нулю. Для этого сначала свернём тождество Бьянки (A.34) по индексам  $\lambda$  и  $\mu$ . В результате мы получим следующее тождество:

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu} - \nabla_\nu R_{\sigma\rho} + \nabla_\lambda R^\lambda_{\sigma\nu\rho} = 0.$$

Свернём теперь это равенство с помощью тензора  $g^{\sigma\rho}$ . Получим

$$0 = \nabla_\rho R^\rho_\nu - \nabla_\nu R + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} = 2\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right).$$

Таким образом, мы получили тождество

$$\nabla^\mu \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = 0,$$

из которого следует, что ковариантный закон сохранения тензора энергии-импульса (A.85) является необходимым условием совместности уравнений Эйнштейна.

С другой стороны, тензор энергии-импульса целиком определяется видом действия для полей материи. Следовательно, для проверки совместности всей системы полевых уравнений необходимо получить ковариантный закон сохранения (A.85) как следствие уравнений поля для материи.

Мы сейчас убедимся, что закон сохранения (A.85) действительно следует из уравнений поля для материи и из инвариантности действия относительно замены локальных координат. Для этого найдём сначала вариацию метрики  $g^{\mu\nu}$  при малом изменении системы координат

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu. \quad (\text{A.87})$$

Подставляя выражение (A.87) в общее правило (A.7) для преобразования тензора  $g^{\mu\nu}$ , получаем

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x') &= (\delta^\mu_\lambda + \partial_\lambda \xi^\mu) (\delta^\nu_\rho + \partial_\rho \xi^\nu) g^{\lambda\rho}(x) \\ &= g^{\mu\nu}(x) + \partial^\nu \xi^\mu + \partial^\mu \xi^\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$



где во втором равенстве мы отбросили члены второго порядка по вариациям координат  $\xi^\mu$ . Разлагая левую часть равенства (А.88) в ряд,

$$g'^{\mu\nu}(x') = g'^{\mu\nu}(x) + \partial_\lambda g'^{\mu\nu}(x)\xi^\lambda + o(\xi) = \\ g'^{\mu\nu}(x) + \partial_\lambda g'^{\mu\nu}(x)\xi^\lambda + o(\xi) ,$$

мы получаем следующую связь между значениями  $g^{\mu\nu}(x)$  и  $g'^{\mu\nu}(x)$  в точках с одними и теми же значениями координат в старой и новой системе:

$$g'^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) - \partial_\lambda g^{\mu\nu}(x)\xi^\lambda + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu . \quad (\text{А.89})$$

▷ *Задача 22.* Проверьте явным вычислением, что соотношение (А.89) может быть записано в следующем ковариантном виде:

$$g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu . \quad (\text{А.90})$$

Из инвариантности действия полей материи относительно замен координат следует, что вариация этого действия равна нулю при изменении метрики  $g^{\mu\nu}(x)$  согласно формуле (А.90) и одновременно с этим изменении полей материи  $\delta\psi_\xi$ , соответствующих замене координат (А.87). Например, для скалярного поля

$$\delta\phi_\xi = \xi^\mu \partial_\mu \phi .$$

Итак, в общем случае имеем

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} (\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu) + \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \psi} \delta\psi_\xi = 0 , \quad (\text{А.91})$$

где для простоты мы опустили всевозможные индексы у полей материи  $\psi$ . Равенство (А.91) справедливо вне зависимости от выполнения уравнений поля. Предположим теперь дополнительно, что удовлетворяются уравнения поля для материи. Это означает, что второй член в левой части равенства (А.91) обращается в нуль. Следовательно, мы доказали, что из уравнений поля для материи вытекает справедливость равенства

$$\int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} (\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu) = 0 .$$

Поскольку вектор  $\xi^\mu$  может быть произвольным, а  $T_{\mu\nu}$  симметричен, после интегрирования по частям мы приходим к ковариантному закону сохранения (А.85), что и требовалось.

Воспользуемся теперь равенством (А.91) для того, чтобы доказать, что в плоском пространстве метрический тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  совпадает на уравнениях движения с нётеровским тензором  $\tau_{\mu\nu}$  с точностью до полной производной. В плоском пространстве равенство (А.91) принимает вид

$$\int d^4x T_{\mu\nu} \partial^\mu \xi^\nu + \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \psi} \delta\psi_\xi = 0 , \quad (\text{А.92})$$

где мы вновь воспользовались симметрией тензора  $T_{\mu\nu}$ . В пространстве Минковского действие инвариантно относительно вариаций полей материи  $\delta\psi_\xi$ , соответствующих

сдвигаем (А.87) с постоянными функциями  $\xi^\mu$ . Следовательно, второй член в уравнении (А.92) может быть записан в виде

$$\int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \psi} \delta \psi_\xi = - \int d^4x \tau_{\mu\nu} \partial^\mu \xi^\nu, \quad (\text{А.93})$$

где  $\tau_{\mu\nu}$  на уравнениях движения совпадает с сохраняющимся нётеровским тензором энергии-импульса.

▷ *Задача 23.* Модифицировав вывод теоремы Нётер, убедиться в справедливости соотношения (А.93), в котором  $\tau_{\mu\nu}$  на уравнениях движения равен нётеровскому тензору энергии-импульса.

Интегрируя по частям соотношение (А.92), мы видим, что выполнено равенство

$$\partial^\mu (T_{\mu\nu} - \tau_{\mu\nu}) = 0$$

Это может быть, только если разность  $(T_{\mu\nu} - \tau_{\mu\nu})$  является полной дивергенцией антисимметричного тензора,

$$T_{\mu\nu} - \tau_{\mu\nu} = \partial^\lambda A_{\mu\nu\lambda}, \quad \text{где } A_{\mu\nu\lambda} = -A_{\lambda\nu\mu} \quad (\text{А.94})$$

что мы и хотели доказать.

▷ *Задача 24.* Рассмотрим тензор вида

$$\Theta_{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) f,$$

где  $f$  — произвольная функция. Очевидно, что этот тензор тождественно сохраняется. Найдите его представление в виде  $\Theta_{\mu\nu} = \partial^\lambda A_{\mu\nu\lambda}$ , где  $A_{\mu\nu\lambda} = -A_{\lambda\nu\mu}$ .

▷ *Задача 25.* Проверьте явно, что метрический тензор энергии-импульса для скалярного поля, неминимально взаимодействующего с гравитацией (см. выражения (А.78) и (А.79)), отличается в плоском мире от нетеровского тензора энергии-импульса на полную производную для произвольных  $U(\phi)$  и  $\xi$ .

В заключение нашего обсуждения тензора энергии-импульса в ОТО стоит сделать следующее замечание. В плоском мире из дифференциального закона сохранения (А.84) следует наличие в теории четырех сохраняющихся с течением времени величин — компонент 4-вектора энергии-импульса

$$P^\nu \equiv \int d^3x T^{0\nu}.$$

Однако, в искривленном пространстве из равенства (А.85) вообще говоря не следует существование четырёх интегралов движения, соответствующих энергии и импульсу системы. В связи с этим, понятия энергии и импульса, вообще говоря, не определены в ОТО. Для локализованных в пространстве гравитирующих систем можно определить энергию и импульс по асимптотике гравитационного поля вдали от системы, но в общем случае такая конструкция невозможна. В частности, говорить о полной массе Вселенной не имеет смысла.

## А.7 Движение частиц в гравитационном поле

Отвлечёмся теперь на некоторое время от обсуждения свойств уравнений Эйнштейна и изучим движение точечных частиц во внешнем гравитационном поле. Действие для точечной частицы в ОТО имеет такой же вид, как и в специальной теории относительности:

$$S_p = -m \int ds . \quad (\text{A.95})$$

Разница состоит в том, что теперь определение интервала  $ds$  вдоль мировой линии частицы включает в себя метрику пространства-времени:

$$ds = \sqrt{dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}(x)} = \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} g_{\mu\nu}(x)} d\tau ,$$

где во втором равенстве мы ввели произвольный параметр  $\tau$  вдоль мировой линии. С помощью этого параметра действие (А.95) можно записать в следующей форме:

$$S_p = -m \int \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}(x)} d\tau , \quad (\text{A.96})$$

где точка обозначает дифференцирование по параметру  $\tau$ . Уравнения движения, получающиеся при вариации действия (А.96) имеют следующий вид:

$$-\frac{d}{d\tau} \left( \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu \partial_\mu g_{\nu\lambda}}{\sqrt{\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha}} = 0 . \quad (\text{A.97})$$

▷ *Задача 26. Выведите уравнения (А.97).*

Пользуясь произволом в выборе параметра  $\tau$ , можно выбрать его таким образом, чтобы вектор 4-скорости

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (\text{A.98})$$

имел единичную длину в каждой точке мировой линии,

$$g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1 . \quad (\text{A.99})$$

Такой выбор соответствует тому, что в качестве параметра вдоль мировой линии берётся собственное время частицы, поскольку равенство (А.99) эквивалентно равенству

$$ds = d\tau .$$

При таком выборе параметризации мировой линии уравнение движения (А.97) принимает вид

$$-\frac{d}{ds} (g_{\mu\nu} u^\nu) + \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\nu\lambda} u^\lambda u^\nu = 0 . \quad (\text{A.100})$$

Раскрывая первый член в уравнении (А.100) по правилу Лейбница и сворачивая получившееся равенство с тензором  $g^{\mu\rho}$ , получаем

$$-\frac{du^\rho}{ds} - g^{\mu\rho} \left( \frac{dg_{\mu\nu}}{ds} - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\nu\lambda} u^\lambda \right) u^\nu = 0 . \quad (\text{A.101})$$

Из определения 4-скорости следует, что

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{ds} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} u^\lambda .$$

Подставляя это выражение в уравнение (А.101) и пользуясь выражением (А.23) для символов Кристоффеля, окончательно приходим к следующей записи уравнения движения

$$\frac{du^\nu}{ds} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu u^\mu u^\lambda = 0 . \quad (\text{А.102})$$

Умножая это уравнение на малое приращение собственного времени  $ds$  и вспоминая, что вдоль мировой линии частицы выполнено равенство

$$dx^\lambda = u^\lambda ds ,$$

можно переписать уравнение (А.102) в форме

$$du^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu u^\mu dx^\lambda = 0 .$$

Вспоминая правило переноса контравариантных векторов (А.13) мы видим, что геометрический смысл уравнения (А.102) состоит в том, что при параллельном переносе вдоль мировой линии нормированные касательные вектора  $u^\mu(x(\tau))$  переходят друг в друга. Кривые, для которых выполнено такое свойство, являются геодезическими (кратчайшими), а уравнение (А.102) — уравнением геодезической.

Действие (А.95) не имеет смысла для безмассовых частиц,  $m = 0$ . Для нахождения траекторий движения таких частиц в искривленном пространстве-времени (например, лучей света) можно непосредственно воспользоваться уравнением геодезической

$$\frac{du^\nu}{d\tau} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu u^\mu u^\lambda = 0 , \quad (\text{А.103})$$

где  $\tau$  — теперь уже произвольный параметр вдоль траектории, который, вообще говоря, сам определяется из этих уравнений, а 4-скорость  $u^\mu$  по-прежнему определяется соотношением (А.98). Условие безмассовости состоит в том, что геодезическая должна быть светоподобной, то есть вдоль неё должно выполняться условие

$$ds^2 = 0 ,$$

или, в дифференциальной форме,

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \equiv g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0 . \quad (\text{А.104})$$

▷ *Задача 27. Показать, что уравнение (А.103) совместно с требованием (А.104).*

▷ *Задача 28. Проверьте, что как уравнение движения массивной точечной частицы, так и уравнение светоподобной геодезической можно получить из следующего действия*

$$S_\eta = -\frac{1}{2} \int d\tau \left[ \eta^{-1} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu g_{\mu\nu}(x) + \eta m^2 \right] , \quad (\text{А.105})$$

где  $\eta(\tau)$  — новая вспомогательная “динамическая” переменная, преобразующаяся при изменении параметризации траектории по закону

$$\eta'(\tau'(\tau)) = \eta(\tau) \left[ \frac{\partial \tau'(\tau)}{\partial \tau} \right] .$$

Отметим, что  $\eta^2(\tau)$  можно воспринимать как внутреннюю метрику мировой линии, тогда действие (А.105) выглядит как действие четырёх полей  $x^\mu(\tau)$  в одномерном пространстве с динамической метрикой.

## А.8 Ньютоновский предел в ОТО

Обсудим теперь, каким образом возникает в ОТО основной объект ньютоновской теории тяготения — гравитационный потенциал, и как из ОТО следует закон всемирного тяготения. Для этого изучим движение частицы в слабом статическом гравитационном поле, то есть в пространстве с метрикой

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) , \quad (\text{А.106})$$

где  $\eta_{\mu\nu}$  — метрика пространства Минковского, а все компоненты тензора  $h_{\mu\nu}(\mathbf{x})$  малы,

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \ll 1 . \quad (\text{А.107})$$

Кроме того, мы будем рассматривать частицы со скоростями  $u^i$  много меньшими скорости света, так что

$$v^i \equiv \frac{dx^i}{dt} \ll 1 .$$

Выпишем явный вид различных компонент уравнения геодезической (А.102) в линейном порядке малости по компонентам скорости  $v^i$  и гравитационному полю  $h_{\mu\nu}$ . Для этого заметим прежде всего, что в линейном порядке собственное время частицы  $ds$  связано с координатным временем  $dt$  по закону

$$ds = \left( 1 + \frac{h_{00}}{2} \right) dt . \quad (\text{А.108})$$

▷ *Задача 29.* Найти в общем случае соотношение между координатным временем и собственным временем частицы, движущейся с координатной 3-скоростью  $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ . Показать, что в линейном порядке это соотношение действительно переходит в (А.108).

Следовательно, компоненты 4-скорости  $u^\mu$  связаны с метрикой и физической скоростью  $v^i$  следующим образом

$$\begin{aligned} u^0 &\equiv \frac{dt}{ds} \approx 1 - \frac{h_{00}}{2} , \\ u^i &\equiv \frac{dx^i}{ds} \approx v^i . \end{aligned}$$

Теперь нетрудно проверить, что в линейном порядке нулевая компонента уравнения геодезической выполняется тождественно. Действительно, первый член  $\frac{d^2 t}{ds^2}$  зануляется вследствие соотношения (А.108) и статичности метрики. Во втором члене  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda$

изначально имеется малость, связанная с тем, что для невозмущённой метрики  $\eta_{\mu\nu}$  все символы Кристоффеля обращаются в нуль. Дополнительная малость связана с тем, что для статической метрики компонента  $\Gamma_{00}^0$  символов Кристоффеля равна нулю, так что этот член обязательно должен содержать хотя бы одну компоненту скорости  $u^i$ .

Пространственные компоненты уравнения геодезической принимают в линейном приближении следующий вид

$$\frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{00}^i = 0 ,$$

где мы снова учли, что во втором члене изначально имеется малость, связанная с присутствием символов Кристоффеля, так что вклады, зависящие от скоростей  $v^i$ , выпадают. Вспоминая явное выражение (А.23) для символов Кристоффеля, мы приходим к следующему уравнению, описывающему движение нерелятивистских частиц в слабом статическом гравитационном поле:

$$\frac{dv^i}{dt} = -\partial_i \Phi , \quad (\text{А.109})$$

где мы ввели новую функцию  $\Phi(\mathbf{x})$ , определенную с помощью равенства

$$g_{00} = 1 + 2\Phi .$$

Уравнение (А.109) совпадает с уравнением ньютоновской механики, описывающим движение частицы во внешнем потенциале  $\Phi(\mathbf{x})$ , так что поле  $\Phi(\mathbf{x})$  естественно отождествить с ньютоновским гравитационным потенциалом в случае слабого статического гравитационного поля. Отметим, что, как следует из приведенного анализа, для описания движения нерелятивистских частиц в таких полях необходимо знать только  $g_{00}$  компоненту метрики. Вклад всех остальных компонент метрического тензора подавлен.

Для того чтобы окончательно убедиться в справедливости интерпретации поля  $\Phi(\mathbf{x})$  как гравитационного потенциала, проверим, что из уравнений Эйнштейна действительно следует закон всемирного тяготения

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (\text{А.110})$$

для малых статических плотностей  $\rho$ . Здесь  $\Delta \equiv (\partial_i)^2$  — оператор Лапласа по пространственным координатам. Заодно мы проверим, что константа  $G$ , входящая в действие Эйнштейна–Гильберта, действительно равна ньютоновской постоянной.

Чтобы сделать это, найдём с помощью уравнений Эйнштейна (А.76) метрику, создаваемую статическим распределением нерелятивистской материи с плотностью  $\rho(\mathbf{x})$ . Для этого удобно переписать уравнения Эйнштейна в следующей эквивалентной форме. Взяв след от обеих частей уравнений Эйнштейна, получаем равенство

$$R = -8\pi G(4\Lambda + T) , \quad (\text{А.111})$$

где

$$T \equiv g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

— след тензора энергии-импульса. Подставив полученное выражение для скалярной кривизны  $R$  обратно в уравнения Эйнштейна, мы приходим к следующим эквивалентным уравнениям:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T - g_{\mu\nu} \Lambda \right) . \quad (\text{А.112})$$

Такая форма записи уравнений Эйнштейна часто оказывается удобнее первоначальной для практических вычислений, поскольку, как правило, тензор кривизны  $R_{\mu\nu}$  имеет намного более громоздкую структуру, чем тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$ .

Возвращаясь к задаче вычисления гравитационного поля, создаваемого нерелятивистской материей малой плотности, будем предполагать, что космологическая постоянная отсутствует, т.е.  $\Lambda = 0$ , и что как сама плотность  $\rho(\mathbf{x})$ , так и все её пространственные производные малы, а гравитационное поле, создаваемое таким телом — слабое, то есть метрика имеет вид (А.106). Единственной отличной от нуля компонентой тензора энергии-импульса для статического распределения нерелятивистской материи является

$$T_{00} = \rho(\mathbf{x}) . \quad (\text{А.113})$$

Рассмотрим (00)-компоненту уравнения (А.112), полагая  $\Lambda = 0$ . Заметим, что для слабого гравитационного поля можно пренебречь квадратичными членами в выражении (А.38) для тензора Риччи. Кроме того, второй член в выражении для  $R_{00}$  обращается в нуль для статических метрик. Следовательно, левая часть (00)-компоненты уравнения (А.112) принимает вид

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma_{00}^\lambda = \frac{1}{2} \Delta g_{00} , \quad (\text{А.114})$$

где последнее равенство также следует из слабости и статичности поля. Подставляя это выражение и явный вид (А.113) тензора энергии-импульса в уравнение (А.112) мы приходим при  $\Lambda = 0$  к уравнению (А.110), как и должно быть, если  $\Phi$  — гравитационный потенциал, а  $G$  — постоянная всемирного тяготения.

## А.9 Линеаризованные уравнения Эйнштейна на фоне пространства Минковского

Обобщим уравнение (А.110) на случай произвольного слабого гравитационного поля на фоне пространства Минковского. В этом случае метрика имеет вид (ср. (А.106))

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) ,$$

где  $|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$ , а возмущения  $h_{\mu\nu}(x)$  могут зависеть как от пространственных координат, так и от времени. Воспользуемся уравнениями Эйнштейна в виде (А.112), причём положим  $\Lambda = 0$  (так что пространство-время Минковского является их решением при  $T_{\mu\nu} = 0$ ). Вычисление тензора Риччи в линейном порядке по  $h_{\mu\nu}$  нами, по-существу, уже было проведено: достаточно воспользоваться формулой (А.65), рассматривая её как выражение для отклонения тензора Риччи от нулевого тензора Риччи пространства Минковского. Таким образом, в (А.65) сделаем замену  $\delta g_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu}$ , ковариантные производные заменим на обычные, а подъём и опускание индексов будем осуществлять с помощью метрики Минковского. В результате получим линеаризованное уравнение (А.112)

$$(-\partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} + \partial^\lambda \partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial^\lambda \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda_\lambda) = 16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \right) , \quad (\text{А.115})$$

где  $T_{\mu\nu}$  считается малой величиной.

Уравнение (А.115) инвариантно относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &\rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu, \\ T_{\mu\nu} &\rightarrow T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{А.116})$$

где  $\xi_\mu(x)$  — малые параметры преобразования. Преобразование (А.116) — это не что иное, как линеаризованное преобразование (А.89); тензор  $T_{\mu\nu}$ , будучи малой величиной, не изменяется в линейном порядке при малом преобразовании координат (А.87).

Часто бывает удобно воспользоваться этой калибровочной свободой и наложить гармоническую калибровку

$$\partial_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h^\lambda_\lambda = 0.$$

В этой калибровке линеаризованные уравнения Эйнштейна принимают особенно простой вид

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \right),$$

где  $\square \equiv \partial_\lambda \partial^\lambda$  — даламбертиан в пространстве Минковского.

## А.10 Макроскопический тензор энергии-импульса

Чтобы искать решения уравнений Эйнштейна, описывающие расширяющуюся Вселенную, заполненную веществом (например, релятивистской плазмой или “пылью”), нам понадобится выражение для тензора энергии-импульса такого вещества. Для наших целей достаточным является описание *макроскопического* состояния вещества с помощью усредненного гидродинамического тензора энергии-импульса. Чтобы получить явное выражение для этой величины в искривленном пространстве-времени, рассмотрим сначала случай плоского пространства. Как известно, изотропное покоящееся как целое вещество без внутренних вращений имеет в плоском пространстве-времени тензор энергии-импульса вида

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (\text{А.117})$$

Прежде всего, обобщим это выражение на случай, когда вещество не находится в состоянии покоя. В этом случае тензор энергии-импульса помимо зависимости от плотности  $\rho$  и давления  $p$  должен также содержать зависимость от вектора 4-скорости  $u^\mu$ . Чтобы найти эту зависимость, заметим, что в системе покоя вектор 4-скорости равен

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

Следовательно, если мы определим тензорную величину выражением

$$(p + \rho) u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu}, \quad (\text{А.118})$$

то, как легко проверить, она совпадет в системе покоя с тензором энергии-импульса (А.117). Поскольку обе величины преобразуются по тензорному закону, то они совпадают и во всех остальных системах отсчета. Простейший способ обобщить выражение (А.118) на случай искривленного пространства состоит в том, чтобы заменить



метрику пространства Минковского  $\eta^{\mu\nu}$  на произвольную метрику  $g^{\mu\nu}$ . Действительно, как мы обсуждали выше, для каждой выбранной точки пространства-времени существует локально-лоренцева система отсчета. В этой системе метрический тензор в данной точке совпадает с тензором Минковского, а тензор энергии-импульса вещества в не слишком сильном гравитационном поле имеет вид (А.118). Переходя в произвольную систему отсчета, мы приходим к следующему окончательному выражению для тензора энергии-импульса

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} . \quad (\text{А.119})$$

Стоит отметить, что, вообще говоря, выражение (А.119) справедливо только в случае слабого гравитационного поля. В случае сильного поля в выражении для тензора энергии-импульса могут появиться дополнительные члены, зависящие от тензора кривизны.

В общем случае плотность  $\rho$ , давление  $p$  и 4-скорость  $u^\mu$  являются произвольными функции времени и пространственных координат, с теми ограничениями, что

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad (\text{А.120})$$

и

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (\text{А.121})$$

Равенство (А.120) — это непосредственное следствие определения 4-скорости,

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds} ,$$

а равенство (А.121) — ковариантный закон сохранения тензора энергии-импульса.

▷ *Задача 30. Выпишите различные компоненты закона сохранения (А.121) в явном виде в случае плоского пространства и убедитесь, что в нерелятивистском пределе (т.е. при  $|\mathbf{v}| \ll 1$ ,  $p \ll \rho$ ) получившиеся уравнения совпадают с гидродинамическим уравнением непрерывности и уравнением Эйлера.*

# Приложение В

## Стандартная модель физики частиц

В этом Приложении мы изложим основные элементы Стандартной модели физики элементарных частиц. Разумеется, наше изложение не может быть исчерпывающим, особенно в той части, которая касается многочисленных явлений в физике микромира, обусловленных взаимодействиями элементарных частиц. Наша задача — кратко описать те аспекты, которые используются в основном тексте.

### В.1 Описание Стандартной модели

Стандартная модель — минимальная релятивистская квантовая теория, чьи предсказания хорошо согласуются со всеми известными на сегодняшний день экспериментальными данными (за исключением осцилляций нейтрино, см. Приложение С), полученными как в физике низких энергий и прецизионных измерениях, так и в физике высоких энергий [4]. В основе Стандартной модели лежит математический аппарат квантовой теории поля; подробно с методами квантовой теории поля можно ознакомиться по литературе [46, 47, 48].

Стандартная модель описывает свободное распространение и взаимодействие следующих частиц, считающихся (на сегодняшний день) элементарными:

- а) калибровочные бозоны — фотон, глюон,  $W^\pm$ -,  $Z$ -бозоны;
- б) кварки —  $u$ ,  $d$ ,  $s$ ,  $c$ ,  $b$  и  $t$ ;
- в) лептоны — электрически заряженные (электрон  $e$ , мюон  $\mu$  и  $\tau$ -лептон) и нейтральные (нейтрино: электронное  $\nu_e$ , мюонное  $\nu_\mu$  и  $\tau$ -нейтрино  $\nu_\tau$ );
- г) нейтральный хиггсовский бозон  $h$ .

Частицы типов “а” и “г” подчиняются статистике Бозе–Эйнштейна, т.е. являются бозонами, частицы типов “б” и “в” подчиняются статистике Ферми–Дирака, т.е. являются фермионами.

Поля, описывающие частицы типа “а”, являются калибровочными полями. Они — векторы относительно группы Лоренца и служат переносчиками калибровочных взаимодействий. Поля, описывающие частицы типов “б” и “в” в физике частиц часто называют полями материи; мы будем по-возможности избегать этой терминологии. Они — спиноры по группе Лоренца и участвуют в калибровочных и юкавских взаимодействиях<sup>1</sup>. Поле, описывающее хиггсовский бозон, — скалярное и является переносчиком юкавских взаимодействий. Кроме того, хиггсовское поле играет спе-

---

<sup>1</sup>Неабелевы калибровочные поля также несут заряд по калибровочной группе и участвуют в калибровочных взаимодействиях.

циальную роль — ненулевое вакуумное среднее этого поля обеспечивает массы всем массивным частицам Стандартной модели.

Калибровочные взаимодействия имеют группу симметрии  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$  и описывают сильные взаимодействия (цветовая группа  $SU(3)_c$  с калибровочной константой связи  $g_s$ ) и электрослабые взаимодействия ( $SU(2)_w \times U(1)_Y$  с калибровочными константами связи  $g$  и  $g'$ , соответственно). Электрослабая калибровочная группа находится в хиггсовской фазе, а ненарушенной остаётся абелева группа электромагнетизма  $U(1)_{em}$ . В соответствии с этим  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозоны являются массивными, а фотон остаётся безмассовым. Поля Стандартной модели, объединяясь между собой, формируют полные мультиплеты относительно этих калибровочных групп, т.е. преобразуются по определённым представлениям этих групп.

Калибровочные поля образуют присоединённые представления соответствующих групп: имеется восемь глюонных полей  $G_\mu^a$ , ( $a = 1, \dots, 8$ , по числу генераторов группы  $SU(3)_c$ ), три калибровочных поля  $V_\mu^i$  группы  $SU(2)_w$  ( $i = 1, 2, 3$  по числу генераторов  $SU(2)_w$ ) и одно поле  $B_\mu$  группы  $U(1)_Y$ . В результате механизма Хиггса массивными становятся три комбинации полей  $V_\mu^i$  и  $B_\mu$ , которые описывают  $W^\pm$  и  $Z$ -бозоны:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_\mu^1 \mp iV_\mu^2) , \quad (B.1)$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gV_\mu^3 - g'B_\mu) . \quad (B.2)$$

Четвёртая комбинация,

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'V_\mu^3 + gB_\mu) , \quad (B.3)$$

остаётся безмассовой и описывает фотон. Связь между полями  $Z_\mu$  и  $A_\mu$  и исходными калибровочными полями записывают ещё в виде

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos \theta_w \cdot V_\mu^3 - \sin \theta_w \cdot B_\mu , \\ A_\mu &= \cos \theta_w \cdot B_\mu + \sin \theta_w \cdot V_\mu^3 , \end{aligned}$$

где  $\theta_w$  — слабый угол смешивания,

$$\tan \theta_w = \frac{g'}{g} .$$

Экспериментально измеренное значение  $\sin \theta_w$  составляет <sup>2</sup>

$$\sin \theta_w = 0.481 .$$

В таблице В.1 приведены размерности представлений векторных полей и их заряды по абелевым группам. Отметим, что в этой таблице, как и в ряде последующих формул, используются матричные обозначения

$$\begin{aligned} G_\mu &\equiv \sum_{a=1}^8 G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} , \\ V_\mu &\equiv \sum_{i=1}^3 V_\mu^i \frac{\tau^i}{2} , \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Здесь и в дальнейшем, если не оговорено особо, мы опускаем тонкости, связанные с радиационными поправками.

поля \ группа	$SU(3)_c$	$SU(2)_w$	$U(1)_Y$	$U(1)_{em}$
$G_\mu$	8	1	0	
$V_\mu$	1	3	0	
$B_\mu$	1	1	0*	
$W_\mu^\pm$	1			$\pm 1$
$Z_\mu$	1			0
$A_\mu$	1			0*
H	1	2	1	

Таблица В.1: Размерности представлений и заряды калибровочных ( $G_\mu$ ,  $V_\mu$ ,  $B_\mu$ ) и хиггсовских ( $H$ ) полей; символ 0\* означает, что поля  $B_\mu$  и  $A_\mu$  являются калибровочными полями групп  $U(1)_Y$  и  $U(1)_{em}$ , соответственно.

где  $\lambda^a$  — матрицы Гелл-Мана, а  $\tau^i$  — матрицы Паули ( $\lambda^a/2$  и  $\tau^i/2$  — наборы генераторов  $SU(3)_c$  и  $SU(2)_w$ , соответственно).

Поля материи “б” и “в” образуют три поколения кварков и лептонов

$$\begin{aligned} \text{I: } & u, d, \nu_e, e \\ \text{II: } & c, s, \nu_\mu, \mu \\ \text{III: } & t, b, \nu_\tau, \tau \end{aligned}$$

при этом частицы внутри одного поколения различаются калибровочными взаимодействиями (имеют разные калибровочные квантовые числа), а тройки частиц из разных поколений (например,  $u$ -,  $c$ - и  $t$ -кварки или электрон, мюон и  $\tau$ -лептон) имеют одинаковые калибровочные квантовые числа, но разные массы и юкавские константы взаимодействия с хиггсовским бозоном.

В плоском  $3+1$ -мерном пространстве времени<sup>3</sup> (пространстве Минковского) для описания фермионных полей можно ввести левый двухкомпонентный (вейлевский) спинор  $\chi_L$  и правый двухкомпонентный спинор  $\chi_R$ . Эти спиноры независимо преобразуются по фундаментальному ( $\chi_L$ ) и антифундаментальному ( $\chi_R^T$ ) представлению группы  $SL(2, \mathbb{C})$ , являющейся двулистной накрывающей группой<sup>4</sup> для собственной группы Лоренца  $SO(3, 1)$ .

Из двухкомпонентных спиноров можно составить лоренцевы скаляры, векторы и тензоры. В частности, можно показать, что билинейные комбинации

$$\chi_L^T i\sigma_2 \chi_L, \quad \chi_R^T i\sigma_2 \chi_R,$$

являются скалярами, а

$$\chi_R^T \bar{\sigma}^\mu \chi_L, \quad \chi_L^T \sigma^\mu \chi_R$$

являются векторами. Здесь

$$\sigma_{\alpha\beta}^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma}),$$

<sup>3</sup>Мы оставляем без обсуждения вопросы, связанные с описанием фермионных полей в искривлённом пространстве-времени.

<sup>4</sup>С двулистностью, в частности, связан тот факт, что не сами фермионные поля, но лишь их билинейные комбинации могут быть физическими наблюдаемыми.

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{\mu} = (1, -\sigma) ,$$

причём  $\sigma$  — обычные матрицы Паули, действующие на лоренцевы индексы.

▷ *Задача 1. Убедиться в справедливости сделанных утверждений. Указание: воспользоваться эквивалентностью фундаментального и антифундаментального представлений спинной группы  $SU(2)$ ; найти закон преобразований спиноров  $\chi_L$  и  $\chi_R$  при лоренцевых бустах и трёхмерных вращениях.*

Полная группа Лоренца кроме собственных преобразований (бустов и вращений) содержит еще отражение пространства  $P$  и инверсию времени  $T$ . Пространственное отражение  $P$  не коммутирует с лоренцевыми бустами, и двухкомпонентный спинор не может преобразовываться под действием  $P$  в себя:  $P\chi \nrightarrow \chi$ . Не может быть и закона преобразования  $P\chi \nrightarrow i\sigma_2\chi$ , поскольку тогда изменялась бы проекция вектора спина, который является псевдовектором, а значит не изменяется при пространственном отражении. Представление полной группы Лоренца можно реализовать на 4-компонентных спинорах (дираковских спинорах)  $\psi$ . Дираковский спинор включает в себя два двухкомпонентных вейлевских спинора,  $\chi_L$  и  $\chi_R$ ,

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} .$$

Свободные поля, описываемые как дираковские фермионы, являются решениями уравнения Дирака

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = m\psi ,$$

где  $m$  — масса фермиона, а  $\gamma^{\mu}$  — набор из четырёх  $4 \times 4$  матриц (матриц Дирака), удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = \eta^{\mu\nu} .$$

В так называемом киральном (вейлевском) представлении матрицы Дирака имеют вид

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix} ,$$

В этом представлении уравнение Дирака записывается в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 0 & i\sigma^{\mu}\partial_{\mu} \\ i\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}$$

Отметим, что для безмассового случая,  $m = 0$ , уравнение Дирака расщепляется на два отдельных уравнения на каждую из компонент  $\chi_L$ ,  $\chi_R$ , являющихся собственными функциями оператора спиральности  $\frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|}$  с собственными значениями  $-1$  и  $+1$ , соответственно<sup>5</sup>. Поэтому в безмассовом случае минимальная возможность состоит в том, чтобы вводить в рассмотрение только двухкомпонентный спинор  $\chi_L$ , так что в теории будут только частицы левой спиральности и античастицы правой спиральности<sup>6</sup>. Именно так описываются нейтрино в рамках Стандартной модели. Разумеется, в такой ситуации пространственная четность будет нарушена.

<sup>5</sup>Как для безмассового, так и для массивного случая спиральность является проекцией спина на направление движения. Разница состоит в том, что эта величина лоренц-инвариантна лишь для безмассовых фермионов.

<sup>6</sup>Или наоборот.

При описании взаимодействий частиц Стандартной модели в терминах дираковских 4-компонентных спиноров необходимо выделить компоненты  $\chi_L$  и  $\chi_R$ , что достигается с помощью проекторов

$$P_{\mp} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2}, \quad \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

причём в киральном представлении

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем использовать обозначения

$$\psi_L \equiv P_- \psi = \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi, \quad \psi_R \equiv P_+ \psi = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi, \quad (\text{В.4})$$

причём в киральном представлении для матриц Дирака

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_R \end{pmatrix}.$$

Отметим, что вне зависимости от выбора представления для матриц Дирака, левые и правые компоненты 4-компонентного фермиона, определённые соотношениями (В.4), преобразуются независимо при преобразованиях собственной группы Лоренца и образуют лоренцевы дублеты и антидублеты. Для некоторых приложений полезно отметить, что  $\chi_R^c \equiv i\sigma_2\chi_R^*$  представляет собой *левый* спинор.

▷ *Задача 2. Доказать сделанные в последних двух предложениях утверждения. Указание: Начните с того, что определите закон преобразования матриц Дирака под действием генераторов группы Лоренца.*

В дальнейшем, если не оговорено особо, мы будем использовать 4-компонентные спиноры. Наиболее часто используемые билинейные по фермионным полям тензорные лоренцевы структуры имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi & \text{ — скаляр,} & \bar{\psi}\gamma^\mu\psi & \text{ — вектор,} \\ \bar{\psi}\gamma^5\psi & \text{ — псевдоскаляр,} & \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi & \text{ — псевдовектор.} \end{aligned}$$

где

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$$

— *сопряжённый дираковский спинор*.

▷ *Задача 3. Убедиться в справедливости сделанных утверждений. Выразить эти структуры в терминах вейлевских фермионов.*

В Стандартной модели нейтрино имеют только левые компоненты, в отличие от кварков и заряженных лептонов. По отношению к сильным взаимодействиям как левые, так и правые компоненты кварков образуют фундаментальные (триплетные) представления, так что с точки зрения сильных взаимодействий разделение кварков на левые и правые не обязательно. С другой стороны, правые кварки и правые

заряженные лептоны являются синглетами по отношению к группе  $SU(2)_w$ , а левые фермионы образуют дублеты

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, & Q_2 &= \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, & Q_3 &= \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \\ L_1 &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, & L_2 &= \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, & L_3 &= \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Аналогично введённым сейчас обозначениям, правые фермионы трёх поколений обозначают следующим образом:

$$\begin{aligned} U_n &= u_R, \ c_R, \ t_R \\ D_n &= d_R, \ s_R, \ b_R \\ E_n &= e_R, \ \mu_R, \ \tau_R \end{aligned} \quad n = 1, 2, 3 \quad (\text{B.6})$$

Размерности представлений фермионов и их заряды по отношению к абелевым группам приведены в таблице В.2.

поля \ группы	$SU(3)_c$	$SU(2)_w$	$U(1)_Y$	$U(1)_{em}$
$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	1	2	-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$E \equiv e_R$	1	1	-2	-1
$Q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	3	2	+1/3	$\begin{pmatrix} +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$U \equiv u_R$	3	1	+4/3	+2/3
$D \equiv d_R$	3	1	-2/3	-1/3

Таблица В.2: Размерности представлений и заряды для фермионов первого поколения; фермионы второго и третьего поколения имеют такие же квантовые числа.

Скалярное поле Хиггса  $H$  является синглетом относительно группы сильных взаимодействий  $SU(3)_c$ , дублетом относительно  $SU(2)_w$  и имеет заряд  $-1$  по отношению к  $U(1)_Y$ . Эти свойства отражены в таблице В.1.

В терминах полей, явно ковариантных относительно калибровочной группы  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$ , лагранжиан Стандартной модели имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} &= -\frac{1}{2}\text{Tr}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\text{Tr}V_{\mu\nu}V^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\ &\quad + i\bar{L}_n\mathcal{D}^\mu\gamma_\mu L_n + i\bar{E}_n\mathcal{D}^\mu\gamma_\mu E_n + i\bar{Q}_n\mathcal{D}^\mu\gamma_\mu Q_n + i\bar{U}_n\mathcal{D}^\mu\gamma_\mu U_n + i\bar{D}_n\mathcal{D}^\mu\gamma_\mu D_n \\ &\quad - \left( Y_{mn}^l \bar{L}_m H E_n + Y_{mn}^d \bar{Q}_m H D_n + Y_{mn}^u \bar{Q}_m \tilde{H} U_n + h.c. \right) \\ &\quad + \mathcal{D}_\mu H^\dagger \mathcal{D}^\mu H - \lambda \left( H^\dagger H - \frac{v^2}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Здесь первая строка включает только калибровочные поля, напряжённости которых

определены следующим образом

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ V_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + ig[V_\mu, V_\nu], \\ G_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig_s[G_\mu, G_\nu], \end{aligned}$$

причём квадратными скобками обозначен коммутатор: например  $[V_\mu, V_\nu] \equiv V_\mu V_\nu - V_\nu V_\mu$ ; поле  $B_\mu$  — действительное, а поля  $V_\mu, G_\mu$  — эрмитовы. В терминах действительных полей  $G_\mu^a$  и  $V_\mu^i$

$$\begin{aligned} \text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}, \\ \text{Tr} V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} V_{\mu\nu}^i V^{i\mu\nu}, \end{aligned}$$

где

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (\text{B.8})$$

$$V_{\mu\nu}^i = \partial_\mu V_\nu^i - \partial_\nu V_\mu^i + g \epsilon^{ijk} V_\mu^j V_\nu^k, \quad (\text{B.9})$$

причём  $f^{abc}$  и  $\epsilon^{ijk}$  — структурные константы групп  $SU(3)$  и  $SU(2)$ , соответственно ( $\epsilon^{ijk}$  — полностью антисимметричный символ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ ). Из-за наличия последних слагаемых в (B.8), (B.9), в Стандартной модели (и в природе) имеются взаимодействия глюонов между собой, а также взаимодействия между  $W^\pm$ -,  $Z$ -бозонами и фотонами.

Вторая строка в (B.7) включает свободные лагранжианы фермионов и взаимодействия фермионов с калибровочными полями. Входящие в неё ковариантные производные однозначно определяются представлениями калибровочных групп, по которым преобразуются фермионные поля, а также зарядами относительно  $U(1)_Y$ : для фермиона  $f$

$$\mathcal{D}_\mu f \equiv \left( \partial_\mu - ig_s T_s^a G_\mu^a - ig T_w^i V_\mu^i - ig' \frac{Y_f}{2} B_\mu \right) f.$$

где  $T_s^a$  и  $T_w^i$  — генераторы  $SU(3)_c$  и  $SU(2)_w$  в представлениях, по которым преобразуется  $f$ , а  $Y_f$  — заряд этого фермиона относительно группы  $U(1)_Y$ . Для кварков  $T_s^a = \lambda^a/2$ , а для лептонов  $T_s^a = 0$  (т.е. слагаемое, включающее глюонное поле, для лептонов отсутствует — лептоны непосредственно не участвуют в сильных взаимодействиях). Для левых дублетов (B.5) имеем  $T_w^i = \tau^i/2$ , а для правых синглетов (B.6) нужно подставить  $T_w^i = 0$ .

Отметим, что по повторяющимся индексам  $m, n$  нумерующим поколения, подразумевается суммирование. В терминах полей, используемых в (B.7), калибровочные взаимодействия диагональны по поколениям<sup>7</sup>.

Третья строка в (B.7) описывает юкавские взаимодействия фермионов с хиггсовским полем  $H$ ;  $h.c.$  в ней обозначает эрмитово сопряжение. В этой строке фигурируют матрицы юкавских констант  $Y_{mn}^l$ ,  $Y_{mn}^d$  и  $Y_{mn}^u$ , которые комплексны и не диагональны по поколениям. Ниже мы кратко обсудим, к чему приводит это отсутствие диагональности. Подчеркнём, что лагранжиан (B.7) не описывает осцилляции

<sup>7</sup>В действительности фермионные поля, фигурирующие в (B.7), совпадают с полями, введёнными в (B.5) и (B.6), лишь с точностью до унитарных преобразований, см. ниже. Мы используем для этих двух наборов полей одни и те же обозначения.



нейтрино: соответствующие юкавские слагаемые в нём отсутствуют. Мы рассмотрим в Приложении С, как нужно расширить Стандартную модель для описания нейтринных осцилляций.

По поводу третьей строки в (В.7) сделаем ещё одно замечание. Как и весь лагранжиан Стандартной модели, она инвариантна относительно калибровочной группы  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$ . Для пояснения этого обстоятельства рассмотрим в качестве примера первое слагаемое в третьей строке. Левый лептон и хиггсовское поле являются дублетами относительно  $SU(2)_w$ , в то время как правый лептон — синглет. Рассматриваемое слагаемое имеет, таким образом, структуру  $(L^\dagger H) E$  и является  $SU(2)_w$ -синглетом. В соответствии с таблицей В.2 суммарный  $U(1)_Y$ -заряд полей, входящих в это слагаемое, равен нулю, так что оно инвариантно и относительно группы  $U(1)_Y$ . Аналогично обстоит дело со вторым юкавским слагаемым. В последнем слагаемом фигурирует

$$\tilde{H}_\alpha \equiv i\tau_{\alpha\beta}^2 H^{*\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} H^{*\beta}, \quad (\text{В.10})$$

где  $\alpha = 1, 2$  и  $\epsilon_{\alpha\beta}$  — антисимметричный символ. По отношению к  $SU(2)_w$  поле  $\tilde{H}$  преобразуется по фундаментальному представлению (хотя  $H^*$  преобразуется по антифундаментальному представлению: соотношение (В.10) осуществляет изоморфизм между анти-фундаментальным и фундаментальным представлениями, который существует для группы  $SU(2)$  и отсутствует для групп  $SU(N)$  с  $N > 2$ ). Поэтому третье юкавское слагаемое является  $SU(2)_w$ -синглетом; оно инвариантно и по отношению к  $U(1)_Y$  — именно для этого в нём приходится использовать  $\tilde{H}$ , а не само поле  $H$ .

Важно подчеркнуть, что третья строка в (В.7) является наиболее общим калибровочно-инвариантным перенормируемым лагранжианом, каждый член которого включает в себя как левый, так и правый фермион<sup>8</sup>. В частности, явные массовые члены фермионов, которые должны были бы иметь лоренцеву структуру  $\overline{(f_L)} \cdot f_R + h.c.$ , запрещены инвариантностью относительно электрослабой калибровочной группы  $SU(2)_w \times U(1)_Y$ .

Последняя строка в (В.7) — это лагранжиан самого хиггсовского поля. В соответствии с таблицей В.1 ковариантная производная хиггсовского поля равна

$$\mathcal{D}_\mu H = \left( \partial_\mu - ig \frac{\tau^j}{2} V_\mu^j - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) H.$$

Скалярный потенциал теории (В.7) имеет минимум при ненулевом значении хиггсовского поля, таком что

$$H^\dagger H = \frac{v^2}{2}.$$

Используя калибровочную инвариантность теории, хиггсовский вакуум и возмущения хиггсовского поля над этим вакуумом без потери общности можно представить в виде (так называемая унитарная калибровка):

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (\text{В.11})$$

Таким образом, над хиггсовским вакуумом имеется всего одно физическое скалярное возбуждение — хиггсовский бозон, описываемый полем  $h$ .

<sup>8</sup>Если в теорию не вводить новые поля.

Хиггсовский вакуум нарушает симметрию  $SU(2)_W \times U(1)_Y$  до  $U(1)_{em}$ . Переход от явно  $SU(2)_W \times U(1)_Y$ -инвариантных полей к физическим векторным полям в этом вакууме осуществляется заменой (В.1), (В.3). Действительно, после замены (В.1), (В.3) свободные градиентные члены для полей  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$  и  $A_\mu$  сохраняют канонический вид

$$-\frac{1}{4} \left[ \sum_{i=1}^3 (\partial_\mu V_\nu^i - \partial_\nu V_\mu^i)^2 + (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \right] \\ = -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) (\partial^\mu W^{-\nu} - \partial^\nu W^{-\mu}) - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

где

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ Z_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu. \quad (\text{В.12})$$

При учёте (В.11) в квадратичном лагранжиане над хиггсовским вакуумом возникают массовые члены (в этом и состоит механизм Хиггса)

$$\mathcal{D}_\mu H^\dagger \mathcal{D}^\mu H \longrightarrow \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{8} Z_\mu Z^\mu.$$

Замена (В.1), (В.3) подобрана именно так, чтобы эти массовые члены были диагональными. Таким образом, массы  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонов равны

$$M_W = \frac{gv}{2}, \\ M_Z = \frac{v \sqrt{g^2 + g'^2}}{2} = \frac{M_W}{\cos \theta_W}.$$

Юкавское взаимодействие приводит к тому, что большая часть фермионов также становится массивной. Массы фермионов  $f$  равны

$$m_f = \frac{y_f}{\sqrt{2}} v$$

где  $y_f$  — собственные значения матриц юкавских констант, фигурирующих в (В.7). Из всех фермионных полей (полей материи) безмассовыми остаются только нейтрино (последнее свойство — дефект Стандартной модели).

Лагранжиан Стандартной модели в терминах физических полей получается подстановкой (В.1), (В.3) и (В.11) в лагранжиан (В.7) и переходом от базиса фермионных полей, в котором калибровочные взаимодействия диагональны, к базису, в котором диагональны массовые матрицы фермионов (и юкавские взаимодействия). Последнее преобразование приводит к появлению в лагранжиане матрицы Каббиро–Кабаяши–Маскава  $V_{mn}$ , описывающей смешивание кварков. Подробнее этот переход описан в разделе В.3. Обратим внимание, что из соображений удобства мы будем часто использовать одни и те же обозначения для фермионов в обоих базисах (как мы уже это делали, ср. (В.7) и (В.5), (В.6)), хотя эти наборы не совпадают между собой, а связаны линейным преобразованием.

Удобно представить полный лагранжиан Стандартной модели, записанный в терминах физических полей, в виде суммы нескольких слагаемых:

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{lept}^{free} + \mathcal{L}_{f,em} + \mathcal{L}_{f,weak} + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{HV}^{int}. \quad (\text{В.13})$$

Здесь

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \sum_{\text{кварки}} \bar{q} \left( i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a \right) q$$

— лагранжиан, включающий кварки (суммирование идёт по всем типам кварков), глюоны и их взаимодействия между собой. Это — лагранжиан теории сильных взаимодействий, квантовой хромодинамики. Второе слагаемое в (В.13) — свободный лагранжиан лептонов

$$\mathcal{L}_{lept}^{free} = \sum_n \bar{l}_n (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_{l_n}) l_n + \sum_n \bar{\nu}_n i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_n .$$

Здесь  $n$  — номер поколения,  $l_n = e, \mu, \tau$ . Третье и четвёртое слагаемые описывают электромагнитные и слабые взаимодействия кварков и лептонов, соответственно:

$$\mathcal{L}_{f,em} = e \sum_f q_f \bar{f} \gamma^\mu A_\mu f ,$$

где

$$e = g \sin \theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (\text{В.14})$$

— электрический заряд протона, так что  $eq_f$  — электрический заряд фермиона  $f$ ;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f,weak} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_n (\bar{\nu}_n \gamma^\mu (1 - \gamma^5) W_\mu^+ e_n + h.c.) \\ & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{m,n} (\bar{u}_m \gamma^\mu (1 - \gamma^5) W_\mu^+ V_{mn} d_n + h.c.) \\ & -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu \left( t_3^f (1 - \gamma^5) - 2q_f \sin^2 \theta_W \right) f Z_\mu . \end{aligned} \quad (\text{В.15})$$

Здесь суммирование по  $f$  означает суммирование по всем кваркам и лептонам,  $t_3^f$  — слабый изоспин, равный  $+1/2$  для верхних кварков ( $u, c, t$ ) и нейтрино, и равный  $-1/2$  для нижних кварков ( $d, s, b$ ) и заряженных лептонов. Первые два слагаемых в  $\mathcal{L}_{f,weak}$  описывают взаимодействия лептонов и кварков с  $W$ -бозонами (“заряженные токи”), а третье — с  $Z$ -бозоном (“нейтральные токи”). Отметим, что испускание (и поглощение)  $W$ -бозона изменяет тип (“аромат”) фермиона (а для кварков — вообще говоря, и номер поколения, благодаря недиагональной матрице Каббиро–Кобаяши–Маскава  $V_{mn}$ ), а взаимодействие с  $Z$ -бозоном аромат не меняет.

▷ *Задача 4.* Убедиться, что для всех фермионов справедливо соотношение

$$q_f = \frac{Y_f}{2} + t_3^f .$$

Вклад  $\mathcal{L}_Y$  в лагранжиане (В.13) описывает юкавские взаимодействия фермионов с бозоном Хиггса,

$$\mathcal{L}_Y = -\sum_f \frac{y_f}{\sqrt{2}} \bar{f} f h = -\sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f h ,$$

где суммирование идёт по всем типам фермионов, кроме нейтрино. Это взаимодействие также сохраняет аромат. Константы взаимодействия бозона Хиггса с фермионами пропорциональны их массам; это, разумеется, является отражением того

факта, что все фермионы приобретают массы за счёт взаимодействия с хиггсовским полем, которое имеет ненулевое вакуумное среднее.

Слагаемое  $\mathcal{L}_V$  в (В.13) включает свободный лагранжиан фотонов,  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонов и их взаимодействие между собой,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{M_Z^2}{2}Z_\mu Z^\mu \\ & - \frac{1}{2}|W_{\mu\nu}^-|^2 + M_W^2|W_\mu^-|^2 + \frac{g^2}{4}(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-)^2 \\ & - \frac{ig}{2}(F^{\mu\nu}\sin\theta_W + Z^{\mu\nu}\cos\theta_W)(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-),\end{aligned}\quad (\text{В.16})$$

где  $F_{\mu\nu}$  и  $Z_{\mu\nu}$  определены в (В.12), и

$$W_{\mu\nu}^- \equiv (\partial_\mu + ieA_\mu + ig\cos\theta_W Z_\mu)W_\nu^- - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (\text{В.17})$$

Связь между константой электромагнитного взаимодействия  $e$  и калибровочными константами  $g, g'$  по-прежнему имеет вид (В.14). Отметим, что лагранжиан (В.16), как и весь лагранжиан (В.13), инвариантен относительно ненарушенной калибровочной симметрии  $U(1)_{em}$ , и в соответствии с (В.17)  $W^\pm$ -бозоны несут электрический заряд  $\pm e$ .

Вклад  $\mathcal{L}_H$  описывает хиггсовский сектор Стандартной модели,

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{1}{2}m_h^2 h^2 - \lambda v h^3 - \frac{\lambda}{4}h^4,$$

где

$$m_h = \sqrt{2\lambda}v$$

— масса бозона Хиггса. Константа самодействия хиггсовского бозона  $\lambda$  — иначе говоря,  $m_h$  — единственный параметр Стандартной модели, не измеренный экспериментально<sup>9</sup>. Имеется лишь ограничение снизу на эту массу, которое приведено ниже.

Наконец, вклад  $\mathcal{L}_{HV}^{int}$  описывает взаимодействие бозона Хиггса с массивными векторными бозонами,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{HV}^{int} = & \frac{g^2}{2}vh|W_\mu^-|^2 + \frac{g^2 + g'^2}{4}vhZ_\mu Z^\mu \\ & + \frac{g^2}{4}h^2|W_\mu^-|^2 + \frac{g^2 + g'^2}{8}h^2Z_\mu Z^\mu.\end{aligned}$$

На сегодняшний день все частицы Стандартной модели, за исключением бозона Хиггса, обнаружены экспериментально. Эксперименты по измерению параметров

<sup>9</sup>Юкавские взаимодействия также ещё не были измерены напрямую, хотя измерения масс частиц и калибровочных констант позволяют с хорошей точностью предсказать значения юкавских констант для всех массивных фермионов в рамках Стандартной модели. Подобного точного предсказания для массы или константы самодействия хиггсовского бозона не существует. Радиационные поправки, связанные с бозоном Хиггса, приводят к слабой логарифмической зависимости некоторых наблюдаемых от массы бозона Хиггса, что фактически позволяет установить лишь порядок величины массы хиггсовского бозона — от одной до двух сотен ГэВ.

Стандартной модели<sup>10</sup> дают [4]:

$$\begin{aligned}
 m_e &= 0.511 \text{ МэВ} , & m_u &= 1.5 - 3.0 \text{ МэВ} , & m_d &= 3.0 - 7.0 \text{ МэВ} , \\
 m_\mu &= 105.7 \text{ МэВ} , & m_c &= 1.15 - 1.35 \text{ ГэВ} , & m_s &= 0.07 - 0.12 \text{ ГэВ} , \\
 m_\tau &= 1.78 \text{ ГэВ} , & m_t &= 169.3 - 173.5 \text{ ГэВ} , & m_b &= 4.1 - 4.3 \text{ ГэВ} , \\
 M_Z &= 91.2 \text{ ГэВ} , & M_W &= 80.4 \text{ ГэВ} , \\
 m_h &> 114.4 \text{ ГэВ} , \\
 v &= 247 \text{ ГэВ} , & \alpha &\equiv \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} , & \sin^2 \theta_w &= 0.231 .
 \end{aligned}$$

Неопределённости в массах кварков (за исключением  $t$ -кварка) связаны с тем, что они не наблюдаются в свободном состоянии; для этих масс указан 95%-ый доверительный интервал.<sup>11</sup>

## В.2 Глобальные симметрии Стандартной модели

Помимо калибровочных квантовых чисел поля Стандартной модели несут заряды относительно глобальных абелевых групп: лагранжиан (В.13) инвариантен относительно фазовых вращений всех кварков одновременно

$$q \rightarrow e^{i\beta/3} q , \quad \bar{q} \rightarrow e^{-i\beta/3} \bar{q} \quad (\text{В.18})$$

и независимо фазовых вращений лептонов каждого поколения,

$$(\nu_e, e) \rightarrow e^{i\beta_e} (\nu_e, e) , \quad (\bar{\nu}_e, \bar{e}) \rightarrow e^{-i\beta_e} (\bar{\nu}_e, \bar{e}) \quad (\text{В.19})$$

$$(\nu_\mu, \mu) \rightarrow e^{i\beta_\mu} (\nu_\mu, \mu) , \quad (\bar{\nu}_\mu, \bar{\mu}) \rightarrow e^{-i\beta_\mu} (\bar{\nu}_\mu, \bar{\mu}) \quad (\text{В.20})$$

$$(\nu_\tau, \tau) \rightarrow e^{i\beta_\tau} (\nu_\tau, \tau) , \quad (\bar{\nu}_\tau, \bar{\tau}) \rightarrow e^{-i\beta_\tau} (\bar{\nu}_\tau, \bar{\tau}) \quad (\text{В.21})$$

Здесь  $\beta$ ,  $\beta_e$ ,  $\beta_\mu$  и  $\beta_\tau$  — независимые параметры преобразований. Квантовое число, соответствующее симметрии (В.18), — это барионное число

$$B = \frac{1}{3} (N_q - N_{\bar{q}}) ,$$

где  $N_q$  и  $N_{\bar{q}}$  — полное число кварков и антикварков всех типов (ароматов), соответственно. Барионный заряд кварков по определению равен  $1/3$ , а заряд антикварков равен  $(-1/3)$ . При таком соглашении полный барионный заряд протона, в состав которого входят два  $u$ -кварка и один  $d$ -кварк, равен 1. В терминах чисел барионов и антибарионов имеем, таким образом,

$$B = \sum (N_B - N_{\bar{B}}) ,$$

где суммирование идёт по всем типам барионов. Итак, в Стандартной модели барионное число сохраняется<sup>12</sup>. Ярким свидетельством того, что барионное число сохраняется в природе с высокой точностью, служит стабильность протона: протон —

<sup>10</sup>Мы опускаем тонкости, связанные с зависимостью этих параметров от точки нормировки.

<sup>11</sup>Для  $t$ -кварка неопределённость имеет чисто экспериментальный характер.

<sup>12</sup>Это утверждение справедливо в рамках теории возмущений. Непертурбативные эффекты нарушают барионное и лептонные числа, однако эти эффекты крайне малы в обычных условиях (но не в ранней Вселенной, см. Главу 11).

легчайшая из частиц, несущих барионное число, и он должен быть абсолютно стабильным в случае точного сохранения барионного числа. Распад протона действительно пока не обнаружен, а экспериментальное ограничение на его время жизни составляет

$$\tau_p > 10^{29} - 10^{33} \text{ лет} ,$$

в зависимости от моды распада.

Симметриям (В.19), (В.20), (В.21) соответствуют три сохраняющихся по-отдельности лептонных числа (электронное, мюонное и тауонное)

$$L_e = (N_e + N_{\nu_e}) - (N_{e^+} + N_{\bar{\nu}_e}) , \quad (\text{В.22})$$

$$L_\mu = (N_\mu + N_{\nu_\mu}) - (N_{\mu^+} + N_{\bar{\nu}_\mu}) , \quad (\text{В.23})$$

$$L_\tau = (N_\tau + N_{\nu_\tau}) - (N_{\tau^+} + N_{\bar{\nu}_\tau}) , \quad (\text{В.24})$$

где  $N_e$ ,  $N_{\nu_e}$ ,  $N_{e^+}$ ,  $N_{\bar{\nu}_e}$  — числа электронов, электронных нейтрино, позитронов и электронных антинейтрино, и аналогично для других поколений. Проявлением сохранения лептонных квантовых чисел является отсутствие процессов типа

$$\mu \rightarrow e\gamma , \quad (\text{В.25})$$

нарушающих лептонные числа (в данном случае — электронное и мюонное), а в остальном разрешённых. В случае процесса (В.25) экспериментальное ограничение на относительную вероятность имеет вид

$$\text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) < 1.2 \cdot 10^{-11} .$$

Это — один из лучших результатов по проверке сохранения мюонного и электронного лептонных чисел. Отметим, что наблюдаемые осцилляции нейтрино свидетельствуют о том, что в природе лептонные числа на самом деле нарушаются, см. Приложение С.

Во многих моделях, обобщающих Стандартную модель физики частиц, барионное и/или лептонные числа нарушаются, что должно приводить к новым физическим процессам, например, распаду протона. Поиск таких процессов является важной задачей, стоящей перед низкоэнергетическими экспериментами физики частиц. На сегодняшний день, помимо осцилляций нейтрино (см. Приложение С), никаких экспериментальных указаний на нарушение барионного или лептонных чисел получено не было.

### В.3 С-, Р-, Т-преобразования

На полях Стандартной модели определено действие дискретных преобразований, отвечающих обращению времени

$$\text{Т — преобразование : } (x^0, \mathbf{x}) \xrightarrow{\text{Т}} (-x^0, \mathbf{x}) ,$$

инверсии пространственных координат (пространственное отражение)

$$\text{Р — преобразование : } (x^0, \mathbf{x}) \xrightarrow{\text{Р}} (x^0, -\mathbf{x})$$

и зарядовому сопряжению

$$C - \text{преобразование} : f(x) \xrightarrow{C} f^c(x) .$$

При этом Р- и Т-преобразования вместе с собственной группой Лоренца образуют так называемую полную группу Лоренца.

С точки зрения процессов рассеяния обращение времени означает замену начального состояния на конечное, а конечного состояния на начальное, инверсия пространственных осей подразумевает обращение импульсов всех частиц, а зарядовое сопряжение — замену частиц на античастицы. В квантовой теории поля справедлива СРТ-теорема, которая утверждает, что физические процессы должны быть инвариантны относительно совместного действия всех трёх преобразований: амплитуда рассеяния, например, в результате СРТ-преобразования может получить лишь физически ненаблюдаемый фазовый множитель.

Собственная группа Лоренца имеет два типа конечномерных представлений — *тензорные* и *спинорные*. Рассматриваемые полевые функции преобразуются по тем или иным представлениям этой группы, причём тензоры в ряде случаев могут быть наблюдаемыми объектами, а спиноры — нет, что связано с двузначностью спинорного представления. В случае спиноров наблюдаемыми могут быть различные *билинейные* комбинации, образующие тензорные представления.

В силу тождественности двукратного преобразования чётности,  $P^2 = 1$ , *компоненты* тензоров относительно собственной группы Лоренца образуют два класса относительно действия Р-преобразования: чётные и нечётные. Объекты, ковариантные относительно собственной группы Лоренца и чётные по лоренцеву индексу  $\nu$  относительно Р-преобразований,

$$\mathcal{O}_\nu(x^0, \mathbf{x}) \xrightarrow{P} \mathcal{O}'_\nu(x^0, -\mathbf{x}) = \delta_\nu^0 \mathcal{O}_0(x^0, \mathbf{x}) - \delta_\nu^i \mathcal{O}_i(x^0, \mathbf{x})$$

называются тензорами (по индексу  $\nu$ ) относительно полной группы Лоренца (скаляр  $h$ , вектор  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , и т.д.), а ковариантные объекты, нечётные по лоренцеву индексу  $\nu$  относительно Р-преобразований,

$$\mathcal{O}_\nu(x^0, \mathbf{x}) \xrightarrow{P} \mathcal{O}'_\nu(x^0, -\mathbf{x}) = -\delta_\nu^0 \mathcal{O}_0(x^0, \mathbf{x}) + \delta_\nu^i \mathcal{O}_i(x^0, \mathbf{x})$$

являются псевдотензорами (по индексу  $\nu$ ) относительно полной группы Лоренца (например, псевдоскаляр  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$  или аксиальный вектор  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ ).

Из вида лагранжиана (В.13), (В.15) ясно, что слабые взаимодействия нарушают Р-чётность: слабые бозоны взаимодействуют не только с векторными токами  $\bar{\psi}_m\gamma^\mu\psi_n$ , но и с аксиальными токами  $\bar{\psi}_m\gamma^\mu\gamma^5\psi_n$ . Кроме того, слабые взаимодействия нарушают СР-симметрию. Источником нарушения служит единственный мнимый параметр матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава.

## В.4 Смешивание кварков

Чтобы понять, как появляется матрица Кабиббо–Кобаяши–Маскава, рассмотрим переход в пространстве состояний от калибровочного базиса к массовому базису, т.е. переход от базиса, в котором калибровочные взаимодействия не перемешивают поля фермионов разных поколений, к базису, в котором диагональна массовая матрица

и юкавские взаимодействия не перемешивают поля разных поколений. Лагранжиан (В.7) выписан в терминах полей, разложенных по калибровочному базису — все калибровочные взаимодействия имеют диагональный вид. В результате спонтанного нарушения электрослабой симметрии после перехода в унитарную калибровку (В.11) юкавские члены в лагранжиане (В.7) приводят к массовым членам для фермионов:

$$\mathcal{L}_m = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^l \bar{e}_{L_m} e_{R_n} + \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^d \bar{d}_{L_m} d_{R_n} + \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^u \bar{u}_{L_m} u_{R_n} , \quad (\text{В.26})$$

и юкавским взаимодействиям с полем хиггсовского бозона

$$\mathcal{L}_Y = \frac{h}{\sqrt{2}} Y_{mn}^l \bar{e}_{L_m} e_{R_n} + \frac{h}{\sqrt{2}} Y_{mn}^d \bar{d}_{L_m} d_{R_n} + \frac{h}{\sqrt{2}} Y_{mn}^u \bar{u}_{L_m} u_{R_n} . \quad (\text{В.27})$$

При этом калибровочные взаимодействия с глюонами, фотонами и  $Z$ -бозонами остаются диагональными, а взаимодействия с  $W^\pm$ -бозонами диагональны по поколениям:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_n \gamma^\mu W_\mu^- e_{L_n} - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{L_n} \gamma^\mu W_\mu^- d_{L_n} + h.c. .$$

Массовые матрицы

$$\frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^l , \quad \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^d , \quad \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{mn}^u$$

можно привести к диагональному виду с помощью замены:

$$Y_{mn}^l = U_{mp}^{eL} Y_p^l (U^{eR})_{pn}^{-1} , \quad Y_{mn}^d = U_{mp}^{dL} Y_p^d (U^{dR})_{pn}^{-1} , \quad Y_{mn}^u = U_{mp}^{uL} Y_p^u (U^{uR})_{pn}^{-1} ,$$

где  $U^{eL}$ , ...,  $U^{uR}$  — унитарные матрицы, и по повторяющемуся индексу  $p$  подразумевается суммирование. Именно эти матрицы и осуществляют переход к массовому базису в пространстве полей:

$$\begin{aligned} e_{R_m} &= U_{mn}^{eR} \tilde{e}_{R_n} , & d_{R_m} &= U_{mn}^{dR} \tilde{d}_{R_n} , & u_{R_m} &= U_{mn}^{uR} \tilde{u}_{R_n} , \\ e_{L_m} &= U_{mn}^{eL} \tilde{e}_{L_n} , & d_{L_m} &= U_{mn}^{dL} \tilde{d}_{L_n} , & u_{L_m} &= U_{mn}^{uL} \tilde{u}_{L_n} . \end{aligned}$$

Действительно, в терминах полей с тильдой вклады (В.26) и (В.27) в лагранжиан Стандартной модели будут диагональны. При таком преобразовании кинетические члены полей материи, а также калибровочные взаимодействия с глюонами, фотонами и  $Z$ -бозоном по-прежнему останутся диагональными, а взаимодействие с  $W^\pm$ -бозонами будет содержать матрицы смешивания поколений.

В рамках Стандартной модели смешивание в лептонном секторе нефизическое — его можно избежать, переопределив поля нейтрино:

$$\nu_m \rightarrow \tilde{\nu}_m : \quad \tilde{\nu}_m = (U^{eL})_{mn}^{-1} \nu_n .$$

Поскольку все калибровочные взаимодействия нейтрино пропорциональны единичной матрице (в пространстве поколений), то такое переопределение не приведёт к появлению смешивания в секторе нейтрино. Причина отсутствия смешивания в лептонном секторе Стандартной модели — безмассовость нейтрино.

В кварковом секторе ситуация иная, и переход к массовому базису приводит к появлению смешивания между кварками разных поколений в вершинах взаимодействия с  $W^\pm$ -бозонами:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\tilde{u}}_{L_m} \gamma^\mu W_\mu^- V_{mn} \tilde{d}_{L_n} + h.c. , \quad (\text{В.28})$$



где  $V_{ij} \equiv (U^{u_L})_{ik}^{-1} U_{kj}^{d_L}$  — унитарная  $3 \times 3$  матрица смешивания Кабиббо–Кобаяши–Маскава. Напомним, что в массовом базисе юкавские взаимодействия (В.27) становятся диагональными.

Унитарная матрица  $3 \times 3$  общего вида задаётся девятью действительными параметрами (размерность группы унитарных матриц,  $U(3)$ ). С точки зрения ортогональной подгруппы вращений  $SO(3)$ , эти параметры можно разбить на три действительных параметра — углы вращения, и шесть мнимых — фазы. Для матрицы смешивания кварков пять из шести фаз оказываются нефизическими. Их можно изгнать из (В.28) в результате переопределения фермионных полей  $f_n \rightarrow f_n e^{i\beta_n}$ . Такое преобразование полей фермионов не приводит к появлению комплексных коэффициентов в других частях лагранжиана (В.13), поскольку во всех остальных его слагаемых, кроме (В.28), фермионные поля входят в комбинациях, явно инвариантных относительно фазовых вращений, типа  $\bar{f}_n f_n$  и  $\bar{f}_n \gamma_\mu f_n$ . Оставшаяся единственная фаза — мнимый элемент матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава — является источником СР-нарушения в слабых взаимодействиях (об этом речь ниже).

Убедимся в существовании всего одной СР-нарушающей фазы. Для этого явно выделим в элементах матрицы смешивания комплексные множители:

$$V_{mn} = \begin{pmatrix} O_{11}e^{i\beta_{11}} & O_{12}e^{i\beta_{12}} & O_{13}e^{i\beta_{13}} \\ O_{21}e^{i\beta_{21}} & O_{22}e^{i\beta_{22}} & O_{23}e^{i\beta_{23}} \\ O_{31}e^{i\beta_{31}} & O_{32}e^{i\beta_{32}} & O_{33}e^{i\beta_{33}} \end{pmatrix} ;$$

здесь все величины  $O_{mn}$  и  $\beta_{mn}$ ,  $m, n = 1, 2, 3$  являются вещественными, и для определённости можно считать, что  $O_{mn} \geq 0$  и  $0 \leq \beta_{mn} < 2\pi$ . В нашей записи фазовых множителей девять, однако они не независимы, поскольку условие унитарности матрицы налагает на них три дополнительных условия<sup>13</sup>:

$$\begin{aligned} O_{11}O_{21}e^{i(\beta_{11}-\beta_{21})} + O_{12}O_{22}e^{i(\beta_{12}-\beta_{22})} + O_{13}O_{23}e^{i(\beta_{13}-\beta_{23})} &= 0 , \\ O_{11}O_{31}e^{i(\beta_{11}-\beta_{31})} + O_{12}O_{32}e^{i(\beta_{12}-\beta_{32})} + O_{13}O_{33}e^{i(\beta_{13}-\beta_{33})} &= 0 , \\ O_{21}O_{31}e^{i(\beta_{21}-\beta_{31})} + O_{22}O_{32}e^{i(\beta_{22}-\beta_{32})} + O_{23}O_{33}e^{i(\beta_{23}-\beta_{33})} &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{В.29})$$

В результате вращений полей фермионов

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{L_n} &= e^{-i\beta_{1n}} \tilde{d}_{L_n} , \quad n = 1, 2, 3 , \\ \tilde{u}_{L_m} &= e^{-i(\beta_{m1}-\beta_{11})} \tilde{u}_{L_m} , \quad m = 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{В.30})$$

пять из девяти фаз матрицы смешивания зануляются (общее фазовое вращение фермионных полей не изменяет лагранжиана). Оставшиеся четыре зависимы и выражаются через одну единственную фазу и элементы  $O_{mn}$  из условий (В.29), которые после преобразований (В.30) принимают вид

$$\begin{aligned} O_{11}O_{21} + O_{12}O_{22}e^{-i\beta_{22}} + O_{13}O_{23}e^{-i\beta_{23}} &= 0 , \\ O_{11}O_{31} + O_{12}O_{32}e^{-i\beta_{32}} + O_{13}O_{33}e^{-i\beta_{33}} &= 0 , \\ O_{21}O_{31} + O_{22}O_{32}e^{i(\beta_{22}-\beta_{32})} + O_{23}O_{33}e^{i(\beta_{23}-\beta_{33})} &= 0 . \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Общее условие унитарности имеет вид  $V_{mn}V_{pn}^* = \delta_{mp}$ ,  $m, p = 1, 2, 3$ . Три из этих уравнений (диагональные,  $m = p$ ) не содержат фаз  $\beta_{mn}$  вообще, а уравнения с  $m > p$  не являются независимыми, поскольку они комплексно сопряжены уравнениям с  $m < p$ .

Первое условие позволяет выразить  $\beta_{22}$  через  $\beta_{23}$  (и элементы  $O_{mn}$ ), из второго можно найти связь между  $\beta_{32}$  и  $\beta_{33}$ . Наконец, в результате подстановки полученных выражений в третье условие  $\beta_{33}$  выражается через один оставшийся параметр  $\beta_{23}$ . В нашей записи он и определяет единственный комплексный множитель в элементах матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава.

В стандартной параметризации [4] матрица  $V$  имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.31})$$

где  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ , а  $\theta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  — углы смешивания, а  $\delta_{13}$  — CP-нарушающая фаза. Величины этих параметров определяются с хорошей точностью из многочисленных экспериментов:

$$\begin{aligned} s_{12} &= 0.2272, & s_{13} &= 0.0040, \\ s_{23} &= 0.04221, & \delta_{13} &= 57^\circ \pm 10^\circ. \end{aligned}$$

Абсолютные величины элементов матрицы смешивания кварков равны

$$|V| = \begin{pmatrix} 0.97383^{+0.00024}_{-0.00023} & 0.2272^{+0.0010}_{-0.0010} & (3.96^{+0.09}_{-0.09}) \cdot 10^{-3} \\ 0.2271^{+0.0010}_{-0.0010} & 0.97296^{+0.00024}_{-0.00024} & (42.21^{+0.10}_{-0.80}) \cdot 10^{-3} \\ (8.14^{+0.32}_{-0.64}) \cdot 10^{-3} & (41.61^{+0.12}_{-0.78}) \cdot 10^{-3} & 0.999100^{+0.000034}_{-0.000004} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.32})$$

где ошибки соответствуют одному стандартному отклонению (68%-й доверительный интервал). Отметим, что CP-нарушающая фаза матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава велика, однако соответствующие CP-нарушающие эффекты в Стандартной модели сильно подавлены малостью углов смешивания, что наглядно видно при использовании стандартной параметризации (B.31).

Общий факт, что комплексность матрицы  $V_{mn}$  приводит к нарушению CP, вытекает из закона преобразования полей при CP-преобразовании:

$$\psi_L \xrightarrow{P} \eta \gamma^0 \psi_L, \quad \bar{\psi}_L \xrightarrow{P} \eta^{-1} \bar{\psi}_L \gamma_0, \quad (\text{B.33})$$

$$\psi_L \xrightarrow{C} C \bar{\psi}_L^T, \quad \bar{\psi}_L \xrightarrow{C} \psi_L^T (C^{-1})^T, \quad (\text{B.34})$$

где  $\eta$  — фазовый множитель ( $\eta^2 = \pm 1$ ), а  $4 \times 4$  матрица  $C$  преобразует компоненты дираковского спинора  $\psi$  при зарядовом сопряжении. Конкретный вид этой матрицы зависит от представления матриц Дирака, причём условия самосогласованности преобразований  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , требования инвариантности (чётности) свободного лагранжиана дираковского фермиона и изменения знака (нечётности) электрического тока при зарядовом сопряжении, вообще говоря, фиксируют вид матрицы  $C$  лишь с точностью до (физически не наблюдаемого) фазового множителя. Для билинейной комбинации спиноров, образующих заряженный ток, взаимодействующий с  $W$ -бозоном (см. (B.28)), вышеперечисленные условия приводят к простому закону преобразования (тильду над полями в массовом базисе не пишем)

$$\begin{aligned} \bar{u}_{L_m} \gamma^0 V_{mn} d_{L_n} &\xrightarrow{\text{CP}} -\bar{d}_{R_n} \gamma^0 V_{mn} u_{R_m}, \\ \bar{u}_{L_m} \gamma^i V_{mn} d_{L_n} &\xrightarrow{\text{CP}} \bar{d}_{R_n} \gamma^i V_{mn} u_{R_m}. \end{aligned}$$

С учётом закона преобразования слабых заряженных бозонов при  $CP$ -сопряжении

$$\begin{aligned} W_0^\pm &\xrightarrow{CP} -W_0^\mp, \\ W_i^\pm &\xrightarrow{CP} W_i^\mp, \end{aligned}$$

окончательно находим, что при  $CP$ -преобразовании взаимодействие (В.28)) переходит в

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W^{CP} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{d}_{Rn} \gamma^\mu W_\mu^+ V_{mn} u_{Rm} + h.c. \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Rm} \gamma^\mu W_\mu^- V_{mn}^* d_{Rn} + h.c. \end{aligned} \quad (\text{В.35})$$

Сравнение (В.35) с (В.28) показывает, что взаимодействие (В.28)) нарушает  $CP$ , если элементы матрицы смешивания  $V_{mn}$  — комплексные величины.

Этот результат отражает общее свойство теории поля: при  $CP$ -преобразовании исходный лагранжиан переходит в лагранжиан с комплексно-сопряжёнными константами связи. Если в наборе констант связи теории имеются неустраняемые фазы, то в такой теории  $CP$ -инвариантность нарушена.

В качестве иллюстрации оценим разность парциальных ширин

$$t \rightarrow W^+ b \quad \text{и} \quad \bar{t} \rightarrow W^- \bar{b},$$

которые были бы одинаковы, если бы  $CP$ -симметрия сохранялась в Стандартной модели ( $CPT$ -симметрия требует, чтобы *полные* ширины частиц и античастиц совпадали). На древесном уровне парциальные ширины одинаковы, и основной вклад в их разность даёт интерференция древесного и однопетлевого вкладов. Для распада  $t \rightarrow W^+ b$  эти вклады следуют из диаграмм, приведённых на рис. В.1 (аналогичные

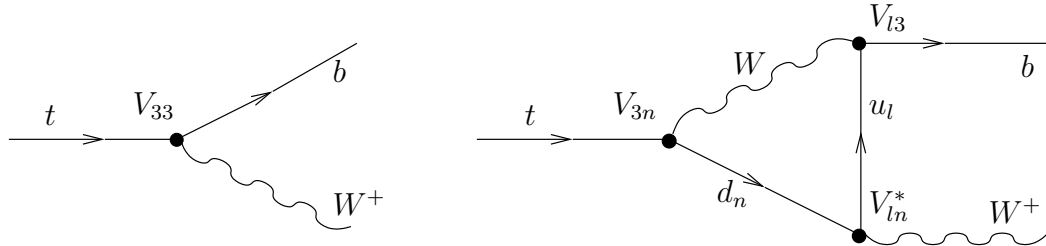


Рис. В.1: Древесная (а) и однопетлевая (б) диаграммы распада  $t \rightarrow W^+ b$ , дающие в рамках Стандартной модели основной вклад в разность парциальных ширин  $t \rightarrow W^+ b$  и  $\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b}$ . Явно показаны элементы матрицы Каббиро–Кобаяши–Маскава, которым пропорциональны соответствующие вершины.

диаграммы дают вклад в распад  $\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b}$ ).

Если обозначить древесный вклад в амплитуду распада  $t \rightarrow W^+ b$  как  $V_{33} M_{tree}$ , то однопетлевой вклад можно представить в виде

$$M_{tree} \cdot \frac{g^2}{16\pi^2} \sum_{n,l=1}^3 V_{3n} V_{ln}^* V_{lz} (A_{nl} + i\pi B_{nl}),$$

где  $A_{nl}, B_{nl}$  — действительные функции, зависящие от масс  $W$ -бозона,  $t$ - и  $b$ -кварков, а также от масс верхнего кварка  $l$ -ого поколения и нижнего кварка  $n$ -го поколения.

В дальнейшем нам понадобится только функция  $B_{nl}$ , которую удобно представить в виде

$$B_{nl} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy C_{nl} ,$$

$$C_{nl} = \theta \left( \left( x + \frac{m_b^2}{m_t^2} y \right) (1 - x - y) - \frac{m_{d_n}^2}{m_t^2} x - \frac{m_{u_l}^2}{m_t^2} y - \frac{M_W^2}{m_t^2} (1 - x - xy) \right)$$

(здесь  $\theta(z)$  — обычная функция скачка). Функция  $B_{nl}$  определяет мнимую добавку в амплитуду, причём эта мнимость связана с кинематикой виртуальных процессов, а не с комплексностью констант взаимодействия: вклад возникает в результате интегрирования по таким виртуальным импульсам, что часть виртуальных частиц оказывается вблизи массовой поверхности. Поскольку это кинематический эффект, он даст в точности такой же вклад в амплитуду распада  $\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b}$ , которая на однопетлевом уровне будет иметь вид

$$M_{tree}^* \cdot \frac{g^2}{16\pi^2} \sum_{n,l=1}^3 V_{3n}^* V_{ln} V_{l3}^* (A_{nl} + i\pi B_{nl}) .$$

Ширины распадов определяются квадратами модулей соответствующих амплитуд:

$$|M(t \rightarrow W^+ b)|^2 = |M_{tree}|^2 \tag{B.36}$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( V_{33}^* \sum_{l,n=1}^3 V_{3n} V_{ln}^* V_{l3} (A_{nl} + i\pi B_{nl}) + h.c. \right) + \mathcal{O}(g^4) \right\} \tag{B.37}$$

$$|M(\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b})|^2 = |M_{tree}|^2 \tag{B.38}$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left( V_{33} \sum_{l,n=1}^3 V_{3n}^* V_{ln} V_{l3}^* (A_{nl} + i\pi B_{nl}) + h.c. \right) + \mathcal{O}(g^4) \right\} \tag{B.39}$$

Таким образом, окончательно получаем в главном порядке по  $g^2$

$$\Delta_{CP} = \frac{\Gamma(t \rightarrow W^+ b) - \Gamma(\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b})}{\Gamma(t \rightarrow W^+ b) + \Gamma(\bar{t} \rightarrow W^- \bar{b})} = -\frac{g^2}{8\pi} \sum_{l,n} \text{Im} (V_{33}^* V_{3n} V_{ln}^* V_{l3}) B_{nl} .$$

Численно разность ширин очень мала,

$$\Delta_{CP} = -1.15 \cdot 10^{-13} ,$$

поэтому данный эффект вряд ли можно будет исследовать экспериментально в обозримом будущем.<sup>14</sup> В то же время описанный механизм, обеспечивающий отличие парциальных ширин частиц и античастиц, является довольно общим. В различных теориях, обобщающих Стандартную модель, этот механизм используется для генерации барионной асимметрии (см. Главу 11).

<sup>14</sup>Отметим, что  $CP$ -нарушающая фаза приводит ко многим другим эффектам, наблюдаемым в современных экспериментах, например, в осцилляциях и распадах нейтральных каонов и нейтральных  $B$ -мезонов.

## В.5 Эффективная теория Ферми

Процессы при низких энергиях  $E \ll M_W$  хорошо описываются эффективной теорией Ферми. Лагранжиан этой теории получается из (В.13) в результате “отынтегрирования” полей массивных векторных бозонов.

В Стандартной модели взаимодействие массивных векторных бозонов с полями материи имеет вид

$$\mathcal{L}_{W-m} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} J_\mu^{NC} Z^\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}} (J_\mu^{CC} W^{\mu,-} + h.c.) ,$$

где слабые нейтральный  $J_\mu^{NC}$  и заряженный  $J_\mu^{CC}$  токи равны:

$$J_\mu^{NC} = \sum_f \bar{f} \gamma_\mu \left( t_3^f (1 - \gamma^5) - 2q_f \sin^2 \theta_W \right) f \quad (\text{В.40})$$

$$J_\mu^{CC} = \sum_m \bar{\nu}_m \gamma_\mu (1 - \gamma^5) e_m - \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{m,n} \bar{u}_m \gamma_\mu (1 - \gamma^5) V_{mn} d_n . \quad (\text{В.41})$$

При  $E \ll M_Z$  в начальных и конечных состояниях могут присутствовать только поля материи — лептоны и кварки (кроме тяжёлого  $t$ -кварка). При низких энергиях основной вклад в слабые амплитуды даёт однократный обмен виртуальными массивными векторными бозонами. В технике фейнмановских диаграмм “отынтегрирование” сводится к стягиванию пропагаторов  $Z$ - и  $W$ -бозонов в точку (см. рис. В.2). В ре-

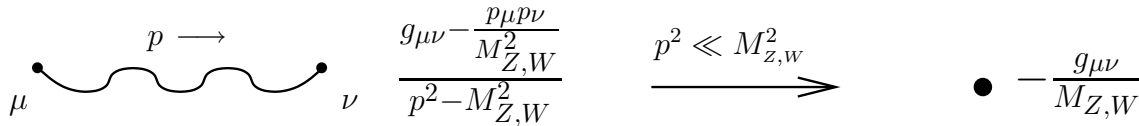


Рис. В.2: Точечное приближение для пропагаторов массивных векторных бозонов.

зультате диаграммы Стандартной модели, типа приведённой на рис. В.3а, переходят

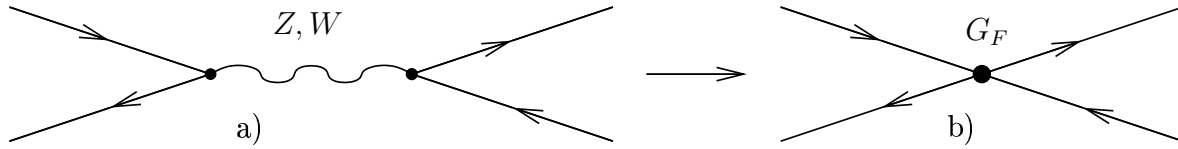


Рис. В.3: Связь между диаграммами Стандартной модели и теории Ферми.

в диаграммы, типа приведённой на рис. В.3б и отвечающей теории Ферми — эффективному ток-токовому или четырёхфермионному взаимодействию. Таким образом, отынтегрирование  $Z$ -бозона приводит к появлению взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_N = \sqrt{2} G_F J_\mu^{NC} J^{NC \mu} ,$$

а отынтегрирование  $W^\pm$ -бозонов даёт

$$\mathcal{L}_C = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^{CC} J^{CC \dagger \mu} .$$

Константа связи  $G_F$  эффективного взаимодействия имеет размерность обратного квадрата массы и определяет масштаб четырёхфермионного взаимодействия. Она

получила название константы Ферми. Эта константа связана с фундаментальными параметрами Стандартной модели соотношением (см. рис. В.2)

$$G_F \equiv \frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2},$$

и равна

$$G_F = 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}.$$

В завершение раздела отметим, что аналогичная процедура отынтегрирования хиггсовского бозона также приводит к эффективному четырёхфермионному взаимодействию вида  $\bar{\psi}_m \psi_m \cdot \bar{\psi}_n \psi_n$ . Эффективные константы связи при этом пропорциональны соответствующим юкавским константам фермионов, которые малы по сравнению со слабой калибровочной константой<sup>15</sup>. Поэтому влиянием этого эффективного взаимодействия на процессы при низких энергиях можно пренебречь.

## В.6 Особенности сильных взаимодействий

Хотя переносчики сильных взаимодействий — глюоны — являются безмассовыми частицами, для описания сильных взаимодействий при низких энергиях (точнее — при малых передачах импульса) прибегают к эффективным теориям. В отличие от теории Ферми, которая достаточна, но не необходима для описания слабых взаимодействий при низких энергиях, эффективное описание сильных взаимодействий при низких энергиях *необходимо*, поскольку квантовая калибровочная  $SU(3)_c$ -теория находится в режиме сильной связи при энергиях порядка  $\Lambda_{QCD} \sim 200$  МэВ и даже несколько выше.

Проявляется это, например, в том, что зависящая от энергии  $\sqrt{s}$  калибровочная константа сильного взаимодействия  $\alpha_s(\sqrt{s}) \equiv g_s^2(\sqrt{s})/(4\pi)$  растёт с уменьшением энергии и становится большой (на однопетлевом уровне — обращается в бесконечность) при  $\sqrt{s} = \Lambda_{QCD}$ . Таким образом, при попытке описать сильные процессы с характерными энергиями  $\sqrt{s} \sim \Lambda_{QCD}$  не только “взрывается” ряд теории возмущений по калибровочной константе связи (т.е. основной метод вычислений в квантовой теории поля выходит за пределы своей применимости), но и теряет смысл само описание в терминах кварков и глюонов.

Эта особенность теории полностью согласуется с тем фактом, что кварки и глюоны не наблюдаются в свободном состоянии. Они “заключены” внутри бесцветных частиц — адронов (мезонов и барионов) и начинают играть самостоятельную роль только в процессах с характерными передачами импульса, превышающими  $\Lambda_{QCD}$ . Это явление получило название *конфайнмента* — невылетания кварков и глюонов. Ясно, что характерный размер лёгких адронов — области “заключения”  $u$ -,  $d$ - и  $s$ -кварков и глюонов — составляет как раз  $\Lambda_{QCD}^{-1}$ .

Взаимодействия легчайших адронов (протон, нейтрон, пионы, каоны и др.) между собой и с частицами Стандартной модели, не заряженными по калибровочной группе  $SU(3)_c$ , при низких энергиях  $\sqrt{s} \lesssim \Lambda_{QCD}$  удовлетворительно описывается в рамках *киральной пертурбативной теории поля*. Для описания более тяжёлых

<sup>15</sup>Исключение составляет юкавская константа  $t$ -кварка, однако он не участвует в процессах при низких энергиях, которые мы здесь обсуждаем.

адронов, а также сильных процессов в промежуточной области  $\sqrt{s} \gtrsim \Lambda_{QCD}$  используют различные, как правило, полуфеноменологические подходы. Целый ряд величин, характеризующих КХД в области сильной связи, можно вычислить “из первых принципов”, рассмотрев теорию на решётке и вычислив функциональные интегралы на компьютере. С точки зрения космологии интерес представляют, например, решёточные вычисления температуры фазового перехода КХД, которая составляет  $T_{QCD} \sim 170$  МэВ [49].

## В.7 Эффективное число степеней свободы в Стандартной модели

Используя спектр Стандартной модели и учитывая особенности сильных взаимодействий можно оценить для первичной плазмы эффективное число релятивистских степеней свободы  $g_*$  как функцию температуры. Результат грубой оценки, использующей приближение  $\theta$ -функции (ступенька) для описания поведения  $g_*(T)$  вблизи порогов частиц и температуры фазового перехода КХД, приведён на рис.В.4. Масса

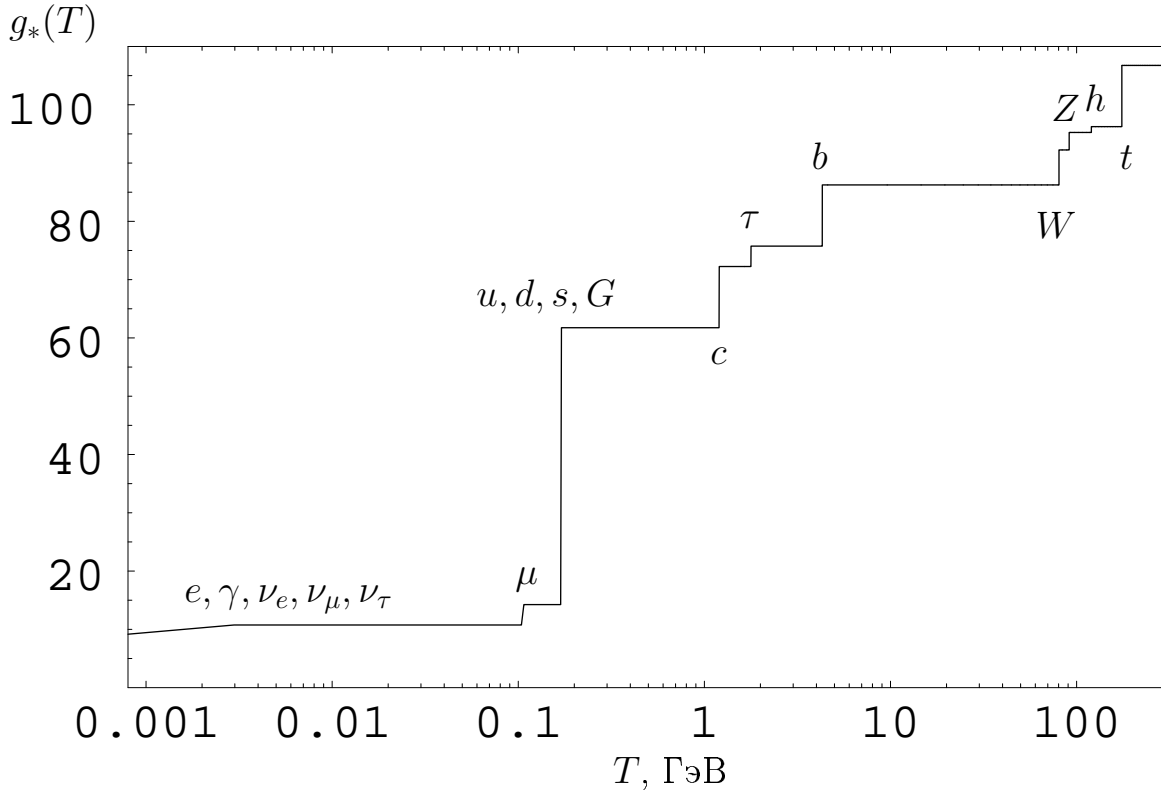


Рис. В.4: Эффективное число степеней свободы  $g_*$  в первичной плазме как функция температуры. Учитываются только частицы Стандартной модели. Масса хиггсовского бозона положена равной  $m_h = 120$  ГэВ.

хиггсовского бозона положена равной  $m_h = 120$  ГэВ.

При температуре  $T < T_{QCD} = 170$  МэВ ультрарелятивистскими являются только фотоны, электроны и нейтрино. Выше температуры фазового перехода КХД в плазме присутствуют лёгкие кварки ( $u, d, s$ ) и глюоны, причём их взаимодействие не слишком сказывается на таких термодинамических величинах, как свободная энергия или давление (об этом свидетельствуют результаты решёточных вычислений).

Поэтому при  $T \sim T_{QCD}$  эффективное число релятивистских степеней свободы изменяется на

$$\Delta g_*^{(QCD)} = 8 \cdot 2 + \frac{7}{8} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 47.5 .$$

Первый вклад здесь связан с глюонами (безмассовые векторы в восьми цветовых состояниях), второй — с  $u$ -,  $d$ -,  $s$ -кварками и антикварками, каждый из которых может находиться в трёх цветовых состояниях. Чуть раньше включается мюон — его масса становится малой по сравнению с температурой при  $T \gtrsim 100$  МэВ. Ступеньки при более высоких температурах соответствуют более тяжёлым частицам, показанным на рис. В.4.

Итак, при  $1 \text{ МэВ} \lesssim T \lesssim 100 \text{ МэВ}$  эффективное число релятивистских степеней свободы равно

$$g_*(T \lesssim 100 \text{ МэВ}) = 2_\gamma + \frac{7}{8}(4_e + 3 \cdot 2_\nu) = \frac{43}{4} = 10.75 ,$$

а при  $T > 200$  ГэВ оно равно (в рамках Стандартной модели физики частиц):

$$g_*(T \gtrsim 200 \text{ ГэВ}) = 2_\gamma + 2 \cdot 3_w + 3_z + 1_h + 8^{(c)} \cdot 2_G + \frac{7}{8}(3 \cdot 4_e + 3 \cdot 2_\nu + 6 \cdot 3^{(c)} \cdot 4_q) = 106.75$$

Здесь подстрочный индекс обозначает тип частиц, надстрочный индекс  $(c)$  относится к числу цветовых состояний, последние множители — числа спиновых состояний.



# Приложение С

## Осцилляции нейтрино

Осцилляции (взаимопревращения) нейтрино — переходы нейтрино с изменением аромата — единственное на сегодняшний день прямое свидетельство неполноты Стандартной модели физики частиц, полученное в лаборатории, а не из космологии или астрофизических наблюдений. Исторически первыми экспериментами, результаты которых указывали на нейтринные осцилляции, стали измерения потоков солнечных и атмосферных нейтрино. Впоследствии эти наблюдения были подтверждены экспериментами с нейтрино от ядерных реакторов и с нейтрино от ускорителей.

### С.1 Наблюдения нейтринных осцилляций

#### С.1.1 Солнечные нейтрино и KamLAND

На Земле наибольший поток нейтрино естественного происхождения обеспечивается термоядерными реакциями в центре Солнца, которые служат источником солнечной энергии. Перечислим основные из реакций, протекающих в Солнце и сопровождающихся образованием нейтрино:

$$p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e \quad (\text{C.1})$$

$$p + e + p \rightarrow {}^2\text{H} + \nu_e \quad (\text{C.2})$$

$${}^3\text{He} + p \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e \quad (\text{C.3})$$

$${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e \quad (\text{C.4})$$

$${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu_e \quad (\text{C.5})$$

$${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$$

$${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$$

В этих реакциях образуются только *электронные* нейтрино. Энергии этих нейтрино лежат в диапазоне от десятков кэВ до десятка МэВ; энергетический спектр солнечных нейтрино показан на рис. С.1. Поток нейтрино и их спектр рассчитываются в рамках Стандартной модели Солнца (ССМ, Стандартная солнечная модель), причём справедливость модели подтверждается как измерениями потока фотонов от Солнца, так и данными гелиосейсмологии.

Нейтрино чрезвычайно слабо взаимодействуют с веществом, они проходят сквозь Солнце и Землю практически без поглощения. Несмотря на большой поток, регистрация нейтрино представляет собой очень сложную экспериментальную задачу:

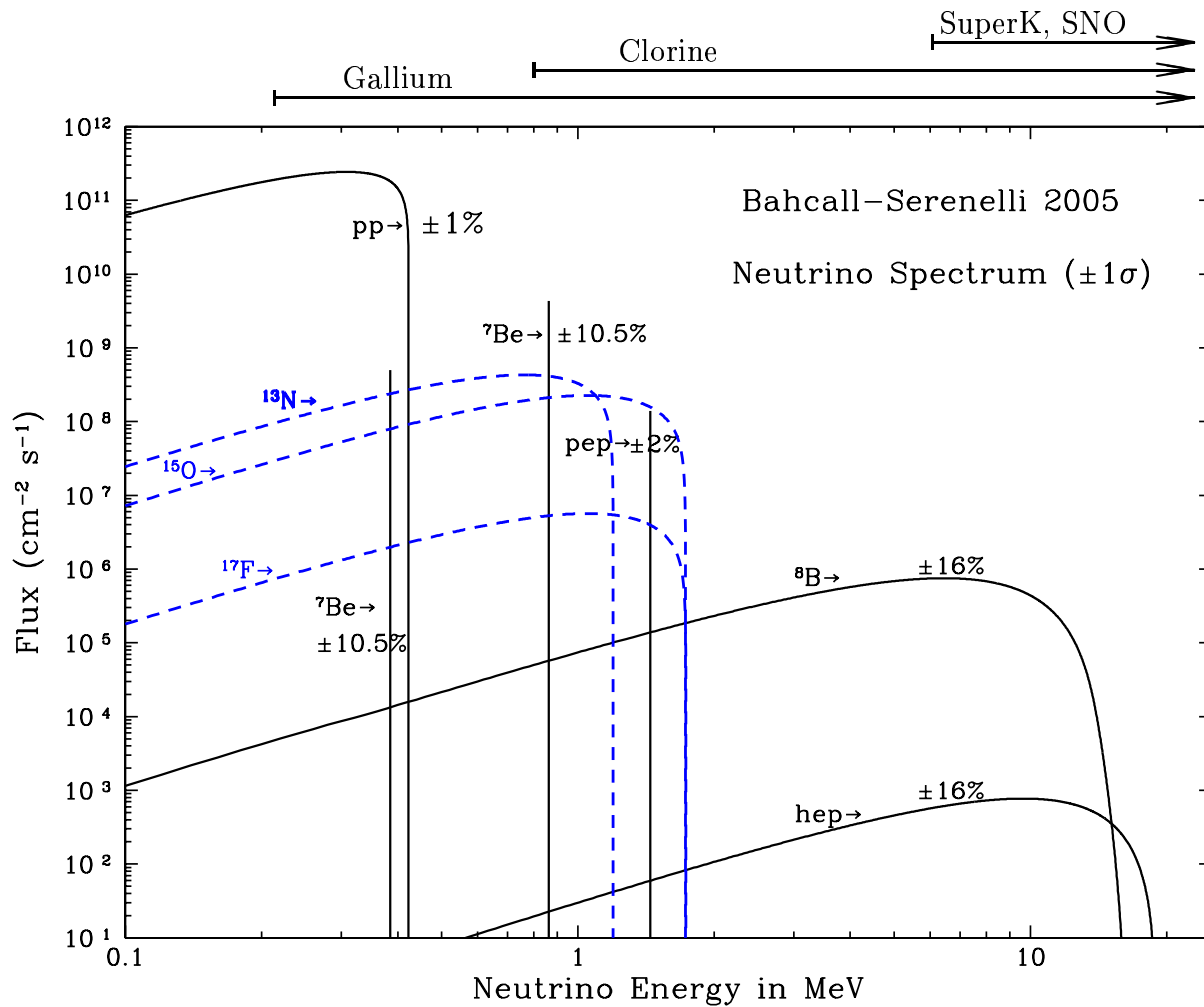
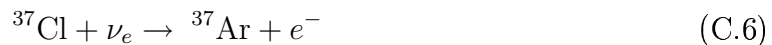


Рис. С.1: Спектр солнечных нейтрино на Земле [50]: поток нейтрино в зависимости от энергии. Показаны вклады различных термоядерных реакций (с оценкой точности вычислений), а также пороги нейтринных детекторов.

опять-таки из-за слабости взаимодействия количество событий на единицу массы детектора мало, поэтому приходится использовать детекторы большой массы (от десятков тонн до десятков килотонн, в зависимости от типа детектора), набирать статистику в течение многих лет, а для снижения фона применять радиоактивные материалы, помещать детекторы глубоко под землёй (где значительно снижен поток заряженных частиц космических лучей) и т.д.

Исторически первым экспериментом, предназначенным для измерения потока солнечных нейтрино, был эксперимент в шахте Хоумстейк (США), длившийся почти 30 лет. В детекторе массой 615 тонн происходила реакция с участием солнечных электронных нейтрино,



Единичные атомы  $^{37}\text{Ar}$  выделялись из материала мишени химическим путём, а затем их количество определялось путём подсчёта распадов радиоактивных ядер  $^{37}\text{Ar}$ . Эксперименты такого типа называют радиохимическими. В них измеряется интегральный поток нейтрино, зависящий от энергетического поведения сечения используемой реакции, в данном случае реакции (C.6). Эксперимент в Хоумстейке чувствителен

в основном к борным нейтрино, образующимся в Солнце в реакции (С.5), хотя довольно заметный вклад должна давать реакция (С.4) и другие реакции (но не (С.1)). Измеренный интегральный поток электронных нейтрино  $\Phi^{\text{Cl}}$  оказался гораздо меньше потока  $\Phi_{\text{CCM}}^{\text{Cl}}$ , предсказанного Стандартной моделью Солнца,

$$\frac{\Phi^{\text{Cl}}}{\Phi_{\text{CCM}}^{\text{Cl}}} = 0.34 \pm 0.03$$

Этот результат стал первым указанием на то, что по пути из центра Солнца к Земле электронные нейтрино превращаются в нейтрино других типов, которые в реакции (С.6) не регистрируются.

Поток борных нейтрино в высокоэнергетической части спектра ( $E_{\nu_e} > 6.5$  МэВ) был затем измерен детектором KamioKande, а впоследствии Super-K (шахта Камиока, Япония<sup>1</sup>). В этих детекторах (массой около 1 килотонны и 22.5 килотонн, соответственно) в качестве рабочего вещества использовалась вода. Нейтрино испытывает реакцию упругого рассеяния

$$\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-, \quad (\text{C.7})$$

в результате которой появляется релятивистский электрон, чьё черенковское излучение и регистрировалось. Измеренный поток солнечных нейтрино вновь оказался ниже предсказанного Стандартной моделью Солнца (данные Super-K)

$$\frac{\Phi^{S-K}}{\Phi_{\text{CCM}}^{S-K}} = 0.48 \pm 0.02, \quad E_{\nu} \geq 6.5 \text{ МэВ} \quad (\text{C.8})$$

Отметим, что ошибка здесь в основном связана с неопределённостями в Стандартной модели Солнца; сам поток  $\Phi^{S-K}$  измерен с гораздо лучшей точностью.

Упругое рассеяние на электроне испытывают как электронные нейтрино, так и  $\nu_{\mu}$ ,  $\nu_{\tau}$  (см. подробности в Приложении В, в частности, лагранжиан взаимодействия (В.15) и обсуждение в разделе В.5). В первом случае  $\nu_e e^-$  рассеяние происходит за счёт обмена  $W$ -бозоном (заряженные токи, рис. С.2а) и обмена  $Z$ -бозоном (нейтраль-

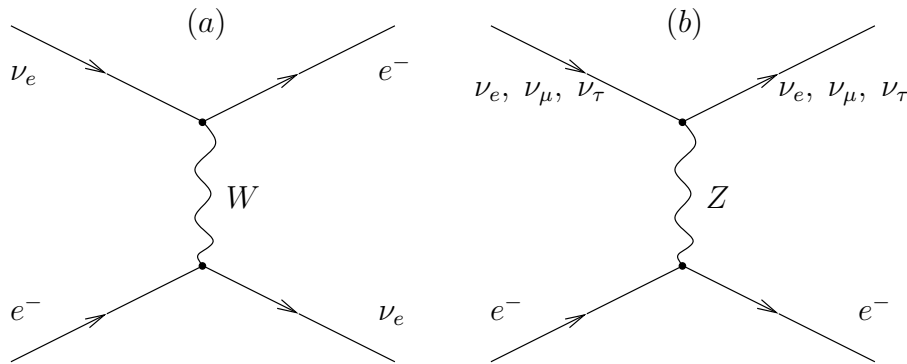


Рис. С.2: Диаграммы с обменом  $W$ -бозоном (а) и  $Z$ -бозоном (b), дающие основной вклад в сечение рассеяния нейтрино на электроне.

ные токи, рис. С.2b), а в случае  $\nu_{\mu}$  и  $\nu_{\tau}$  имеется только обмен  $Z$ -бозоном (рис. С.2b).

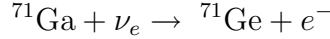
<sup>1</sup>Здесь и далее указано географическое положение детектора. Сами эксперименты проводятся коллаборациями учёных разных стран, состав коллабораций можно узнать из оригинальной литературы.

Обмен  $Z$ -бозоном приводит к меньшему сечению, чем обмен  $W$ -бозоном, так что эффективный поток нейтрино, регистрируемый в реакции упругого рассеяния (С.7), пропорционален

$$\Phi_{eff}^{\nu_e} \propto \Phi_{\nu_e} + 0.15 (\Phi_{\nu_\mu} + \Phi_{\nu_\tau}) . \quad (\text{C.9})$$

Это обстоятельство существенно для интерпретации результатов, полученных с помощью детектора SNO, о которых пойдёт речь ниже.

Следующими экспериментами по солнечным нейтрино стали радиохимические эксперименты, в которых используется реакция



с последующим химическим извлечением атомов  $^{71}\text{Ge}$  и подсчётом их радиоактивных распадов. Это — эксперимент SAGE (Россия, Баксанская нейтринная обсерватория ИЯИ РАН, 60 тонн галлия) и GALLEX/GNO (Италия, Лаборатория Гран-Сассо, 30 тонн галлия). В отличие от других экспериментов, бóльший вклад в измеряемый интегральный поток дают нейтрино от реакции (С.1), хотя есть и вклады в нейтрино от реакций (С.4), (С.5) и других. Измеренный в галлиевых экспериментах интегральный поток (длительность измерений составляет более 10 лет) также значительно ниже предсказанного Стандартной моделью Солнца,

$$\begin{array}{ll} \frac{\Phi^{\text{Ga}}}{\Phi_{\text{CCM}}^{\text{Ga}}} = 0.54 \pm 0.04 & \text{SAGE} \\ \frac{\Phi^{\text{Ga}}}{\Phi_{\text{CCM}}^{\text{Ga}}} = 0.56 \pm 0.06 & \text{GALLEX/GNO} \end{array}$$

Эти согласующиеся друг с другом результаты исключили гипотетическую возможность того, что наблюдавшийся в описанных выше экспериментах дефицит борных нейтрино связан с какими-то неточностями в Стандартной модели Солнца, т.е. имеет астрофизическую природу: в отличие от реакции (С.5), реакция (С.1), к которой чувствительны галлиевые эксперименты, непосредственно определяет энерговыделение Солнца, поэтому величина потока  $p$ - $p$  нейтрино может быть найдена по-существу безмодельно, исходя из хорошо измеренной светимости Солнца.

Наконец, серьёзнейшим аргументом в пользу превращения  $\nu_e$  в  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$  по дороге из центра Солнца к Земле стали измерения на детекторе нейтринной обсерватории Садбери (SNO, Канада). В этом детекторе в качестве рабочего вещества использовалась тысяча тонн тяжёлой воды. Нейтрино регистрировались как в реакции упругого рассеяния (С.7), так и в реакциях



Как и детекторы Kamiokande и Super-K, детектор SNO чувствителен к борным нейтрино (с энергией  $E_\nu > 5$  МэВ). В реакции (С.7) измеряется комбинация (С.9) потоков нейтрино всех типов; реакция (С.10) идёт за счёт обмена  $W$ -бозоном (заряженные токи, charged currents, см. раздел В.5), поэтому в ней измеряется поток *электронных* нейтрино  $\Phi_{\nu_e}$ ; с другой стороны, реакция (С.11) идёт только за счёт обмена  $Z$ -бозоном (нейтральные токи, neutral currents), и в ней измеряется полный поток нейтрино

$$\Phi_{NC} = \Phi_{\nu_e} + \Phi_{\nu_\mu} + \Phi_{\nu_\tau} \quad (\text{C.12})$$

Измеренные в реакциях (С.13), (С.14) потоки нейтрино, по отношению к предсказанию Стандартной модели Солнца, составляют

$$\frac{\Phi_{\nu_e}^{SNO}}{\Phi_{\nu_e, \text{CCM}}} = 0.35 \pm 0.07 \quad (\text{С.13})$$

$$\frac{\Phi_{NC}^{SNO}}{\Phi_{NC, \text{CCM}}} = 1.0 \pm 0.2 \quad (\text{С.14})$$

а результат SNO по реакции (С.9) находится в согласии с (С.8) (хотя имеет бóльшую статистическую ошибку по сравнению с результатом Super-K). Результат (С.14) демонстрирует, что Стандартная модель Солнца правильно предсказывает излучаемый поток борных нейтрино, а из (С.13) прямо следует, что около 2/3 из них превращается из  $\nu_e$  в  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$  при движении от центра Солнца к Земле. Существенно и то, что результаты (С.13) и (С.14) согласуются с (С.8) при учёте (С.9).

В действительности, согласие экспериментальных данных между собой даже несколько лучше, чем может показаться из сопоставления (С.8), (С.13) и (С.14). Как уже отмечалось, большой вклад в погрешности в (С.8), (С.13), (С.14) даёт неопределённость в значении нейтринного потока, вычисленного в рамках Стандартной модели Солнца. Сами по себе экспериментальные данные имеют погрешность не хуже 10%; это и есть та точность, с которой они согласуются между собой. Подчеркнём ещё раз, что *три* измеренных комбинации потоков,  $\Phi_{\nu_e}$ ,  $\Phi^{NC}$  (см. (С.12)) и  $\Phi_{eff}^{\nu_e}$  (см. (С.9)) описываются *двумя* параметрами  $\Phi_{\nu_e}$  и  $\Phi_{\nu_\mu} + \Phi_{\nu_\tau}$ .

Фундаментальный результат об осцилляциях электронных нейтрино был подтверждён экспериментом KamLAND (шахта Камиока, Япония). Детектор KamLAND содержит 1 тысячу тонн жидкого сцинтиллятора и регистрирует антинейтрино, образующиеся в ядерных реакциях на японских атомных электростанциях. Расстояния до них составляют от 70 км до 250 км, в отличие от предыдущих реакторных экспериментов со значительно меньшей базой. Детектор KamLAND зарегистрировал недостаток электронных антинейтрино по сравнению со значением, вычисленным в предположении об отсутствии осцилляций,

$$\frac{\Phi^{KamLAND}}{\Phi_{no\ osc}} = 0.611 \pm 0.095 .$$

Таким образом, электронные антинейтрино с энергией  $E \simeq 3-6$  МэВ (антинейтрино именно с такой энергией излучаются из ядерных реакторов) испытывают превращения в другие типы уже на расстоянии порядка 100 км.

### С.1.2 Атмосферные нейтрино и K2K

В экспериментах другого класса были открыты осцилляции *мюонных* нейтрино. Впервые это явление было обнаружено при измерениях потока атмосферных нейтрино детекторами Kamiokande и Super-K.

Космические лучи — распространяющиеся в космической среде заряженные частицы (протоны и ядра), — взаимодействуя с частицами, образующими атмосферу Земли, рожают потоки вторичных частиц. Сечение рассеяния насыщается рождением большого числа частиц, среди которых доминируют легчайшие адроны — пионы (и в меньшем количестве каоны). Заряженные пионы ( $\pi^\pm$ ) не долетают до поверхности Земли, а распадаются в атмосфере, рождая мюоны и мюонные нейтрино:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu . \quad (\text{С.15})$$

Если энергия первичной частицы не слишком высока, то мюоны, в свою очередь, также распадаются, вновь рождая нейтрино:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu, \quad \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu. \quad (\text{C.16})$$

Нейтрино, образующиеся в реакциях типа (C.15), (C.16), и называют атмосферными; интересная с точки зрения осцилляций область энергий нейтрино составляет сотни МэВ — десятки ГэВ.

▷ *Задача 1.* При каких энергиях первичной частицы большая часть мюонов будет долетать до поверхности Земли? Считать, что множественность (количество частиц, рождённых в результате одного столкновения) составляет в среднем от 10 до 500 при энергиях от десятка ГэВ до сотен ЕэВ. Учесть, что мюоны практически не взаимодействуют с атмосферой.

Поток космических лучей на Земле изотропен<sup>2</sup>, поэтому в отсутствие осцилляций изотропным должен быть и поток атмосферных нейтрино. Это и наблюдается для электронных нейтрино и антинейтрино (график на левой половине рис. С.3). В

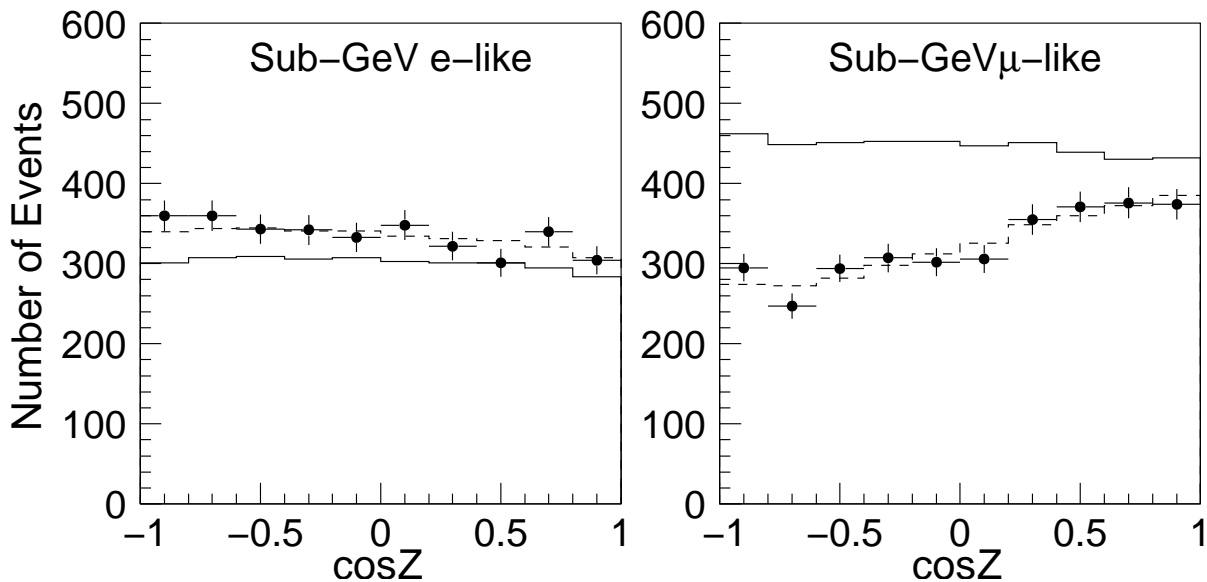


Рис. С.3: Зависимость потоков нейтрино с энергией меньше 1 ГэВ от зенитного угла[51]: график на левой половине рисунка относится к электронным нейтрино, график на правой половине рисунка относится к мюонным нейтрино.

то же время, поток мюонных нейтрино и антинейтрино зависит от зенитного угла (график на правой половине рис. С.3). Это означает, что мюонные нейтрино, приходящие сверху и пролетающие всего несколько километров от места образования до детектора, не успевают испытать осцилляции; в то же время, мюонные нейтрино, приходящие снизу, проходят сквозь всю Землю и успевают частично превратиться в нейтрино других типов. Поскольку зависимость потока электронных нейтрино от зенитного угла если и есть, то мала, вероятность превращения  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  невелика (на неё имеются лишь ограничения сверху), и атмосферные  $\nu_\mu$  превращаются в основном в  $\nu_\tau$  (если в природе отсутствуют нейтрино других типов, помимо  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$ ,

<sup>2</sup>По крайней мере при энергиях  $E < 10^{18}$  эВ=1 ЕэВ, которые нас здесь интересуют.

см. обсуждение в разделе С.3). Этот результат подтверждается всей совокупностью данных по атмосферным нейтрино, включая измерение абсолютных потоков  $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$  и  $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ , измерение потоков нейтрино с энергией выше 1 ГэВ и т.д.

Вывод об осцилляциях мюонных нейтрино подтверждён в эксперименте K2K. Источником мюонных нейтрино в нём служат пионы, рождённые пучком протонов с ускорителя лаборатории КЕК в Японии и распадающиеся по каналу (С.15), а в качестве детектора выступает Super-K. Расстояние, которое пролетают нейтрино от места образования до места регистрации, составляет 250 км (расстояние между лабораторией КЕК и шахтой Камиока), а энергия нейтрино — около 1.2 ГэВ. В эксперименте K2K обнаружено “исчезновение” мюонных нейтрино: их поток, измеренный детектором Super-K, меньше потока, измеренного “ближним” детектором, находящимся непосредственно в лаборатории КЕК. Результаты эксперимента K2K находятся в хорошем согласии с данными по атмосферным нейтрино.

Исследованию осцилляций мюонных нейтрино посвящён и эксперимент, в котором пучок нейтрино с ускорителя Fermilab (Батавия, США) регистрируется подземным детектором MINOS (Миннесота, США). Результаты этого эксперимента также находятся в согласии с результатами Super-K и K2K.

## С.2 Интерпретация результатов наблюдений: осцилляции

Описанные выше результаты естественным образом интерпретируются как переходы (*осцилляции*) нейтрино разных поколений между собой.

Такие переходы запрещены в Стандартной модели физики частиц, поскольку в ней нейтрино имеют нулевые массы, и, как следствие (см. Приложение В), лептонные числа сохраняются. В обобщениях Стандартной модели, допускающих *отличные от нуля массы нейтрино*, такие осцилляции возможны. А именно, предположим, что нейтрино рождаются в слабых процессах в полном соответствии со Стандартной моделью. Однако в базисе полей Стандартной модели, где все массовые матрицы других частиц диагональны, нейтрино осциллируют — гамильтониан, описывающий их дальнейшее свободное распространение *недиагонален* в этом базисе. В дальнейшем мы будем называть этот базис *калибровочным*, поскольку в нём калибровочные взаимодействия лептонов диагональны по поколениям (как они определены в Стандартной модели).

Ситуация здесь во многом аналогична смешиванию кварков (раздел В.4). В базисе, где калибровочные взаимодействия кварков диагональны (калибровочный базис) массовая матрица кварков недиагональна, и наоборот, в базисе, где диагональна массовая матрица кварков (массовый базис) недиагональны их калибровочные взаимодействия. В случае кварков удобно работать исключительно в массовом базисе. При обсуждении нейтринных осцилляций полезно использовать как калибровочный, так и массовый базис.

Предположим, что в природе имеется три типа нейтрино; о возможности дополнительных типов мы упомянем позже. Переход от калибровочного базиса  $|\nu_\alpha\rangle$ ,  $\alpha = e, \mu, \tau$  к массовому базису  $|\nu_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$  осуществляет унитарное преобразование  $U_{i\alpha}$  (матрица смешивания в лептонном секторе):

$$|\nu_i\rangle = U_{i\alpha}|\nu_\alpha\rangle \quad (\text{С.17})$$

(суммирование по повторяющимся индексам подразумевается). Электронным, мюонным и  $\tau$ -нейтрино служат линейные комбинации состояний с определённой массой  $|\nu_\alpha\rangle = U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle$ , рождающиеся вместе с заряженными антилептонами (позитроном,  $\mu^+$  и  $\tau^+$ , соответственно) в двухчастичных распадах  $W^+$ -бозонов (как реальных, так и виртуальных). Поскольку и рождение, и регистрация нейтрино осуществляется посредством слабых взаимодействий, экспериментально наблюдаемыми состояниями являются реперные вектора калибровочного базиса, т.е.  $|\nu_e\rangle$ ,  $|\nu_\mu\rangle$  и  $|\nu_\tau\rangle$ .

Свободная эволюция нейтрино в системе покоя определится собственными значениями массовой матрицы:

$$|\nu_j(t)\rangle = e^{-im_j t} |\nu_j(0)\rangle . \quad (\text{C.18})$$

Если в момент  $t = 0$  имелось чистое калибровочное состояние — например, электронное нейтрино  $|\nu_e\rangle$ , то через время  $t$  другие компоненты вектора состояния в калибровочном базисе также становятся ненулевыми. Это означает, что существует ненулевая вероятность зарегистрировать мюонное или  $\tau$ -нейтрино через время  $t$ .

Для практических приложений ставится задача о вычислении в лабораторной системе отсчёта вероятности перехода  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  на удалении  $L$  от места рождения нейтрино  $\nu_\alpha$ . При этом формула (C.18) для эволюции нейтрино в массовом базисе обобщается:

$$|\nu_j(t, L)\rangle = e^{-i(E_j t - p_j L)} |\nu_j(0)\rangle ,$$

где  $p_j$  и  $E_j$  — импульс и энергия нейтрино, соответственно. Интерес представляет случай ультрарелятивистских нейтрино. Считая, что энергия нейтрино фиксирована,<sup>3</sup> и учитывая, что в ультрарелятивистском случае  $p_j = \sqrt{E^2 - m_j^2} = E - m_j^2/2E$ , получим, что эволюция состояний в массовом базисе в зависимости от пройденного расстояния описывается формулой (с точностью до общего для всех нейтрино фазового множителя)

$$|\nu_j(L)\rangle = e^{-i\frac{m_j^2}{2E}L} |\nu_j(0)\rangle .$$

В соответствии с (C.17) амплитуда перехода нейтрино  $\nu_\alpha$  в нейтрино  $\nu_\beta$  (в калибровочном базисе) равна

$$\begin{aligned} A(\alpha \rightarrow \beta) &= \sum_j \langle \nu_\beta | \nu_j(L) \rangle \langle \nu_j(0) | \nu_\alpha \rangle = \sum_j \langle \nu_\beta | \nu_j \rangle e^{-i\frac{m_j^2}{2E}L} \langle \nu_j | \nu_\alpha \rangle \\ &= \sum_j U_{j\beta} e^{-i\frac{m_j^2}{2E}L} U_{\alpha j}^* \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Формула (C.19) позволяет вычислить вероятность перехода между двумя состояни-

---

<sup>3</sup>В литературе можно найти обсуждение тонких вопросов типа “являются ли состояния рождённых нейтрино собственными состояниями оператора энергии  $\hat{P}_0$  или оператора импульса  $\hat{\mathbf{P}}$ ?” Ответы на подобные вопросы важны для правильного описания осцилляций не слишком релятивистских нейтрино,  $|\mathbf{p}_\nu| \lesssim m_\nu$ , а также для изучения пределов применимости осцилляционной картины (она заведомо не применима на больших расстояниях от источника, куда нейтрино разных масс приходят за существенно разное время). Этих вопросов мы здесь не касаемся.



ями калибровочного базиса после преодоления расстояния  $L$ :

$$\begin{aligned}
P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= |A(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \\
&= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j>i} \operatorname{Re}[U_{\alpha j}^* U_{j\beta} U_{i\alpha} U_{\beta i}^*] \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{ji}^2}{4E} L \right) \\
&\quad + 2 \sum_{j>i} \operatorname{Im}[U_{\alpha j}^* U_{j\beta} U_{i\alpha} U_{\beta i}^*] \sin \left( \frac{\Delta m_{ji}^2}{2E} L \right), \tag{C.20}
\end{aligned}$$

где

$$\Delta m_{ji}^2 \equiv m_j^2 - m_i^2.$$

Полученная формула описывает осцилляции с амплитудой, определяемой лептонной матрицей смешивания, и длиной осцилляции, определяемой отношением разностей квадратов масс нейтрино к энергии. Амплитуда и длина осцилляции становятся хорошо определёнными для осцилляционного процесса, в котором по тем или иным причинам существенную роль играют только два массовых состояния и два калибровочных состояния нейтрино. В этом случае  $2 \times 2$  унитарная матрица  $U_{i\alpha}$ ,  $i, \alpha = 1, 2$  определяется тремя действительными параметрами. Два из трёх не являются физическими: от них можно избавиться посредством фазовых вращений фермионных полей. Выберем вещественные параметры  $\phi$ ,  $\chi$ ,  $\theta$  так, что унитарная матрица смешивания  $U$  имеет вид

$$U_{i\alpha} = \begin{pmatrix} e^{i\chi} \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \\ -e^{-i\phi} \sin \theta & e^{-i\chi} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Тогда в результате фазовых вращений векторов нейтрино

$$\nu_1 \rightarrow \nu_1 e^{i\frac{\phi-\chi}{2}}, \quad \nu_2 \rightarrow \nu_2 e^{-i\frac{\phi-\chi}{2}},$$

и одновременного вращения соответствующих полей заряженных лептонов

$$l_1 \rightarrow l_1 e^{-i\frac{\phi+\chi}{2}}, \quad l_2 \rightarrow l_2 e^{i\frac{\phi+\chi}{2}},$$

вершина взаимодействия нейтрино и заряженных лептонов с  $W$ -бозонами будет иметь стандартный, диагональный по ароматам вид в калибровочном базисе, а переход к массовому базису будет осуществлять матрица

$$U_{i\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \tag{C.21}$$

зависящая лишь от одного параметра — угла смешивания  $\theta$ . В этом случае формула (C.20) упрощается:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} + (-1)^{\delta_{\alpha\beta}} \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} L \right). \tag{C.22}$$

Иначе говоря, вероятность перехода нейтрино  $\nu_\alpha$  в нейтрино другого типа  $\nu_\beta$  равна

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\beta \neq \alpha}) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\Delta m^2}{4E} L \right),$$

а вероятность выживания нейтрино типа  $\nu_\alpha$  равна  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = 1 - P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\beta \neq \alpha})$ . Угол смешивания определяет амплитуду осцилляции  $A = \sin^2 2\theta$ , а длина осцилляции зависит от разности квадратов масс нейтрино  $\Delta m^2$  и их энергии: вероятность

осцилляций максимальна в точках, удалённых от места рождения нейтрино на расстоянии

$$L_k = (2 \text{ км}) \cdot (1 + 2k) \frac{E}{\text{ГэВ}} \frac{\text{эВ}^2}{\Delta m^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отметим, что формула (С.22) работает для монохроматического потока нейтрино (энергия  $E$  фиксирована); если энергии нейтрино в пучке имеют некоторый разброс, то осцилляционная картина замывается.

Ясно, что наряду с осцилляциями нейтрино должны быть (и они наблюдаются экспериментально) и осцилляции антинейтрино, для описания которых применим такой же формализм. СРТ-теорема обеспечивает связь между вероятностями нейтринных и антинейтринных переходов:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha). \quad (\text{С.23})$$

Поскольку вероятность перехода  $\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha$  совпадает с вероятностью перехода  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ , вычисленной с комплексно-сопряжённой матрицей смешивания лептонов (см. (С.20)), то связь (С.23) приводит к равенству

$$P(\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha; U) = P(\nu_\beta \rightarrow \nu_\alpha; U^*).$$

Это равенство показывает, что отличие вероятностей осцилляций нейтрино и антинейтрино возможно лишь для комплексной матрицы  $U$  (см. формулу (С.20)); оно означало бы нарушение СР-симметрии в лептонном секторе. Отметим, что нетривиальная СР-фаза возможна, только если число типов нейтрино больше двух: в случае двух типов нейтрино массовую матрицу можно сделать действительной путём переопределения полей (см. (С.21)).

Все приведённые выше формулы относятся к так называемым *вакуумным* осцилляциям нейтрино, т.е. переходам, происходящим без влияния среды, в которой нейтрино распространяется. Именно вакуумными осцилляциями объясняется “исчезновение” части атмосферных мюонных нейтрино после прохождения через Землю.

Наиболее простым и правдоподобным объяснением этого явления являются осцилляции  $\nu_\mu$  в  $\nu_\tau$ . Для такого объяснения угол  $\nu_\mu$ - $\nu_\tau$  смешивания оказывается примерно равным  $45^\circ$  (полное смешивание), а разность квадратов масс нейтрино составляет

$$\Delta m_{atm}^2 = (2 - 3) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}. \quad (\text{С.24})$$

С этими же значениями согласуются результаты экспериментов K2K и MINOS.

▷ **Задача 2.** Используя эти параметры  $\nu_\mu$ - $\nu_\tau$  системы, определить, нейтрино каких энергий должны сильно осциллировать при пересечении Земли. Успевают ли пересечь атмосферу соответствующие мюоны?

▷ **Задача 3.** Оценить, какая доля  $\nu_\mu$  исчезнет (перейдёт в  $\nu_\tau$ ) в условиях эксперимента K2K.

Теперь перейдём к солнечным нейтрино. Здесь важную роль играют особенности, возникающие при распространении нейтрино в веществе. Соответствующее явление получило название эффекта Михеева–Смирнова–Вольфенштейна (MSW); оно возникает благодаря когерентному рассеянию нейтрино в веществе (рассеяние вперёд на электронах среды).

Влияние этого процесса можно учесть, вводя эффективную добавку к гамильтониану, описывающему распространение нейтрино. Напомним, что при не слишком высоких энергиях лагранжиан лептонного сектора Стандартной модели содержит

эффективное четырёхфермионное слагаемое, обязанное обмену виртуальными  $W$ -бозонами (заряженные токи)

$$\mathcal{L}^{CC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e \cdot \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \nu_e \quad (\text{C.25})$$

(см. раздел В.5). В среде с плотностью электронов  $n_e$  имеем

$$\ll \bar{e}_k \gamma_{kl}^0 e_l \gg = \ll e^\dagger e \gg = n_e, \quad (\text{C.26})$$

где двойными скобками обозначено усреднение по состоянию среды, и в начале формулы мы явно выписали спинорные индексы. Предполагая, что электрические токи в среде отсутствуют или малы (это заведомо справедливо для нерелятивистского вещества), имеем

$$\ll \bar{e}_k \gamma_{kl}^i e_l \gg = 0. \quad (\text{C.27})$$

С учётом того, что операторы  $\bar{e}_k$  и  $e_l$  антикоммутируют, получим из (C.26) и (C.27)

$$\ll e_k \bar{e}_l \gg = -\frac{1}{4} \gamma_{kl}^0 \cdot n_e$$

(мы считаем матрицу  $\gamma^0$  симметричной). Усредняя по среде лагранжиан (C.25), получим вклад в эффективный лагранжиан, описывающий распространение электронных нейтрино

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \sqrt{2} G_F \bar{\nu}_e \gamma^\mu \ll e \bar{e} \gg \gamma_\mu \nu_e \\ &= -\sqrt{2} G_F n_e \frac{1}{4} \bar{\nu}_e \gamma^\mu \gamma^0 \gamma_\mu \nu_e \\ &= -\sqrt{2} G_F n_e \bar{\nu}_e \gamma^0 \nu_e. \end{aligned}$$

Отсюда мы заключаем, что в присутствии среды в операторе Дирака  $i\gamma^\mu \partial_\mu$  нужно сделать замену

$$i\gamma^0 \partial_0 \rightarrow i\gamma^0 \partial_0 - \sqrt{2} G_F n_e \gamma^0,$$

т.е. оператор  $i\partial_0$  заменяется на

$$i\partial_0 - V,$$

где

$$V = \sqrt{2} G_F n_e, \quad (\text{C.28})$$

— вклад среды в эффективный гамильтониан. Подчеркнём, что этот вклад имеет-ся только для электронных нейтрино (постольку, поскольку в среде отсутствуют мюоны и  $\tau$ -лептоны).

Последнее утверждение — не вполне точное. В эффективном четырёхфермионном лагранжиане имеются слагаемые, связанные с обменом  $Z$ -бозоном (нейтральные токи). Они имеют структуру типа (см. раздел В.5)

$$\sum_{\alpha} \bar{e} \gamma^\mu e \cdot \bar{\nu}_\alpha \gamma_\mu \nu_\alpha,$$

где суммирование идёт по всем типам нейтрино. В среде такие слагаемые приводят для нейтрино к эффективному гамильтониану вида, аналогичного (C.28), но одинаковому для всех типов нейтрино. Последнее означает, что в базисе  $|\nu_\alpha\rangle$ , как и в

любом другом базисе, этот вклад в эффективный гамильтониан кратен единичному, поэтому он не влияет на осцилляции нейтрино, приводя лишь к дополнительной зависящей от времени общей фазе вектора состояния.

Как и в случае атмосферных нейтрино, описание осцилляций солнечных нейтрино основано на двухнейтринной осцилляционной картине: по пути из недр Солнца электронные нейтрино переходят в некоторую линейную комбинацию  $\tilde{\nu}$  мюонного нейтрино и  $\tau$ -нейтрино. В пространстве  $(\nu_e, \tilde{\nu})$  эволюция вектора состояния нейтрино определяется эффективным гамильтонианом

$$H(L) = \frac{\Delta m_{21}^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + V(L) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.29})$$

где  $V(L) = \sqrt{2}G_F n_e(L)$  учитывает неоднородное распределение электронов в Солнце, а угол  $\theta$  — это угол вакуумного смешивания в системе  $(\nu_e, \tilde{\nu})$ :

$$|\nu_2\rangle = |\nu_e\rangle \sin \theta + |\tilde{\nu}\rangle \cos \theta, \quad |\nu_1\rangle = |\nu_e\rangle \cos \theta - |\tilde{\nu}\rangle \sin \theta.$$

Отметим, что в вакууме по определению более тяжёлым состоянием является состояние  $|\nu_2\rangle$ .

В качестве примера рассмотрим нейтрино, рождённые в результате распада ядер  $^8\text{B}$ . Характерные энергии нейтрино составляют 4-10 МэВ. Для описания данных по солнечным нейтрино разность квадратов масс должна быть порядка

$$\Delta m_{sol}^2 \sim 10^{-4} \text{ эВ}^2. \quad (\text{C.30})$$

В центре Солнца плотность свободных электронов настолько велика,  $n_e = 6 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ , что  $V(L)$  доминирует в гамильтониане нейтрино над вкладом массовой матрицы.

Пусть  $|\nu_i(L)\rangle$  — собственные вектора матрицы (C.29), разные на разных расстояниях  $L$  от места рождения нейтрино, причём состоянию  $|\nu_2(L)\rangle$  соответствует большее собственное значение. Из сказанного выше следует, что в центре Солнца  $|\nu_2\rangle$  совпадает с  $|\nu_e\rangle$  (из (C.28) видно, что  $V > 0$ ). Итак, в результате распада  $^8\text{B}$  рождается состояние  $|\nu_2\rangle$ .

Дальнейшую эволюцию этого состояния будем рассматривать в адиабатическом приближении. Тогда нейтрино всегда находится в состоянии  $|\nu_2(L)\rangle$ , и на поверхности Солнца оно будет в состоянии  $|\nu_2(L_\odot)\rangle$ , которое совпадает с состоянием  $|\nu_2\rangle$  в вакууме. Это чистое массовое состояние, поэтому при дальнейшем распространении в вакууме оно ни во что не переходит. Таким образом, для вероятности регистрации на Земле электронного нейтрино, появившегося в распаде бора-8, получаем:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = |\langle \nu_e | \nu_2 \rangle|^2 = \sin^2 \theta. \quad (\text{C.31})$$

Измерение потока солнечных электронных нейтрино показывает, что угол смешивания солнечных нейтрино  $(\nu_e - \tilde{\nu})$  составляет  $\theta \sim 32^\circ - 37^\circ$ , так что  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} < 0.5$ . Подчеркнём, что наблюдаемый факт того, что измеренный поток борных  $\nu_e$  заметно меньше половины предсказанного (см. (C.10)) — это прямое свидетельство о MSW-эффекте: в случае вакуумных осцилляций двух типов нейтрино усреднённая по энергии вероятность выживания электронных нейтрино не может опускаться ниже 50%, см. формулу (C.22).

Отметим одну особенность, присутствующую в изложенном выше кратком анализе. При малом смешивании в вакууме,  $|\sin \theta| \ll 1$ , вероятность (C.31) того, что

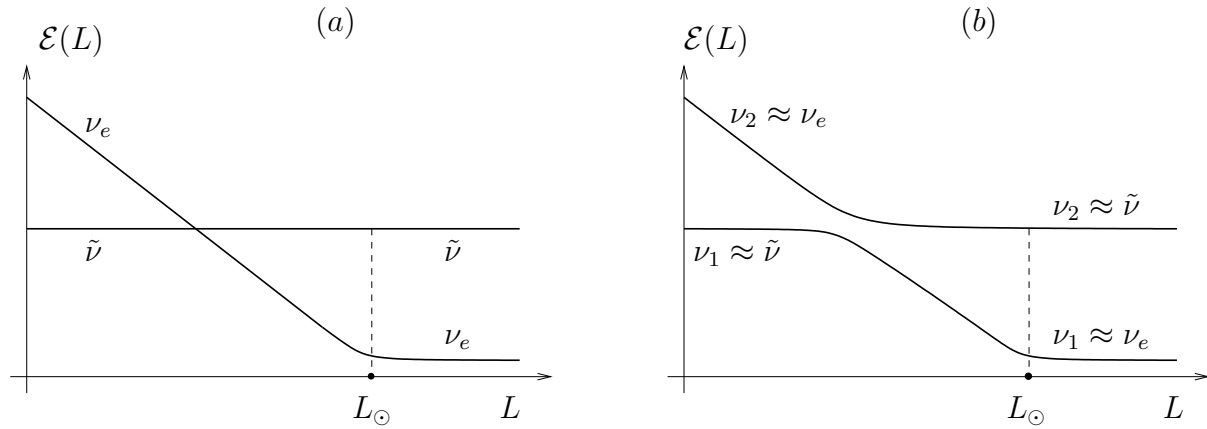


Рис. С.4: Эволюция уровней гамильтониана нейтрино при удалении от центра Солнца.

электронное нейтрино сохранит свой аромат, мала. В случае вакуумных осцилляций всё наоборот: из формулы (С.22) следует, что в вакууме  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = 1 - \mathcal{O}(\sin^2 2\theta)$ . Здесь мы имеем пример резонанса Михеева–Смирнова, приводящего к усилению нейтринных осцилляций в веществе. Он состоит в следующем. В отсутствие смешивания вектора  $|\nu_e\rangle$  и  $|\tilde{\nu}\rangle$  были бы собственными векторами оператора (С.31), причём в центре Солнца  $|\nu_e\rangle$  соответствовал бы большему собственному значению, а в вакууме — меньшему (здесь существенно, что рассматривается случай, когда в вакууме более лёгкое нейтрино — это в основном  $|\nu_e\rangle$ ). Движение уровней в зависимости от  $L$  имело бы вид, изображённый на рис. С.4а. Если включено малое смешивание, то уровни, как известно из квантовой механики, не пересекаются, и картина уровней становится такой, как изображено на рис. С.4б. Более тяжёлое нейтрино в центре Солнца почти совпадает с электронным нейтрино, а в вакууме — с линейной комбинацией  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$ . При адиабатической эволюции переходы с уровня на уровень не происходят, что и объясняет малую вероятность выживания электронного нейтрино, образовавшегося в центре Солнца, если  $\sin \theta$  конечен, но мал.

- ▷ **Задача 4.** Убедиться, что при малых  $\sin \theta$  собственные значения гамильтониана (С.29) действительно эволюционируют с  $L$  так, как изображено на рис. С.4б.
- ▷ **Задача 5.** Рассмотреть (нереалистичную) модель Солнца, в которой плотность свободных электронов  $n_e(L)$  изменяется линейно с  $L$  от своего значения в центре,  $6 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ , до нуля на границе (при  $L = L_\odot = 7 \cdot 10^5 \text{ км}$ ). В какой области параметров  $\Delta m_{21}^2$  и  $\sin \theta$  эволюция вектора состояния нейтрино с  $L$  действительно является адиабатической? Рассмотреть отдельно случаи слабого и сильного смешивания,  $|\sin \theta| \ll 1$  и  $|\sin \theta| \sim 1$ .

Отметим ещё, что MSW-эффект может приводить к целому ряду других особенностей в экспериментах с нейтрино, таких как эффект “день-ночь” (различие в измеряемых потоках солнечных нейтрино, проходящих ночью сквозь вещество Земли и не проходящих днём), различие в осцилляциях ускорительных нейтрино и анти-нейтрино, проходящих сквозь Землю и т.д.

Ещё раз подчеркнём, что для описания известных экспериментов хорошим приближением является приближение осцилляций между *двумя* типами нейтрино. В

случае атмосферных нейтрино и K2K — это оцилляции между  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$ , а для солнечных нейтрино и KamLAND — оцилляции между  $\nu_e$  и некоторой линейной комбинацией  $\nu_\mu$  и  $\nu_\tau$ . Возможность такого приближённого описания связана с большим различием между  $\Delta m_{atm}^2$  и  $\Delta m_{sol}^2$ , см. (С.24), (С.30); а также с малостью одного из углов смешивания, см. следующий раздел, формула (С.34).

### С.3 Значения параметров оцилляций

На рис. С.5 представлены области в пространстве параметров<sup>4</sup>  $\tan^2 \vartheta$  и  $\Delta m^2$ , раз-

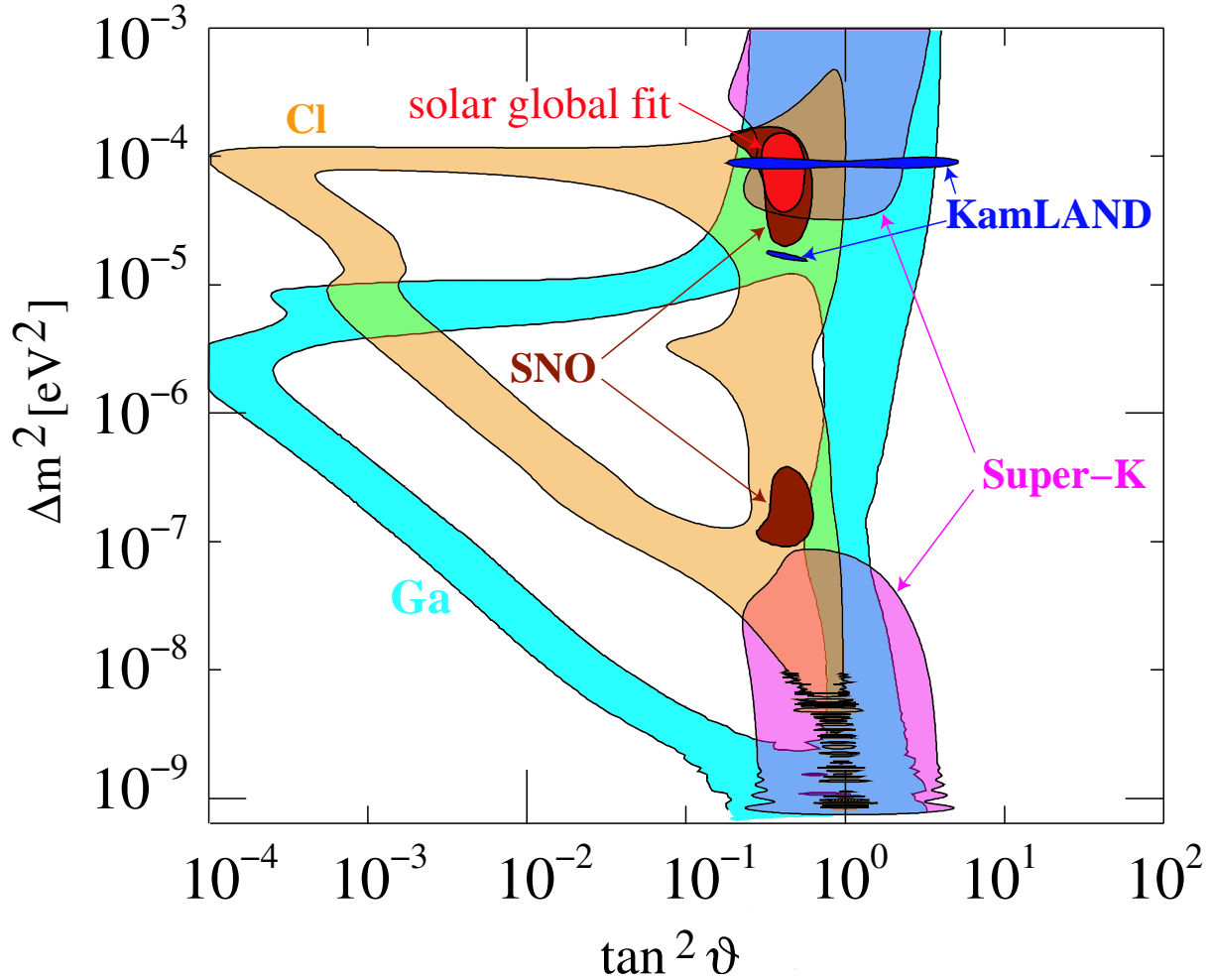


Рис. С.5: Экспериментально разрешённые области пространства параметров для  $\nu_e \leftrightarrow \tilde{\nu}$  оцилляций, следующие из экспериментов по солнечным нейтрино и из эксперимента KamLAND; линии с подписями Cl и Ga, KamLAND, SNO, Super-K показывают области, разрешённые на 90% и 95% уровне достоверности, соответственно [52].

разённые на 90% уровне достоверности (Cl) и на 95% уровне достоверности (Ga,

<sup>4</sup>Иногда вместо параметра  $\tan^2 \theta$  используют параметр  $\sin^2 2\theta$ . В случае вакуумных оцилляций именно последний является наиболее естественным параметром, см. формулу (С.22). В случае, когда существенны эффекты вещества, вероятность оцилляций не инвариантна относительно замены  $\theta \rightarrow \pi/2 - \theta$ , поэтому  $\sin^2 2\theta$  не является адекватным параметром.

KamLAND, SNO, Super-K) экспериментами по солнечным нейтрино и KamLAND. Видно, что все данные согласуются друг с другом в области  $\Delta m_{sol}^2 = (0.7 - 0.9) \cdot 10^{-4} \text{ эВ}^2$  и  $\text{tg}^2 \theta_{sol} = 0.3 - 0.6$ .

На рис. С.6 представлены аналогичные данные по атмосферным нейтрино и K2K.

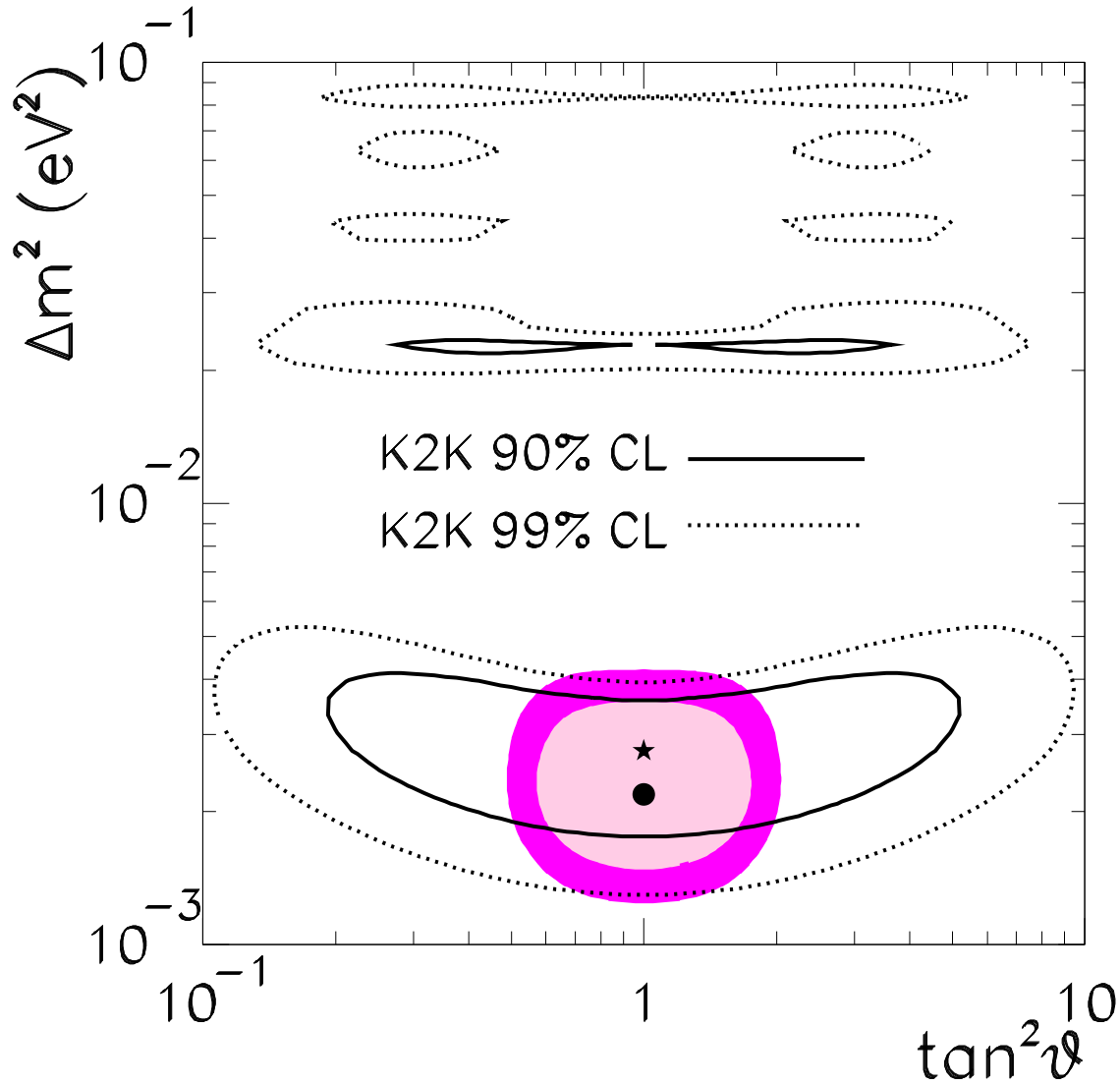


Рис. С.6: Экспериментально разрешённые области пространства параметров для  $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$  осцилляций [53]: обозначенные цветом области следуют из данных по атмосферным нейтрино (уровни достоверности 90% и 99%, чёрной точкой обозначено статистически наиболее вероятное значение осцилляционных параметров); показаны также области, следующие из результатов эксперимента K2K, звёздочкой отмечено статистически наиболее вероятное значение параметров осцилляций для совместного анализа двух наборов данных.

Здесь разрешённая область — это  $\Delta m_{atm}^2 = (1.6 - 3.6) \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2$ ,  $\text{tg}^2 \theta_{atm} = 0.5 - 2$ .

Следует упомянуть о ещё одном эксперименте, в котором, по утверждению авторов, обнаружен положительный эффект, обусловленный нейтринными осцилляциями. На этот раз речь идёт об осцилляциях  $\bar{\nu}_\mu \leftrightarrow \bar{\nu}_e$  и эксперименте LSND, в котором

изучался распад антимюонов в покое  $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ . На расстоянии около 30 метров измерялся поток электронных антинейтрино, для которого было зарегистрировано превышение над фоном. Интерпретация данного результата состоит в осцилляции мюонных антинейтрино от распадов антимюонов в электронные антинейтрино. Отметим, что похожий эксперимент KARMEN не обнаружил этих осцилляций, однако всё же пока осталась часть пространства осцилляционных параметров, для которой оба эксперимента не противоречат друг другу: это либо  $\Delta m_{LSND}^2 = (0.2 - 1) \text{ эВ}^2$ ,  $\sin^2 2\theta_{LSND} = (0.3 - 3) \cdot 10^{-2}$ , либо  $\Delta m_{LSND}^2 \simeq 7 \text{ эВ}^2$ ,  $\sin^2 2\theta_{LSND} \simeq 4 \cdot 10^{-3}$ . Поскольку статус  $\bar{\nu}_\mu \leftrightarrow \bar{\nu}_e$  осцилляций, заявленных экспериментом LSND, пока окончательно не определён, то на их основе пока преждевременно делать какие-либо серьёзные выводы. Тем не менее, стоит отметить, что если результаты LSND подтвердятся, то это будет означать, что массовых состояний в секторе нейтрино по крайней мере четыре. Действительно, в разностях квадратов масс  $\Delta m_{sol}^2$ ,  $\Delta m_{atm}^2$  и  $\Delta m_{LSND}^2$  видна сильная иерархия. В то же время, если массовых состояний только три, то сумма разностей квадратов масс, взятых с соответствующим знаком, должна быть равна нулю. С наблюдаемой иерархией этого достичь невозможно. Отметим, что в отличие от трёх нейтрино Стандартной модели, четвёртое нейтрино должно быть *стерильным*, т.е. не участвовать в электрослабых взаимодействиях. Если за счёт смешивания с обычными нейтрино четвёртое термализовано в ранней Вселенной, то оно может оказывать существенное влияние на формирование структур и на картину анизотропии реликтового излучения. Объяснение результатов эксперимента LSND моделью с термализующимся стерильным нейтрино закрыто из наблюдений структур и анизотропии реликтового излучения.

Если результаты эксперимента LSND не подтвердятся, то необходимости вводить четвёртое массовое состояние в сектор нейтрино не будет. Для описания результатов всех экспериментов по исследованию нейтринных осцилляций, кроме LSND, вполне достаточно трёх массовых состояний нейтрино  $|\nu_i\rangle$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Соответствующая  $3 \times 3$  матрица смешивания нейтрино носит название матрицы Понтекорво–Маки–Накагава–Саката (PMNS). Её удобно представить в следующем виде:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{21} & s_{12} & 0 \\ -s & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\delta_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  и  $\theta_{ij} \in [0, \pi/2]$ , причём последний множитель (фазы  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ) имеет смысл только для майорановской массовой матрицы нейтрино (см. следующий раздел); за исключением этих фаз количество параметров в матрице смешивания нейтрино такое же, как и в матрице смешивания кварков (см. раздел В.4). Экспериментальные результаты о параметрах осцилляций, представленные на рис. С.5 и С.6, соответствуют значениям модулей элементов матрицы смешивания ( $3\sigma$ -интервалы достоверности):

$$|U_{ij}| = \begin{pmatrix} 0.79 - 0.88 & 0.47 - 0.61 & < 0.18 \\ 0.19 - 0.52 & 0.42 - 0.73 & 0.58 - 0.82 \\ 0.20 - 0.53 & 0.44 - 0.74 & 0.56 - 0.81 \end{pmatrix}$$

или для углов смешивания  $\theta_{ij}$ :

$$0.28 \leq \tan^2 \theta_{12} \leq 0.60 \quad (\text{C.32})$$

$$0.5 \leq \tan^2 \theta_{23} \leq 2.1 \quad (\text{C.33})$$

$$\tan^2 \theta_{13} \leq 0.043 \quad (\text{C.34})$$



Отметим, что большинство элементов матрицы смешивания оказались одного порядка,  $U_{\alpha j} \sim 0.5$ . Эта “анархия” среди элементов матрицы смешивания нейтрино существенно отличает её от аналогичной матрицы смешивания кварков — матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскава (В.32), между элементами которой имеется заметная иерархия.

Обратим также внимание на то, что с учётом ограничений на угол смешивания  $\theta_{13}$  СР-нарушающие эффекты в секторе нейтрино ожидаются сильно подавленными.

Помимо элементов матрицы смешивания  $U_{\alpha j}$  из результатов, приведённых на рис. С.5 и С.6 определяются также разности квадратов масс ( $3\sigma$ -интервалы достоверности):

$$\begin{aligned} 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2 &\leq \Delta m_{21}^2 \equiv \Delta m_{sol}^2 \leq 9.3 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2 \\ 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 &\leq \Delta m_{32}^2 \equiv \Delta m_{atm}^2 \leq 3.6 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2 \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Такие значения можно получить для двух различных иерархий масс нейтрино (см. рис. С.7):

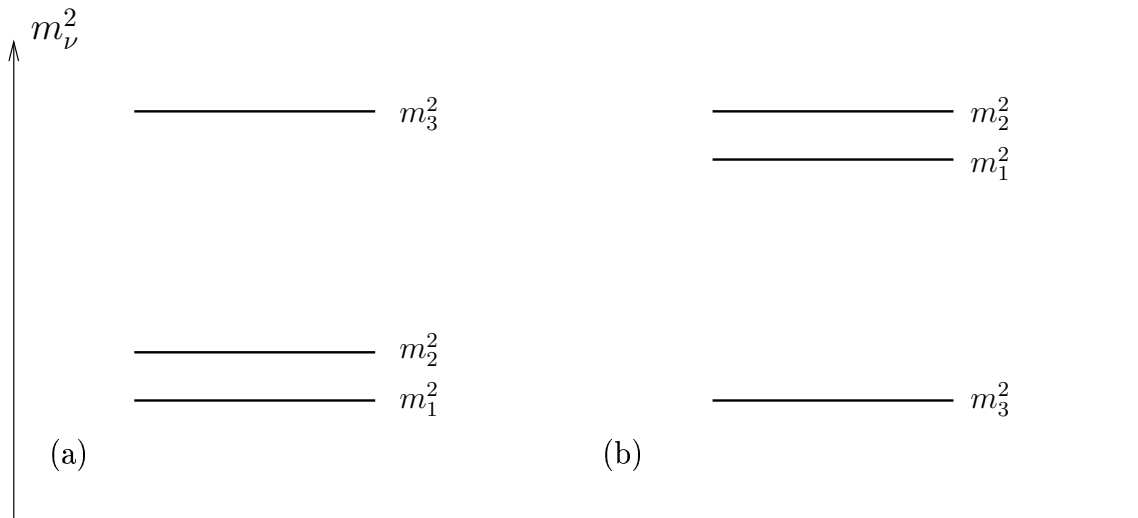


Рис. С.7: Прямая (а) и обратная (б) иерархии масс нейтрино.

нормальная:  $m_1 < m_2 \ll m_3$

обратная:  $m_3 \ll m_1 < m_2$

Какая из этих двух возможностей реализована в природе — пока неизвестно. В то же время, из (С.35) следует ограничение снизу на массы нейтрино: по крайней мере одно из них должно иметь массу

$$m \geq m_{atm} \equiv \sqrt{\Delta m_{atm}^2} \simeq 0.05 \text{ эВ} , \quad (\text{C.36})$$

а масса другого — не меньше

$$m_{sol} \equiv \sqrt{\Delta m_{sol}^2} \simeq 0.008 \text{ эВ} . \quad (\text{C.37})$$

Минимальная возможность состоит в том, что

$$m_1 \ll m_{sol} , \quad m_2 = m_{sol} , \quad m_3 = m_{atm} , \quad (\text{C.38})$$

(прямая иерархия без вырождения), но широко обсуждаются и другие возможности, включая случай достаточно тяжёлых нейтрино, почти вырожденных по массам,  $m_1, m_2, m_3 \gg m_{atm}$ .

## С.4 Дираковские и майорановские массы. Стерильные нейтрино.

Для фермионов в 3+1 мерном пространстве-времени существует два разных типа масс: майорановский и дираковский. Соответствующие лоренц-инвариантные массовые члены в лагранжиане для фермиона  $f$  имеют вид:

$$\mathcal{L}_f^M = \frac{m_M}{2} \bar{f}_L^c f_L + h.c. , \quad (C.39)$$

$$\mathcal{L}_f^D = m_D \bar{f}_R f_L + h.c. , \quad (C.40)$$

где зарядово-сопряжённый фермион  $f^c$  получен в результате действия оператора зарядового сопряжения  $\hat{C}$  на фермион  $f$ :

$$f^c \equiv \hat{C} f .$$

Фиксировав представление для  $\gamma$ -матриц Дирака, можно записать зарядово-сопряжённый 4-компонентный спинор  $f^c$  в явном виде (см. (B.34)):

$$f_k^c = C_{kl} \bar{f}_l^T , \quad k, l = 1, \dots, 4 , \quad (C.41)$$

причём элементы матрицы  $C$  зависят от представления  $\gamma$ -матриц.

Напомним, что 4-компонентный дираковский спинор  $f$  можно выразить в терминах 2-компонентных вейлевских спиноров  $\chi_L, \xi_R$  (см. раздел B.1 Приложения В). В вейлевском базисе для матриц Дирака связь между спинорами определяется соотношением

$$f = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix} .$$

Для фермионов, образующих массовые члены (C.39), (C.40), получим

$$f_L = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix} , \quad f_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_R \end{pmatrix} , \quad \bar{f}_L^c = (\chi_L^T i\sigma_2 , 0) .$$

Таким образом, в терминах вейлевских спиноров массовые члены (C.39) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^M &= \frac{m_M}{2} \chi_L^T i\sigma_2 \chi_L + h.c. , \\ \mathcal{L}_f^D &= m_D \xi_R^\dagger \chi_L + h.c. . \end{aligned}$$

Дираковский тип массы возможен только при наличии в теории как левых  $f_L$  так и правых  $f_R$  компонент фермиона  $f$ , в то время как для майорановской массы достаточно только левой (или только правой) компоненты. Все заряженные фермионы Стандартной модели имеют массу дираковского типа (см. Приложение В).

В состав Стандартной модели входят только левые компоненты нейтрино, поэтому её минимальное обобщение, приводящее к массивным нейтрино и не требующее дополнительных полей, состоит во введении майорановских массовых членов:

$$\mathcal{L}_\nu^M = \frac{m_{\alpha\beta}}{2} \bar{\nu}_{L\alpha}^c \nu_{L\beta} + h.c. , \quad (C.42)$$

где мы воспользовались калибровочным базисом для записи полей нейтрино. Массовая матрица лёгких нейтрино  $m_{\alpha\beta}$  симметрична, и её можно диагонализировать преобразованием  $m = U^T m^{diag} U$ , где  $U$  — унитарная матрица. Именно она является матрицей ПМНС в случае майорановских нейтрино.

▷ *Задача 6. Показать, что выражение*

$$\bar{\nu}_{L\alpha}^c \nu_{L\beta}$$

*симметрично по  $\alpha, \beta$ . Указание: учесть, что фермионные поля антикоммутируют.*

Поскольку майорановский массовый член перемешивает поле с его зарядово-сопряжённым, то понятия частицы и античастицы в отношении нейтрино становятся не вполне адекватными. Это, в частности, означает, что нельзя ввести понятие сохраняющегося лептонного числа для нейтрино, поскольку майорановская масса его явно нарушает: выражение (С.42) не инвариантно относительно фазовых вращений

$$\nu \rightarrow e^{i\alpha} \nu, \quad \bar{\nu} \rightarrow e^{-i\alpha} \bar{\nu}.$$

В случае ультрарелятивистских майорановских нейтрино собственными состояниями гамильтониана являются состояния с левой и правой спиральностью, причём с точностью до поправок, подавленных отношением  $m/E$ , состояния с левой спиральностью совпадают с состояниями нейтрино безмассовой теории, а состояния с правой спиральностью — с состояниями антинейтрино.

▷ *Задача 7. Проверить сделанное утверждение. Для этого обобщить уравнение Дирака на случай майорановской массы (С.39), найти его решения в терминах операторов рождения и уничтожения и сравнить с решениями безмассового уравнения для левых фермионов.*

▷ *Задача 8. Убедиться, что в ультрарелятивистском случае недиагональная майорановская масса (С.42) приводит к осцилляциям между состояниями только левой или только правой спиральности.*

Из результата последней задачи следует, что в случае майорановского массового члена возможны осцилляции  $\nu_\alpha \leftrightarrow \nu_\beta$ ,  $\bar{\nu}_\alpha \leftrightarrow \bar{\nu}_\beta$ , но не осцилляции  $\nu_\alpha \leftrightarrow \bar{\nu}_\beta$ , если под нейтрино и антинейтрино понимать левоспиральное и правоспиральное состояния, соответственно. При таком соглашении сохраняют смысл все результаты безмассовой теории, относящиеся к взаимодействиям нейтрино: например в  $\beta$ -распаде нейтрона  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$  образуется именно антинейтрино (состояние с правой спиральностью), а примесь состояния с левой спиральностью (нейтрино) подавлена степенью  $m_\nu/E_\nu$ .

Массовые члены (С.42) нельзя получить из какого-либо  $SU(3) \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ -инвариантного перенормируемого взаимодействия. Отказ от перенормируемости позволяет записать, например, взаимодействие вида

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\xi^{\alpha\beta}}{\Lambda_\nu} \bar{L}_\alpha \tilde{H} \cdot \tilde{H}^T L_\beta^c + h.c., \quad (C.43)$$

где мы опустили  $SU(2)$  групповые индексы и ввели безразмерные константы взаимодействия  $\xi^{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  — нумеруют поколения);  $\Lambda_\nu$  — энергетический масштаб

теории, обобщающей Стандартную модель физики частиц при высоких энергиях и приводящей к перенормируемому взаимодействию (С.43) при низких энергиях, поле  $\tilde{H}$  связано с полем  $H$  соотношением (В.10). В результате спонтанного нарушения электрослабой симметрии хиггсовское поле  $H$  приобретает ненулевое вакуумное среднее (см. Приложение В), поэтому взаимодействие (С.43) приводит, в частности, к появлению массовых членов

$$\frac{v^2}{2\Lambda_\nu} \xi^{\alpha\beta} \bar{\nu}_\alpha^c \nu_\beta + h.c. ,$$

что совпадает с (С.42).

Отметим, что при  $\xi^{\alpha\beta} \sim 1$  для обеспечения масс нейтрино порядка  $10^{-2}$  эВ масштаб нового взаимодействия должен быть порядка  $\Lambda_\nu \sim 10^{15}$  ГэВ. Этот масштаб близок к масштабу Большого объединения в суперсимметричных обобщениях Стандартной модели физики частиц, и на пару порядков меньше масштаба теории струн.

Неперенормируемое эффективное взаимодействие вида (С.43) может возникнуть из перенормируемого взаимодействия нейтрино с новыми тяжёлыми полями, аналогично тому, как возникает эффективное четырёх-фермионное взаимодействие в результате “отынтегрирования” массивных векторных бозонов Стандартной модели. Малость масс нейтрино по сравнению с массами остальных фермионов Стандартной модели требует большой иерархии между юкавскими константами полей Стандартной модели и константами нового взаимодействия  $y_{SM}^2 \gg \xi^{\alpha\beta}$  и/или между электрослабым масштабом и масштабом масс новых тяжёлых полей. В конкретных моделях эта иерархия может получить то или иное естественное объяснение.

Одно из объяснений даёт механизм качелей (see-saw). Рассмотрим для начала этот механизм на примере одного типа обычных нейтрино  $\nu$ . Это нейтрино является компонентой левого лептонного дублета  $L$  Стандартной модели. Пусть кроме этого дублета имеется ещё одно левое лептонное поле  $N_L$ , которое представляет собой синглет по отношению к калибровочной группе Стандартной модели  $SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y$  (эквивалентно можно считать, что добавлено правое поле  $N_L^c$ ). В отличие от известных полей Стандартной модели, поле  $N_L$  может иметь майорановскую массу  $M$ , никак не связанную с вакуумным средним поля Хиггса Стандартной модели; более того, естественно считать, что массовый масштаб  $M$  велик по сравнению с масштабом нарушения электрослабой симметрии, т.е.  $M \gg v$ . Замечательно, что калибровочная инвариантность Стандартной модели разрешает юкавское взаимодействие, включающее  $N_L$ ,  $\nu$  и хиггсовское поле  $H$  Стандартной модели. Итак, перенормируемый лагранжиан для полей  $N_L$  и  $L$  включает в себя слагаемые

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} \bar{N}_L^c N_L + y \bar{N}_L^c \tilde{H}^\dagger L + h.c. , \quad (C.44)$$

где  $y$  — юкавская константа связи. В результате нарушения электрослабой симметрии поле  $\tilde{H}^\dagger$  приобретает вакуумное среднее  $(v/\sqrt{2}, 0)$ , поэтому в лагранжиане возникают массовые члены

$$\mathcal{L}_m = \frac{M}{2} \bar{N}_L^c N_L + y \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{N}_L^c \nu + h.c. . \quad (C.45)$$

Объединяя фермионы с левой киральностью  $N_L$  и  $\nu$  в столбец

$$\psi = \begin{pmatrix} \nu \\ N_L \end{pmatrix} , \quad (C.46)$$

получим, что массовый член (С.45) можно записать в виде

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} \bar{\psi}^c m \psi + h.c. ,$$

где матрица  $m$  равна<sup>5</sup>

$$\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M \end{pmatrix} \quad (\text{С.47})$$

и

$$m_D = \frac{yv}{\sqrt{2}} .$$

При  $M \gg m_D$  собственные значения массовой матрицы (С.47) равны по абсолютной величине (знак массы фермиона несущественен)

$$\begin{aligned} m_\nu &= \frac{m_D^2}{M} = \frac{y^2 v^2}{2M} \\ m_N &= M , \end{aligned} \quad (\text{С.48})$$

(с поправками, подавленными отношением  $m_D/M$ ), причём меньшее собственное значение (С.48) соответствует собственному вектору

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m_D}{M} \end{pmatrix}$$

(вновь с малыми поправками). Из (С.44) видно, что главной компонентой этого вектора является обычное нейтрино  $\nu$ . Итак, в результате описанного механизма нейтрино приобретает майорановскую массу  $m_\nu$ , которая мала при  $M \gg v$  в соответствии с (С.48). Отметим, что при  $y = 10^{-6} - 1$  (значения известных юкавских констант в Стандартной модели) значение  $m_\nu \sim 10^{-2}$  эВ получается при

$$M \sim 10^3 - 10^{15} \text{ ГэВ} ,$$

т.е. условие  $M \gg m_D$  действительно выполняется.

Для дальнейшего полезно заметить, что результат (С.48) можно получить, “отынтегрировав” тяжёлое поле  $N_L$ . Запишем уравнение, которое получается варьированием лагранжиана по  $N_L$ . С учётом градиентного члена  $i\bar{N}_L \gamma^\mu \partial_\mu N_L$  в лагранжиане и массовых членов (С.45) получим

$$-i\partial_\mu \bar{N}_L \gamma^\mu + M \bar{N}_L^c + \frac{yv}{\sqrt{2}} \bar{\nu}^c = 0 .$$

При импульсах и энергиях, малых по сравнению с  $M$ , первое слагаемое в левой части пренебрежимо мало, и поле  $N_L$  алгебраически выражается через поле  $\nu$ ,

$$N_L = -\frac{yv}{\sqrt{2}M} \nu .$$

Это выражение можно подставить обратно в исходный лагранжиан и получить таким образом эффективный лагранжиан для поля  $\nu$ . При этом кинетический член

---

<sup>5</sup>Если вместо левого поля  $N_L$  использовать правое поле  $(N_L)^c$ , то второе слагаемое в (С.45) будет выглядеть как дираковский массовый член, в котором в качестве правой компоненты нейтрино выступает  $N_L^c$ . Отсюда и обозначение  $m_D$ , используемое в дальнейшем.

получает несущественную малую добавку, а главным эффектом является массовый член

$$\mathcal{L}_{m_\nu} = -\frac{y^2 v^2}{4M} \bar{\nu}^c \nu + h.c.$$

Видно, что майорановская масса нейтрино  $\nu$  действительно даётся формулой (С.48), с точностью до опущенного в (С.48) знака. Отметим ещё, что если вместо (С.45) в приведённом рассуждении использовать исходный лагранжиан (С.44), то эффективный лагранжиан после отынтегрирования тяжёлого поля  $N_L$  будет иметь вид (С.43) с  $\Lambda_\nu = M$  и  $\xi = y^2$ .

Перейдём теперь к случаю трёх типов нейтрино, реализующемуся в природе. В этом случае естественно ввести три типа полей  $N_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  (индекс  $L$  в дальнейшем опускается) и обобщить лагранжиан (С.44) следующим образом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \bar{N}_\alpha^c N_\beta + y_{\alpha\beta} \bar{N}_\alpha^c \tilde{H}^\dagger L_\beta + h.c.$$

Здесь  $M_{\alpha\beta}$  и  $y_{\alpha\beta}$  — матрицы  $3 \times 3$ , вообще говоря, комплексные, причём матрица  $M_{\alpha\beta}$  — симметричная. Базис в пространстве полей  $N_\alpha$  всегда можно выбрать так, чтобы матрица  $M_{\alpha\beta}$  была действительной и диагональной,

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3) .$$

В этом базисе поля  $N_\alpha$  описывают тяжёлые стерильные нейтрино с определённой массой. Эффективный массовый член лёгких нейтрино, возникающий благодаря нарушению электрослабой симметрии, проще всего построить, отынтегрировав тяжёлые поля  $N_\alpha$ . В результате получим для майорановского массового члена лёгких нейтрино выражение (С.42) с матрицей

$$m = -m_D M^{-1} m_D^T , \quad (\text{С.49})$$

где

$$m_{D\alpha\beta} = \frac{y_{\alpha\beta} v}{\sqrt{2}} .$$

В общем случае массы лёгких нейтрино и параметры их смешивания, входящие в матрицу ПМНС, нетривиальным образом зависят как от элементов диагональной матрицы  $M$ , так и от элементов матрицы юкавских констант  $y_{\alpha\beta}$ .

Обсудим теперь возможность того, что известные нейтрино имеют дираковские массы. Для получения дираковских масс нейтрино к полям Стандартной модели требуется добавить новые лёгкие поля  $\nu_{R\alpha}$  — правые компоненты нейтрино, тогда дираковский массовый член будет иметь вид

$$\mathcal{L}_\nu^D = m_{\alpha\beta} \bar{\nu}_{R\alpha} \nu_{L\beta} + h.c. , \quad (\text{С.50})$$

где опять использован калибровочный базис. Эти правые компоненты должны быть нейтральными (*стерильными*) относительно калибровочной группы Стандартной модели, иначе они давали бы вклад, например, в полную ширину распада  $Z$ -бозона, которая измерена с высокой точностью и согласуется с предсказанием Стандартной модели.

Поскольку дираковская масса инвариантна относительно операции зарядового сопряжения, то в рассматриваемой теории имеет смысл понятие лептонного числа: массовые члены (С.50), как и все слагаемые лагранжиана Стандартной модели, инвариантны относительно преобразований:

$$\nu_\alpha \rightarrow e^{i\xi} \nu_\alpha , \quad \bar{\nu}_\alpha \rightarrow e^{-i\xi} \bar{\nu}_\alpha .$$

Для диагональной матрицы  $m_{\alpha\beta}$  можно ввести лептонные числа для каждого из лептонных ароматов в отдельности. Наблюдаемые нейтринные осцилляции свидетельствуют о нарушении этих чисел, т.е. о недиагональности массовой матрицы  $m_{\alpha\beta}$ .

Массовые члены (С.50) могут возникнуть, например, за счёт перенормируемого юкавского взаимодействия

$$\mathcal{L} = \sum_{\alpha,\beta} y_{\alpha\beta} \bar{L}_\alpha \tilde{H} \nu_{R\beta} + h.c. , \quad (\text{С.51})$$

где использованы по-существу те же обозначения, что используются в Приложении В, индексы  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  нумеруют поколения. Юкавские константы  $y_{\alpha\beta}$  при этом должны быть чрезвычайно малы. В ряде обобщений Стандартной модели (например, в суперсимметричных теориях и моделях большого объединения) малость юкавских констант достигается естественным образом за счёт наличия в теории промежуточного (между планковским и электрослабым) энергетического масштаба, на котором появляется эффективное взаимодействие (С.51). В результате юкавские константы оказываются подавленными отношением (или степенью отношения) промежуточного и гравитационного масштабов. Иллюстрацией может служить взаимодействие с тяжёлым скалярным полем  $S$  — синглетом относительно калибровочной группы Стандартной модели,

$$\mathcal{L} = \frac{S}{M_{Pl}} \cdot \sum_{\alpha,\beta} Y_{\alpha\beta} \bar{L}_\alpha \tilde{H} \nu_{R\beta} + h.c. ,$$

где безразмерные константы  $Y_{\alpha\beta}$  можно считать порядка единицы. Если на некотором энергетическом масштабе  $\Lambda \ll M_{Pl}$  поле  $S$  приобретает ненулевое вакуумное среднее, то при более низких энергиях в теории появляется эффективное перенормируемое взаимодействие (С.51) с юкавскими константами порядка  $\Lambda/M_{Pl} \ll 1$ .

## С.5 Прямые поиски масс нейтрино

Современные прямые экспериментальные ограничения на массы нейтрино имеют вид [4]:

$$m_{\nu_e} < 2 \text{ эВ} , \quad (\text{С.52})$$

$$m_{\nu_\mu} < 0.19 \text{ МэВ} , \quad (\text{С.53})$$

$$m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ МэВ} . \quad (\text{С.54})$$

Эти ограничения справедливы вне зависимости от типа массы нейтрино. Для модели с майорановскими массами ограничение на комбинацию масс нейтрино, существенную для процессов двойного  $\beta$ -распада ядер (подробности см., например, в [4]) более сильное:

$$m_\nu < 0.35 \text{ эВ} .$$

Для сравнения отметим, что современное ограничение на сумму масс нейтрино, следующее из измерения анизотропии реликтового излучения и изучения структур во Вселенной, находится на уровне

$$\sum_i m_{\nu_i} < 0.4 - 1.0 \text{ эВ}$$

в зависимости от того, какие космологические параметры фиксируются из иных наблюдений.

Ожидается, что в ближайшее время чувствительность прямых лабораторных экспериментов к массе электронного нейтрино повысится до  $0.2\text{--}0.02$  эВ (в зависимости от типа массы). Точность космологических оценок (или ограничений) на сумму масс нейтрино также будет повышаться.



## Приложение D

# Квантовая теория поля при конечных температурах

В этом Приложении мы кратко рассмотрим метод вычисления некоторых величин (свободной энергии, эффективного потенциала, статических функций Грина) в квантовой теории поля при конечных температурах. Мы будем рассматривать наиболее интересный с точки зрения космологии случай нулевых химических потенциалов, хотя весь подход допускает соответствующее обобщение.

Начнём с общего замечания. Квантовую теорию поля иногда полезно воспринимать как квантовую механику большого, но конечного числа степеней свободы. Действительно, теорию поля можно регуляризовать, введя пространственную решётку с малым, но конечным шагом (ультрафиолетовая регуляризация) и рассматривая систему в трёхмерном ящике конечного, хотя и большого размера (инфракрасная регуляризация). При этом время удобно для наших целей считать непрерывным.<sup>1</sup> Тогда поля  $\phi(\mathbf{x}, t)$  станут функциями узла решётки<sup>2</sup> и времени,  $\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi(\mathbf{x}_n, t)$ , где  $\mathbf{x}_n$  — координаты узла решётки, нумеруемые дискретным индексом  $\mathbf{n}$ . При такой регуляризации число динамических координат  $\phi(\mathbf{x}_n, t)$  хотя и велико, но конечно, т.е. теория поля сводится к квантовой механике.

Мы будем пользоваться этим взглядом для получения формальных результатов.<sup>3</sup> А именно, мы разовьём температурную технику в квантовой механике, а затем прямо перенесём её в квантовую теорию поля.

### D.1 Бозонные поля: евклидово время и периодические граничные условия

Итак, рассмотрим квантовомеханическую систему с динамическими координатами  $\mathbf{q}$ . Для начала будем считать  $\mathbf{q}$  бозонными координатами, как обычно в квантовой механике. Пусть эта система находится при температуре  $T$ . Как известно из статистической физики, в состоянии термодинамического равновесия средние операторов

---

<sup>1</sup>В реальных численных расчётах на решётке время также дискретизуют. Нам в дальнейших рассуждениях это будет неудобно.

<sup>2</sup>Калибровочные поля естественно считать живущими на рёбрах решётки, а не на узлах. Для нас это несущественно.

<sup>3</sup>В связи с этим тонкие вопросы о снятии ультрафиолетовой и инфракрасной регуляризаций мы обсуждать не будем.

в фиксированный момент времени вычисляются по формуле

$$\langle \hat{O} \rangle_T = \frac{\text{Tr} \left( e^{-\beta \hat{H}} \hat{O} \right)}{\text{Tr} \left( e^{-\beta \hat{H}} \right)}, \quad (\text{D.1})$$

где оператор  $\hat{H}$  — это гамильтониан системы, параметр  $\beta$  равен

$$\beta = \frac{1}{T},$$

а след берётся по всем состояниям системы. Свободная энергия  $F$  определяется формулой

$$e^{-\beta F} = \text{Tr} \left( e^{-\beta \hat{H}} \right), \quad (\text{D.2})$$

Наша задача — найти удобное представление для правой части этого равенства.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы  $q$  и гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + V(\hat{q}). \quad (\text{D.3})$$

В качестве полного набора состояний в (D.3) выберем собственные состояния оператора  $\hat{q}$ , т.е. используем координатное представление. Тогда

$$e^{-\beta \hat{H}} = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle. \quad (\text{D.4})$$

Здесь, как и в дальнейшем, мы опустим численный множитель перед интегралом, который приводит лишь к общему сдвигу свободной энергии,  $F \rightarrow F + \text{const}$ . Нас будут интересовать средние типа (D.1), в которых эти множители сокращаются, а также разности свободных энергий для разных фаз, поэтому такой сдвиг для нас будет несущественен.

Получим представление для правой части (D.4) в виде функционального интеграла (см. подробнее, например, в [48]). Запишем

$$\begin{aligned} \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle &= \langle q | \prod_i e^{-\Delta \tau_i \hat{H}} | q \rangle \\ &= \langle q | \left( 1 - \Delta \tau_1 \cdot \hat{H} \right) | q \rangle \left( 1 - \Delta \tau_2 \cdot \hat{H} \right) | q \rangle \dots \langle q | \left( 1 - \Delta \tau_n \cdot \hat{H} \right) | q \rangle, \end{aligned}$$

где мы разбили отрезок длиной  $\beta$  на  $n$  малых отрезков длиной  $\Delta \tau_1, \dots, \Delta \tau_n$ ; нас будет интересовать предел  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta \tau_i \rightarrow 0$ . Вставим между каждыми скобками единицу и запишем

$$\begin{aligned} \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle &= \int \prod_{k=0}^n dq_k \delta(q_0 - q_n) \\ &\times \langle q_0 | \left( 1 - \Delta \tau_1 \cdot \hat{H} \right) | q_1 \rangle \langle q_1 | \left( 1 - \Delta \tau_2 \cdot \hat{H} \right) | q_2 \rangle \dots \langle q_{n-1} | \left( 1 - \Delta \tau_n \cdot \hat{H} \right) | q_n \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Далее, воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} \langle q' | V(\hat{q}) | q \rangle &= V(q) \delta(q' - q) = \int \frac{dp}{2\pi} V(q) e^{ip(q-q')}, \\ \langle q' | \frac{\hat{p}^2}{2} | q \rangle &= \int \frac{dp}{2\pi} \frac{p^2}{2} e^{ip(q-q')}. \end{aligned}$$

Опуская численный фактор, имеем для каждого сомножителя в (D.5)

$$\langle q_{k-1} | \left( 1 - \Delta\tau_k \cdot \hat{H} \right) | q_k \rangle = \int dp_k e^{ip_k(q_k - q_{k-1})} e^{-\left[\frac{p_k^2}{2} + V(q_k)\right] \Delta\tau_k}, \quad (\text{D.6})$$

где мы вновь записали

$$1 - \left( \frac{p_k^2}{2} + V(q_k) \right) \Delta\tau_k = e^{-\left[\frac{p_k^2}{2} + V(q_k)\right] \Delta\tau_k}.$$

Интеграл по  $dp_k$  в (D.6) гауссов и вычисляется, как обычно, сдвигом  $p_k \rightarrow p_k - i\dot{q}_k$ , где

$$\dot{q}_k = \frac{q_{k-1} - q_k}{\Delta\tau_k}.$$

В результате имеем

$$\langle q_{k-1} | \left( 1 - \Delta\tau_k \cdot \hat{H} \right) | q_k \rangle = e^{-\left[\frac{\dot{q}_k^2}{2} + V(q_k)\right] \Delta\tau_k}.$$

Подставляя это выражение в (D.5), получим в пределе  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\tau_i \rightarrow 0$  представление для свободной энергии в виде функционального интеграла

$$e^{-\beta F} = \int_{q(\beta)=q(0)} \mathcal{D}q e^{-S_E^{(\beta)}[q(\tau)]}, \quad (\text{D.7})$$

где

$$S_E^{(\beta)} = \int_0^\beta d\tau \left[ \frac{\dot{q}^2}{2} + V(q) \right], \quad (\text{D.8})$$

причём  $\dot{q} = dq/dt$ .

Поясним введённое обозначение.  $S_E$  представляет собой *евклидово* действие системы с гамильтонианом (D.1). Оно получается из исходного действия

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - V(q) \right]$$

формальной заменой

$$t = -i\tau, \quad (\text{D.9})$$

после чего  $\tau$  считается действительным. Точнее, при замене (D.9)  $S$  переходит в  $iS_E$ , так что

$$e^{iS} \rightarrow e^{-S_E}, \quad (\text{D.10})$$

Далее, в соответствии с (D.8) теория рассматривается на конечном интервале евклидова времени  $\tau$ , длина которого равна  $\beta \equiv T^{-1}$ . Наконец, функциональный интеграл (D.7) берётся по траекториям, *периодическим* с периодом  $\beta$ .

Представление (D.7) для свободной энергии интуитивно понятно. Оператор  $e^{-\beta\hat{H}}$  можно воспринимать как оператор эволюции  $e^{-i\hat{H}t_\beta}$  на мнимом (евклидовом) промежутке времени  $t_\beta = -i\beta$ . В соответствии с этим матричный элемент

$$\langle q_f | e^{-\beta\hat{H}} | q_i \rangle$$

представляется в виде функционального интеграла по траекториям в евклидовом времени, начинающимся в точке  $q = q_i$  и заканчивающимся в точке  $q = q_f$ . Из формулы (D.4) ясно, что существенными являются *периодические* траектории  $q_i = q_f = q$ , на которые не накладывается никаких других условий.

Изложенный вывод непосредственно обобщается на квантовую механику многих степеней свободы и, в соответствии со сказанным в начале раздела, на квантовую теорию любых *бозонных* полей. Обозначая все бозонные поля коллективным символом  $\phi$ , представление для свободной энергии запишем в виде, аналогичном (D.7),

$$e^{-\beta F} = \int \mathcal{D}\phi(\mathbf{x}, t) \cdot e^{-S_E^{(\beta)}[\phi(\mathbf{x}, t)]},$$

где интегрирование идёт по полевым конфигурациям, *периодическим*<sup>4</sup> в евклидовом времени  $\tau$  с периодом  $\beta$ , евклидово действие имеет вид

$$S_E^{(\beta)} = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}_E(\phi, \dot{\phi})$$

и получается из исходного действия формальной заменой  $\tau \rightarrow -i\tau$ ,  $iS \rightarrow -S_E$ , так же, как в (D.9), (D.10). Иначе говоря, евклидов лагранжиан  $\mathcal{L}_E$  в случае калибровочной теории со скалярными полями получается из исходного лагранжиана заменой метрики Минковского на евклидову метрику и изменением знака перед скалярным потенциалом и лагранжианом калибровочных полей. Схематически

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + D_\mu \phi^\dagger D_\mu \phi + V(\phi), \quad (\text{D.11})$$

где суммирование по четырёхмерным индексам  $\mu, \nu$  ведётся с евклидовой метрикой.

▷ *Задача 1.* Убедиться, что изложенная процедура получения евклидова действия действительно приводит к выражению (D.11), если исходный лагранжиан в пространстве Минковского имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda}^a F_{\nu\rho}^a + \eta^{\mu\nu} D_\mu \phi^\dagger D_\nu \phi - V(\phi),$$

где  $F_{\mu\nu}^a$  — напряжённость калибровочного поля, соответствующего некоторой калибровочной группе  $G$ , символ  $\phi$  обозначает все скалярные поля, преобразующиеся по некоторому (вообще говоря, приводимому и комплексному) представлению этой группы. Указание: сначала наложить калибровку  $A_0^a = 0$ , а затем восстановить калибровочную инвариантность уже в евклидовой формулировке.

## D.2 Фермионные поля: антипериодические условия

В случае фермионов представление для свободной энергии через функциональный интеграл нужно выводить заново. Мы ограничимся случаем действия, квадратичного по фермионным полям, хотя результат будет справедлив для общего случая.

<sup>4</sup>В случае неабелевых калибровочных теорий конфигурации должны быть периодичны с точностью до “больших” (топологически нетривиальных) калибровочных преобразований, см. [30]. Для нас эта тонкость будет несущественна.

Точнее, мы рассмотрим теории, в которых фермионная часть лагранжиана в пространстве Минковского имеет вид

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \bar{\psi}M\psi, \quad (\text{D.12})$$

где  $M$  включает в себя массу фермиона и взаимодействие с бозонными полями (например, в электродинамике  $M = m - e\gamma^\mu A_\mu$ ). Фермионных полей может быть несколько; обобщение на этот случай труда не представляет. Бозонные поля будем пока считать внешними и фиксированными.

Учитывая, что  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ , запишем лагранжиан (D.12) в виде

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger\partial_0\psi - H, \quad (\text{D.13})$$

где

$$H = -i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + \psi^\dagger\gamma^0M\psi. \quad (\text{D.14})$$

Из (D.13) видно, что  $p_\psi = i\psi^\dagger$  выступает в качестве обобщённого импульса, сопряжённого обобщённой координате  $\psi$ , а  $H$  — гамильтониан теории.

В отличие от бозонных полей, фермионные поля обладают *анти*коммутационными соотношениями; при равных временах

$$\begin{aligned} \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}', t)\} &= \{\psi^\dagger(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{x}', t)\} = 0, \\ \{\psi(\mathbf{x}, t), \psi^\dagger(\mathbf{x}', t)\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

Последнее равенство эквивалентно каноническому соотношению  $\{\psi(\mathbf{x}, t), p_\psi(\mathbf{x}', t)\} = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Если ввести пространственную решётку и конечный объём пространства, то мы придём к квантовой механике операторов, обладающих (в представлении Шредингера) антикоммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_m, \hat{\psi}_n\} &= \{\hat{\psi}_m^\dagger, \hat{\psi}_n^\dagger\} = 0, \\ \{\hat{\psi}_m, \hat{\psi}_n^\dagger\} &= \delta_{mn}, \end{aligned}$$

а дискретизация гамильтониана (D.14) приводит к гамильтониану типа

$$\hat{H} = \hat{\psi}_m^\dagger h_{mn} \hat{\psi}_n.$$

Наша задача — найти представление для  $\text{Tr} \left( e^{-\beta\hat{H}} \right)$  в такой теории в виде функционального интеграла.

Рассмотрим теорию с одним фермионным оператором  $\hat{\psi}$  и сопряжённым ему  $\hat{\psi}^\dagger$ . Они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}, \hat{\psi}\} &= \{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}^\dagger\} = 0, \\ \{\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger\} &= 1. \end{aligned}$$

Это — коммутационные соотношения для фермионных операторов рождения и уничтожения. Будем для определённости считать  $\hat{\psi}$  оператором рождения. Тогда пространство состояний имеет два базисных вектора  $|0\rangle, |1\rangle$ , такие что

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^\dagger|0\rangle &= |1\rangle, & \hat{\psi}|0\rangle &= 0, \\ \hat{\psi}^\dagger|1\rangle &= 0, & \hat{\psi}|1\rangle &= |0\rangle. \end{aligned}$$

Удобно реализовать пространство состояний как пространство функций от антикоммутирующей грассмановой переменной  $\psi$ , основное свойство которой — это нильпотентность,

$$\psi \cdot \psi = 0 . \quad (\text{D.15})$$

Сопоставим вектору  $|0\rangle$  числовую единицу, а вектору  $|1\rangle$  — функцию  $\Psi_1(\psi) = \psi$ . Тогда линейное пространство с двумя базисными векторами  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  эквивалентно пространству функций вида

$$\Psi(\psi) = \alpha + \beta\psi ,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — комплексные числа. В действительности все функции  $\Psi(\psi)$  имеют такой вид, в чём легко убедиться, записав разложение Тэйлора по  $\psi$  и воспользовавшись (D.15). Операторы  $\hat{\psi}$  и  $\hat{\psi}^\dagger$  действуют в этом пространстве следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{\psi}\Psi(\psi) &= \psi\Psi(\psi) , \\ \hat{\psi}^\dagger\Psi(\psi) &= \frac{\partial}{\partial\psi}\Psi(\psi) . \end{aligned}$$

Полезно эти формулы представить в интегральном виде. Введём интеграл Березина, написав по определению

$$\begin{aligned} \int d\psi &= 0 , \\ \int d\psi \cdot \psi &= 1 . \end{aligned}$$

Этих определений достаточно, чтобы найти интеграл от любой функции  $\Psi(\psi)$ . Нетрудно убедиться прямой подстановкой, что выполняются следующие соотношения

$$\Psi(\psi) = \int d\tilde{\psi} d\tilde{\psi}^\dagger e^{-\tilde{\psi}^\dagger(\psi-\tilde{\psi})} \Psi(\tilde{\psi}) , \quad (\text{D.16})$$

$$\hat{\psi}\Psi(\psi) = \int d\tilde{\psi} d\tilde{\psi}^\dagger e^{-\tilde{\psi}^\dagger(\psi-\tilde{\psi})} \tilde{\psi}\Psi(\tilde{\psi}) , \quad (\text{D.17})$$

$$\hat{\psi}^\dagger\Psi(\psi) = \int d\tilde{\psi} d\tilde{\psi}^\dagger e^{-\tilde{\psi}^\dagger(\psi-\tilde{\psi})} \tilde{\psi}^\dagger\Psi(\tilde{\psi}) , \quad (\text{D.18})$$

$$\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\Psi(\psi) = \int d\tilde{\psi} d\tilde{\psi}^\dagger e^{-\tilde{\psi}^\dagger(\psi-\tilde{\psi})} \tilde{\psi}^\dagger\tilde{\psi}\Psi(\tilde{\psi}) , \quad (\text{D.19})$$

где все переменные и дифференциалы  $\psi$ ,  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\psi}^\dagger$ ,  $d\tilde{\psi}$ ,  $d\tilde{\psi}^\dagger$  считаются антикоммутирующими между собой.

Теперь нетрудно записать функциональный интеграл для величины

$$\left( e^{-\beta\hat{H}}\Psi \right) (\psi)$$

и для гамильтониана вида  $\hat{H} = c\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$ . Поступим так же, как и в бозонном случае, и запишем

$$e^{-\beta\hat{H}}\Psi = \left( 1 - \hat{H}\Delta\tau_1 \right) \dots \left( 1 - \hat{H}\Delta\tau_n \right) \cdot \Psi .$$

Воспользовавшись формулами (D.16) и (D.19), получим

$$\begin{aligned} &\left( e^{-\beta\hat{H}}\Psi \right) (\psi) \\ &= \int \prod_{k=1}^n d\psi_k d\psi_k^\dagger e^{-\psi_1^\dagger(\psi-\psi_1)-H(\psi_1)\Delta\tau_1} \dots e^{-\psi_n^\dagger(\psi_{n-1}-\psi_n)-H(\psi_n)\Delta\tau_n} \Psi(\psi_n) . \end{aligned}$$

Полезно заметить, что, как и в бозонном случае,  $\psi_{k-1} - \psi_k = \dot{\psi}(\tau_k) \cdot \Delta\tau_k$  при малых  $\Delta\tau_k$ . В пределе  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta\tau_i \rightarrow 0$  отсюда получим представление в виде функционального интеграла

$$\left(e^{-\beta\hat{H}}\Psi\right)(\psi) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^\dagger e^{-S_E^{(\beta)}} \Psi(\psi_i), \quad (\text{D.20})$$

где

$$S_E^{(\beta)} = \int_0^\beta \left( \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + H(\psi^\dagger \psi) \right) d\tau.$$

Отметим, что функциональный интеграл в (D.19) включает интегрирования по  $\psi_i$  и  $\psi_i^\dagger$  в начальный “момент”  $\tau = 0$  (причём  $\psi_i = \psi(\tau = 0)$ ), но не включает интегрирование по  $\psi$  и  $\psi^\dagger$  в конечный “момент”  $\tau = \beta$ . Так же, как и в бозонном случае, евклидово действие  $S_E$  получается из исходного действия в реальном времени

$$S = \int dt (i\psi^\dagger \partial_t \psi - H)$$

формальной заменой  $t \rightarrow -i\tau$ ,  $iS \rightarrow -S_E$ .

Нам осталось выяснить, к каким граничным условиям приводит взятие следа. Запишем

$$\left(e^{-\beta\hat{H}}\Psi\right)(\psi) = \int d\psi_i U(\psi, \psi_i) \Psi(\psi_i), \quad (\text{D.21})$$

где

$$U(\psi, \psi_i) = - \int \mathcal{D}'\psi \mathcal{D}\psi^\dagger e^{-S_E^{(\beta)}},$$

а штрих означает, что по начальному  $\psi(\tau = 0) = \psi_i$  интегрирование не производится (оно оставлено в (D.21)). Запишем общее разложение функции двух грассмановых переменных

$$U(\psi, \psi_i) = u_0 + u_1\psi + u_{-1}\psi_i + u_2\psi\psi_i.$$

Получим

$$\begin{aligned} \int d\psi_i U(\psi, \psi_i) \cdot 1 &= u_{-1} - u_2\psi, \\ \int d\psi_i U(\psi, \psi_i) \cdot \psi_i &= u_0 - u_1\psi. \end{aligned}$$

На операторном языке это означает, что

$$\begin{aligned} e^{-\beta\hat{H}}|0\rangle &= u_{-1}|0\rangle - u_2|1\rangle, \\ e^{-\beta\hat{H}}|1\rangle &= u_0|0\rangle - u_1|1\rangle. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{Tr} \left( e^{-\beta\hat{H}} \right) = u_{-1} - u_1 = \int d\psi_i U(-\psi_i, \psi_i).$$

Итак, мы получили

$$\text{Tr} \left( e^{-\beta\hat{H}} \right) = \int_{\psi(\beta)=-\psi(0)} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\psi^\dagger e^{-S_E^{(\beta)}},$$

т.е. интегрирование ведётся по грассмановым траекториям с *антипериодическими* граничными условиями для  $\psi(\tau)$  на интервале  $(0, \beta)$ . Переменную  $\psi^\dagger(\tau)$  можно также считать антипериодической: на отрезке  $(0, \beta)$  любая  $\psi^\dagger(\tau)$  представима в виде суммы периодической и антипериодической функций, а периодическая часть не даёт вклада в  $S_E^{(\beta)}$ , поскольку интегрируется с антипериодической  $\psi(\tau)$ .

Весь этот вывод переносится на системы со многими фермионными степенями свободы, и, соответственно, на теорию фермионных полей. При этом существенную роль играют неиспользованные выше соотношения (D.17) и (D.18). Хотя при нашем выводе мы считали бозонные поля внешними, нетрудно понять, что это в действительности ограничением не является: в интеграле по бозонным и фермионным полям можно рассматривать интеграл по фермионам как внутренний (в нём бозонные поля будут фиксированы), а затем интегрировать по бозонным полям. Итак, свободная энергия даётся интегралом

$$e^{-\beta F} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\psi^\dagger \mathcal{D}\psi e^{-S_E^{(\beta)}} \equiv Z, \quad (\text{D.22})$$

где  $S_E^{(\beta)}$  — евклидово действие теории на отрезке  $(0, \beta)$ , причём бозонные поля  $\phi$  удовлетворяют периодическим, а фермионные  $\psi, \psi^\dagger$  — антипериодическим граничным условиям на этом отрезке.

Отметим в заключение этого раздела, что изложенный формализм можно обобщить на случай ненулевого химического потенциала. В общем случае химический потенциал вводится тогда, когда в среде имеется ненулевая плотность сохраняющегося (при данной температуре) квантового числа; в космологическом контексте наибольший интерес представляют барионное и лептонные числа. Соответствующие операторы имеют структуру типа

$$Q = \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma^0 \psi.$$

Учёт ненулевого среднего от плотности  $n = \bar{\psi} \gamma^0 \psi$  сводится к добавлению в эффективный гамильтониан слагаемого  $(-\mu Q)$ , т.е.

$$H_{eff} = H - \mu Q, \quad (\text{D.23})$$

где  $\mu$  — химический потенциал. В рассматриваемом формализме это приводит к изменению евклидова действия,

$$S_E^{(\beta)} \rightarrow S_E^{(\beta)} - \mu \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma^0 \psi \quad (\text{D.24})$$

в формуле (D.22). В этом случае для величины  $F(T, \mu)$  используют термин “большой термодинамический потенциал”.

## D.3 Теория возмущений

Изложенный в разделах D.1, D.2 подход полезен для вычисления свободной энергии, эффективного потенциала  $V_{eff}(T, \phi)$ , введённого в Главе 10, а также статических функций Грина. Последние характеризуют отклик системы на не зависящее от времени внешнее воздействие. Например, пусть в теории с квантовым полем  $\hat{\Psi}$



введён статический источник  $J(\mathbf{x})$ . Это означает, что гамильтониан модифицируется следующим образом

$$H \rightarrow H - \int J(\mathbf{x}) \hat{\Psi}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \equiv H_J ,$$

где  $\Psi(\mathbf{x})$  — шредингерово поле. Статистическая сумма в присутствии этого источника,

$$Z_J = e^{-\beta F_J} = \text{Tr} (e^{-\beta H_J}) ,$$

представляется в виде функционального интеграла (D.22), а её разложение по степеням  $J$  имеет своими коэффициентами статические функции Грина

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi e^{-S^{(\beta)}[\phi]} \\ &\times \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_1 \phi(\mathbf{x}_1, \tau_1) \times \dots \times \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_n \phi(\mathbf{x}_n, \tau_n) \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

(нормировка со статсуммой без источника и факторы  $\frac{1}{\beta}$  введены для удобства), индекс  $E$  в обозначении для евклидова действия здесь и в дальнейшем опускаем.

Простой пример — среднее поле, возникшее в среде благодаря введению статического источника

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle_J = \frac{\text{Tr} (e^{-\beta H_J} \phi(\mathbf{x}))}{\text{Tr} (e^{-\beta H_J})} .$$

В низшем порядке по  $J$  оно равно

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle_J = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) J(\mathbf{y}) d\mathbf{y} .$$

Отличие  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  от свободного пропагатора теории при нулевой температуре соответствует модификации закона Кулона или закона Юкавы в присутствии среды.

Отметим, что статические корреляторы (D.25) далеко не исчерпывают всех интересных классов функций Грина. Техника вычислений корреляторов при разных временах (например, метод Келдыша) достаточно сложна, но она нам не понадобится.

Обобщая (D.25), будем рассматривать евклидовы функции Грина

$$G(\mathbf{x}_1, \tau_1; \dots; \mathbf{x}_n, \tau_n) = Z^{-1} \int \mathcal{D}\Phi e^{-S^{(\beta)}[\Phi]} \Phi(\mathbf{x}_1, \tau_1) \dots \Phi(\mathbf{x}_n, \tau_n) , \quad (\text{D.26})$$

где  $\Phi$  обозначает все поля, имеющиеся в теории, интегрирование ведётся по бозонным и фермионным полям, периодическим и антипериодическим на интервале  $[0, \beta]$ , соответственно. Нормировочный фактор  $Z$  даётся аналогичным интегралом, см. (D.22).

Исходя из представления (D.26), несложно построить диаграммную технику для вычислений по теории возмущений, аналогичную фейнмановской технике в теориях при нулевой температуре. Как обычно, рассмотрим сначала свободные теории с источниками. В скалярном и фермионном случаях выражения для квадратичных действий имеют вид

$$S_\varphi^{(\beta)} = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + \frac{m^2}{2} \varphi^2 - J_\varphi \varphi \right] , \quad (\text{D.27})$$

$$S_\psi^{(\beta)} = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} [\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + m \bar{\psi} \psi - \bar{J}_\psi \psi - \bar{\psi} J_\psi] . \quad (\text{D.28})$$

Здесь  $x^0 \equiv \tau$ , суммирование ведётся с евклидовой метрикой, а евклидовы  $\gamma$ -матрицы эрмитовы и удовлетворяют соотношению  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \delta^{\mu\nu}$ .

▷ **Задача 2.** Убедиться, что евклидово действие свободного дираковского поля с источником имеет вид (D.28).

Поскольку поле  $\phi$  периодически по  $\tau$  с периодом  $\beta$ , источник  $J_\varphi(\mathbf{x}, \tau)$  тоже можно считать периодичным. Наоборот,  $J_\psi$  и  $\bar{J}_\psi$  антипериодичны.

Функциональный интеграл (D.22) для квадратичного действия с источником (D.27) гауссов и вычисляется сдвигом  $\varphi(\mathbf{x}, \tau) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}, \tau) + \varphi_c(\mathbf{x}, \tau)$ , где  $\varphi_c(\mathbf{x}, \tau)$  удовлетворяет на интервале  $0 \leq \tau \leq \beta$  уравнению

$$-\partial_\mu \partial_\mu \varphi_c + m^2 \varphi_c = J_\varphi, \quad (\text{D.29})$$

причём  $\varphi_c$  должно быть периодически по  $\tau$  с периодом  $\beta$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi_c(\mathbf{x}, \tau) = \int_0^\beta d\tau' \int d^3\mathbf{x}' D(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', \tau') J_\varphi(\mathbf{x}', \tau'),$$

где  $D$  — свободный пропагатор при конечной температуре. С учётом периодичности  $J_\varphi$  нетрудно видеть, что уравнение (D.29) и условие периодичности для  $\varphi_c$  удовлетворяются, если свободный пропагатор имеет вид

$$D(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', \tau') = \frac{1}{(2\pi)^3 \beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int d^3\mathbf{p} \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + i\omega_n(\tau-\tau')}}{\mathbf{p}^2 + \omega_n^2 + m^2},$$

где

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \quad (\text{D.30})$$

— мацубаровские частоты бозонных полей, нумеруемые целыми числами  $n = 0, \pm 1, \dots$ . В отличие от теории поля при нулевой температуре здесь частоты образуют *дискретный* набор.

Свободный пропагатор векторного поля строится аналогичным образом и тоже является суммой по частотам (D.30).

В случае фермионного поля уравнение, аналогичное (D.29), выглядит следующим образом

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi_c + m \psi_c = J_\psi,$$

причём как  $J_\psi(\mathbf{x}, \tau)$ , так и решение  $\psi_c(\mathbf{x}, \tau)$  антипериодичны по  $\tau$  с периодом  $\beta$ . Решением этого уравнения служит

$$\psi_c(\mathbf{x}, \tau) = \int_0^\beta d\tau' \int d^3\mathbf{x}' S(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', \tau') J_\psi(\mathbf{x}', \tau'),$$

где свободный пропагатор равен

$$S(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}', \tau') = \frac{1}{(2\pi)^3 \beta} \sum_{n' = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots} \int d^3\mathbf{p} \frac{-i\gamma^0 \omega_{n'} - i\boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + m}{\mathbf{p}^2 + \omega_{n'}^2 + m^2} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + i\omega_{n'}(\tau-\tau')}. \quad (\text{D.31})$$

Здесь

$$\omega_{n'} = \frac{2\pi n'}{\beta}, \quad n' = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots \quad (\text{D.32})$$

— мацубаровские частоты для фермионного случая. То, что  $n'$  пробегает *полуцелые* значения, связано, разумеется, с антипериодичностью фермионных полей.

Дальнейшее развитие диаграммной техники происходит так же, как в (евклидовой) теории поля при нулевой температуре. Выражения для вершин взаимодействия в теориях при  $T = 0$  и  $T \neq 0$  совпадают. Из-за того, что интегрирование по  $d\tau$  в действии идёт от нуля до  $\beta$ , вместо  $\delta$ -функции сохранения энергии в каждой вершине возникает множитель

$$\beta \delta \left( \sum \omega \right), \quad (\text{D.33})$$

где  $\sum \omega$  — сумма мацубаровских частот всех входящих линий (частот (D.30) для бозонных линий и частот (D.32) для фермионных), а функция  $\delta(\sum \omega)$  принимает значение единица, если  $\sum \omega = 0$ , и нуль во всех остальных случаях.

Отметим, что включение химического потенциала приводит, в соответствии с (D.24), к замене  $\partial_0 \rightarrow \partial_0 - \mu$  в действии (D.28). Соответствующее изменение свободного фермионного пропагатора (D.31) состоит в замене

$$\omega_{n'} \rightarrow \omega_{n'} + i\mu$$

в предэкспоненте под интегралом в (D.31), при этом в экспоненте  $\exp(i\omega_{n'}(\tau - \tau'))$  остаются сами мацубаровские частоты.

## D.4 Однопетлевой эффективный потенциал

В качестве первого примера получим в рамках изложенной в разделах D.1, D.2 техники выражение (10.16) для вкладов частиц различных типов в эффективный потенциал. Наша задача — вычислить свободную энергию как функцию внешнего однородного скалярного поля  $\phi$  в пренебрежении взаимодействием между частицами среды. Воспользуемся формулой (D.22) для свободной энергии. В указанном приближении действие  $S^{(\beta)}$  (индекс  $E$  по-прежнему опускаем) квадратично по квантовым полям, а внешнее поле  $\phi$  входит в него только через массы частиц. Интеграл (D.22) факторизуется на произведение интегралов по различным полям, так что свободная энергия действительно имеет структуру (10.14).

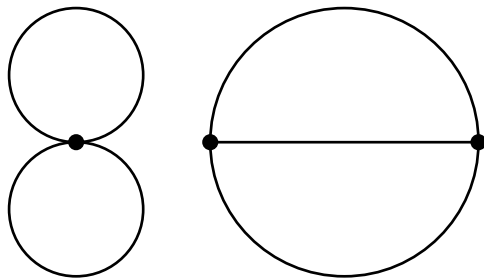


Рис. D.1: Схематическое изображение диаграмм, дающих вклад в эффективный потенциал в низших нетривиальных порядках теории возмущений по константе связи.

Отметим, что в рамках теории возмущений по константам связи в следующих порядках эффективный потенциал будет даваться диаграммами без внешних линий, в которых массы и вершины зависят от внешнего поля  $\phi$ . Простейшие из таких диаграмм схематически изображены на рис. D.1. Эти диаграммы начинаются с двух петель. Поэтому рассматриваемое нулевое приближение по константам связи в излагаемом формализме естественно назвать однопетлевым.

Возвращаясь к однопетлевому приближению, рассмотрим для примера вклад скалярного поля, действие которого даётся формулой (D.27) с  $J_\varphi = 0$ . Интеграл по  $\varphi$  типа (D.22) — гауссов и равен

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-S^{(\beta)}[\phi]} = [\text{Det}(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2)]^{-1/2},$$

где  $m^2 = m^2(\phi)$ , а детерминант можно понимать как произведение собственных значений оператора  $(-\partial_\mu \partial_\mu + m^2)$ , причём собственные функции должны быть периодичны по  $\tau$  с периодом  $\beta$ . Если поместить систему в пространственный ящик большого размера  $L$ , то собственные значения указанного оператора будут равны

$$\lambda_{n,n_1,n_2,n_3} = \mathbf{p}^2 + \omega_n^2 + m^2 ,$$

где

$$\mathbf{p} = \left( \frac{2\pi n_1}{L}, \frac{2\pi n_2}{L}, \frac{2\pi n_3}{L} \right) , \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} , \quad (\text{D.34})$$

а  $\omega_n$  — мацубаровские частоты (D.30). Таким образом, вклад в свободную энергию равен

$$F_\varphi = \sum_n \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\mathbf{p}^2 + \omega_n^2 + m^2}{\Lambda^2} \right] ,$$

где обезразмеривающий параметр  $\Lambda$  приводит лишь к общему сдвигу свободной энергии, и поэтому нам несущественен. В пределе большого  $L$

$$\sum_{n_1, n_2, n_3} \rightarrow L^3 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} ,$$

так что свободная энергия действительно пропорциональна объёму, а вклад в эффективный потенциал равен

$$f_\varphi = \frac{1}{2\beta} \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[ \frac{\mathbf{p}^2 + \omega_n^2 + m^2}{\Lambda^2} \right] . \quad (\text{D.35})$$

Удобно вычислять не сам этот вклад, а его производную по  $m^2$  (вкладом, не зависящим от  $m^2$ , т.е. от среднего поля  $\phi$ , не интересуемся),

$$\frac{\partial f_\varphi}{\partial m^2} = \frac{1}{2\beta} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_n \frac{1}{\mathbf{p}^2 + \omega_n^2 + m^2} .$$

Для вычисления суммы по всем целым  $n$  заметим, что её можно представить в виде

$$\sum_{n=0, \pm 1, \dots} u(n) = \frac{1}{2i} \oint \text{ctg}(\pi z) u(z) dz , \quad (\text{D.36})$$

где интегрирование идёт по замкнутому контуру в комплексной плоскости, обходящему действительную ось против часовой стрелки, см. рис. D.2a. Для доказательства формулы (D.37) достаточно заметить, что  $\text{ctg} \pi z$  имеет полюса при целых  $z = 0, \pm 1, \dots$  с вычетами, равными  $\pi^{-1}$ . В нашем случае

$$u(z) = \left[ \mathbf{p}^2 + \left( \frac{2\pi}{\beta} z \right)^2 + m^2 \right]^{-1} . \quad (\text{D.37})$$

Поскольку  $u(z)$  имеет особенности (полюса) только на мнимой оси, контур интегрирования в (D.37) можно продеформировать так, как изображено на рис. D.2b. В результате вклад в интеграл дают два полюса

$$z = \pm \frac{i\beta}{2\pi} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} ,$$

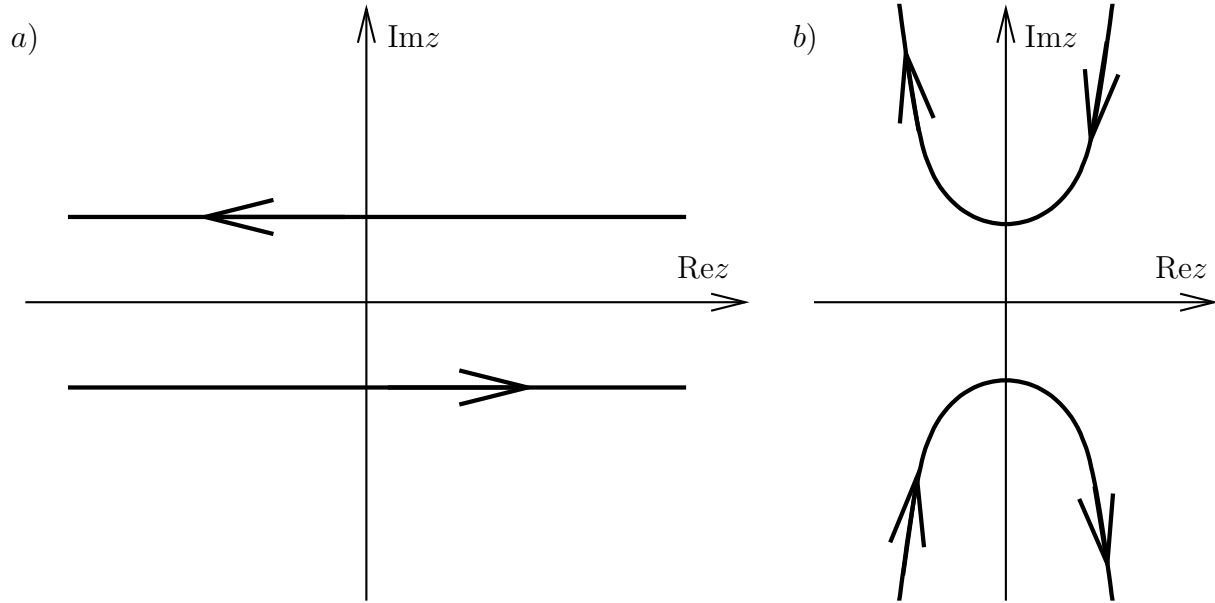


Рис. D.2: а) Контур интегрирования, фигурирующий в (D.36); б) Деформированный контур.

и мы получаем

$$\frac{\partial f_\varphi}{\partial m^2} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \text{cth} \left[ \frac{\beta}{2} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \right] .$$

Это выражение можно представить в виде

$$\frac{\partial f_\varphi}{\partial m^2} = \frac{\partial f_\varphi(T=0)}{\partial m^2} + \frac{\partial f_\varphi^{(T)}}{\partial m^2} ,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\varphi(T=0)}{\partial m^2} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \\ &= \frac{\partial}{\partial m^2} \left[ \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

не зависит от температуры, а температурный вклад равен

$$\frac{\partial f_\varphi^{(T)}}{\partial m^2} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{T}} - 1} . \quad (\text{D.39})$$

Вклад (D.38) в эффективный потенциал при нулевой температуре — это просто сумма энергий нулевых колебаний осцилляторов поля  $\varphi$ ,

$$f_\varphi(T=0) = \frac{1}{L^3} \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} , \quad (\text{D.40})$$

где мы для наглядности вернулись к теории в конечном пространственном объёме; импульс  $\mathbf{p}$  даётся формулой (D.34). Этот вклад для нас интереса сейчас не пред-

ставляет, хотя он при определённых соотношениях между константами связи может приводить к интересным следствиям в теориях при нулевой температуре.<sup>5</sup>

Вклад (D.39), существенный при конечных температурах, в точности соответствует бозонному интегралу (10.16) с  $g_i = 1$  (поскольку мы рассматриваем одно вещественное скалярное поле  $\varphi$ ). Действительно, он равен

$$\frac{\partial f_\varphi^{(T)}}{\partial m^2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{T}} - 1}. \quad (\text{D.41})$$

С другой стороны, производная по  $m^2$  интеграла (10.16) равна

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty k^4 dk \frac{\partial}{\partial m^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{T}} - 1} \right] \\ & = -\frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty k^4 dk \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k} \left[ \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{T}} - 1} \right], \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

что совпадает с (D.41) после интегрирования по частям.

Вычисление с помощью изложенной в этом Приложении техники вклада фермионов в однопетлевой температурный эффективный потенциал вполне аналогично вышеприведённому. Для теории с действием (D.28) с  $J_\psi = \bar{J}_\psi = 0$  функциональный интеграл (D.22) равен

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_\psi^{(\beta)}} = \text{Det} [\gamma^\mu \partial_\mu + m(\phi)],$$

причём собственные функции евклидова оператора Дирака должны быть антипериодичны по  $\tau$  с периодом  $\beta$ . Для фиксированного трёхмерного импульса  $\mathbf{p}$  и мацубаровской частоты (D.32) имеется два собственных значения оператора Дирака,

$$\lambda_\pm = m \pm i\sqrt{\mathbf{p}^2 + \omega_{n'}^2},$$

причём имеется две собственных функции для каждого из них. В результате для каждого импульса имеем фактор в детерминанте  $(\lambda_+ \lambda_-)^2$ , так что вместо (D.35) получим

$$f_\psi = -\frac{2}{\beta} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{n'=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots} \ln \left[ \frac{\mathbf{p}^2 + \omega_{n'}^2 + m^2}{\Lambda^2} \right].$$

Подчеркнём, что отличие в знаке по сравнению с (D.35) связано с тем, что мы имеем дело с фермионами. При вычислении  $\partial f_\psi / \partial m^2$  встречается сумма по полуцелым  $n'$ , которую можно представить в виде

$$\sum_{n'=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots} u(n') = \frac{1}{2i} \oint \text{tg}(\pi z) u(z) dz, \quad (\text{D.43})$$

где контур интегрирования совпадает с изображённым на рис. D.2, а  $u(z)$  по-прежнему даётся формулой (D.37). Дальнейшее вычисление по существу повторяет выкладку

<sup>5</sup>Нуль-температурный однопетлевой вклад (D.40) ультрафиолетово расходится. Эта расходимость устраняется обычной перенормировкой массы и константы самодействия хиггсовского поля  $\phi$ .

для скалярного поля, и вклад фермионов также распадается на нуль-температурную и конечнотемпературную части, причём

$$f_\psi(T=0) = -2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$$

представляет собой вклад моря Дирака (двукратно вырожденных для каждого  $\mathbf{p}$  состояний с отрицательной энергией  $(-\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$ ), а

$$\frac{\partial f_\psi^{(T)}}{\partial m^2} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{2}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}{T}} + 1},$$

что совпадает с производной от фермионного интеграла (10.16) с учётом того, что суммарное число спиновых состояний фермиона и антифермиона равно  $g = 4$ .

Итак, в рамках рассматриваемого в этом Приложении формализма различие в функциях распределения бозонов и фермионов проявляется главным образом в различии между мацубаровскими частотами (D.30) и (D.32). В разделе 10.3 мы обсуждаем, насколько важно это различие с точки зрения инфракрасных свойств теории при высоких температурах.

▷ *Задача 3. В однопетлевом приближении найти большой термодинамический потенциал фермионной среды и плотность фермионного числа  $Q$  в среде с химическим потенциалом  $\mu$ . Рассмотреть предельные случаи  $T \gg \mu \gg m$  и  $T \ll \mu$ . Указание: использовать вытекающее из (D.23) свойство*

$$\frac{\partial F(\mu, T)}{\partial \mu} = -\langle Q \rangle_{T, \mu}.$$

## D.5 Дебаевская экранировка

В качестве второго примера рассмотрим однопетлевой вклад  $\Pi_{\mu\nu}$  в поляризационный оператор фотона при конечных температурах в квантовой электродинамике, рис. D.3. Как обычно, он модифицирует пропагатор фотона

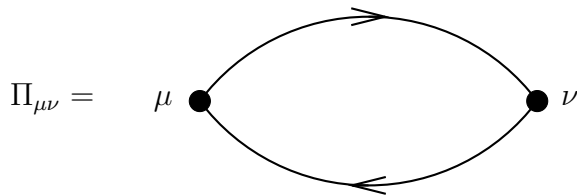


Рис. D.3: Однопетлевой поляризационный оператор фотона.

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} \rightarrow [\mathcal{D}_{\mu\nu}^{-1} + \Pi_{\mu\nu}]^{-1}.$$

Мы рассмотрим статический пропагатор, см. (D.25), поэтому нас будет интересовать поляризационный оператор при нулевой мацубаровской частоте, т.е.

$$\Pi_{\mu\nu}(\mathbf{p}) = \Pi_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \omega_n = 0).$$

Иными словами, искомый вклад модифицирует статические уравнения Максвелла, которые (в импульсном представлении) приобретают в среде вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^2 A_0 + \Pi_{00} A_0 + \Pi_{0i} A_i &= j_0, \\ \mathbf{p}^2 A_i - p_i \mathbf{p} \mathbf{A} + \Pi_{i0} A_0 + \Pi_{ik} A_k &= j_i, \end{aligned}$$

где  $j_\mu(\mathbf{p})$  — не зависящие от времени плотность заряда и плотность тока.

Прежде чем производить вычисление, заметим, что в силу калибровочной инвариантности электродинамики, которая имеет место и в присутствии среды, поляризационный оператор  $\Pi_{\mu\nu}(\mathbf{p}, \omega_n)$  должен быть поперечным,

$$p_\mu \Pi_{\mu\nu} = 0 ,$$

где  $p^\mu = (\omega_n, \mathbf{p})$ . В присутствии среды Лоренц-инвариантность не имеет места, но симметрия относительно пространственных вращений сохраняется. Поэтому общая структура поляризационного оператора такова:

$$\begin{aligned} \Pi_{00} &= \Pi^{(E)} , \\ \Pi_{i0} &= -\frac{p_i p_0}{\mathbf{p}^2} \Pi^{(E)} , \\ \Pi_{ij} &= \frac{p_i p_j p_0^2}{\mathbf{p}^4} \Pi^{(E)} + \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right) \Pi^{(M)} , \end{aligned}$$

где “электрический” и “магнитный” вклады,  $\Pi^{(E)}$  и  $\Pi^{(M)}$ , зависят от  $\mathbf{p}^2$  и  $p_0 \equiv \omega_n$ . В статическом пределе  $p_0 \equiv \omega_n = 0$  остаются только  $\Pi_{00}$  и поперечная часть  $\Pi_{ij}$ , поэтому модификация уравнений Максвелла имеет вид

$$(\mathbf{p}^2 + \Pi^{(E)}) A_0 = j_0 , \quad (\text{D.44})$$

$$(\mathbf{p}^2 + \Pi^{(M)}) \left( \delta_{ik} - \frac{p_i p_k}{\mathbf{p}^2} \right) A_i = j_k . \quad (\text{D.45})$$

Нас будет интересовать поведение полей на больших расстояниях, т.е. предел  $\mathbf{p}^2 \rightarrow 0$ . При этом порядок предельных переходов существенен: сначала нужно положить  $p_0 \equiv \omega_n = 0$ , а затем брать предел малых  $\mathbf{p}^2$ .

Взаимодействие фермионов с электромагнитным полем вводится, как обычно, путём замены  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$  в действии (D.28), поэтому диаграмма рис. D.3 даёт

$$\Pi^{\mu\nu}(p, p') = -e^2 \int \text{tr} [\gamma^\mu S(x, y) \gamma^\nu S(y, x)] e^{ip_\lambda^{(i)} x^\lambda} e^{-ip_\rho^{(f)} y^\rho} d^4 x d^4 y ,$$

где  $p^\mu = (\omega_{n_i}, \mathbf{p}^{(i)})$ ,  $p'^\mu = (\omega_{n_f}, \mathbf{p}^{(f)})$  — импульсы входящего и выходящего фотона, интегрирование по  $x^0$  и  $y^0$  ведётся в интервале  $(0, \beta)$ , а пропагатор фермиона даётся выражением (D.31). Выделяя  $\delta$ -функции сохранения импульса и энергии (при этом последняя понимается в смысле (D.32)) и полагая  $\omega_{n_i} = \omega_{n_f} = 0$ ,  $\mathbf{p}^{(i)} = \mathbf{p}^{(f)} = \mathbf{p}$ , получим

$$\Pi_{\mu\nu}(\mathbf{p}) = \frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \int d^3 \mathbf{q} \sum_{n'} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (-i\hat{q} + m) \gamma^\nu (-i(\hat{q} + \hat{p}) + m)]}{(q^2 + m^2) ((q + p)^2 + m^2)} ,$$

где  $\hat{q} = \gamma^\mu q_\mu$ , импульс фотона равен  $p^\mu = (0, \mathbf{p})$ ,  $q_0 = \frac{2\pi n'}{\beta}$ , суммирование ведётся по полуцелым  $n'$ , а квадраты в знаменателе понимаются в смысле четырёхмерного евклидова пространства. Суммирование по мацубаровским частотам вновь выполним с помощью формулы (D.43). Перейдя к пределу малого импульса фотона, получим

$$\Pi_{\mu\nu}(\mathbf{p} \rightarrow 0, \omega = 0) = \frac{2e^2}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{q} \oint \frac{dq_0}{2\pi i} \text{tg} \left( \frac{\beta}{2} q_0 \right) \cdot \frac{2q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} (q_0^2 + \mathbf{q}^2 + m^2)}{(q_0^2 + \mathbf{q}^2 + m^2)^2} \quad (\text{D.46})$$





Рис. D.4: Интерпретация поляризационного оператора с точки зрения рассеяния фотона в среде.

Полюса подынтегрального выражения находятся при  $q_0 = \pm i\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ ; они показывают, что по существу мы имеем дело с рассеянием фотона вперёд на фермионах и антифермионах среды, что схематически изображено на рис. D.4, где крестики обозначают частицы среды. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда формально однопетлевое вычисление соответствует древесным диаграммам рассеяния в среде, причём взаимодействие частиц среды между собой не учитывается; эта ситуация в определённом смысле аналогична встретившейся в предыдущем разделе (формально однопетлевое вычисление эффективного потенциала соответствует приближению, в котором частицы среды не взаимодействуют между собой).

Выполняя интегрирование по  $dq_0$  в (D.46) с помощью теоремы о вычетах, и опуская слагаемые, не зависящие от температуры, получим для 00-компоненты

$$\Pi_{00}(\mathbf{p} \rightarrow 0, \omega = 0) \equiv \Pi^{(E)} = \frac{e^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dq}{\omega_q} \cdot \frac{\omega_q^2 + q^2}{e^{\frac{\omega_q}{T}} + 1}, \quad (\text{D.47})$$

где  $\omega_q = \sqrt{q^2 + m^2}$  (в вычислении, приводящем к (D.47), удобно воспользоваться трюком с интегрированием по частям, аналогичным использованному в (D.42)). В то же время, в пределе малого импульса фотона пространственные компоненты  $\Pi_{ij}$  равны нулю, т.е.

$$\Pi^{(M)}(\mathbf{p} \rightarrow 0, \omega = 0) = 0,$$

В соответствии с (D.44) и (D.45) это означает, что электрическое поле экранируется в среде, а магнитное поле — не экранируется (разумеется, мы убедились в этом лишь в рамках однопетлевого приближения). Действительно, решение уравнения (D.44) в координатном представлении в случае точечного заряда  $q$ , помещённого в начало координат, на больших расстояниях имеет вид

$$A_0(\mathbf{x}) = q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\mathbf{p}^2 + m_D^2} = \frac{q}{4\pi} \frac{e^{-m_D|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|},$$

где  $m_D^2 = \Pi^{(E)}(\mathbf{p} \rightarrow 0, \omega = 0)$  — квадрат дебаевской массы. Для магнитного поля явление экспоненциального убывания на больших расстояниях отсутствует. Отметим, что при  $T \ll m$  дебаевская масса экспоненциально мала (напомним, что мы рассматриваем среду без химического потенциала; в ней плотность фермион-антифермионных пар экспоненциально мала при низких температурах), а в обратном пределе

$$m_D = \frac{e}{\pi} T, \quad T \gg m,$$

т.е. дебаевский радиус экранировки электрического поля  $r_D = m_D^{-1}$  убывает с температурой.

В конце этого раздела упомянем, что дебаевская экранировка возникает и тогда, когда в среде имеются заряженные бозоны, а не фермионы; вклад бозонов в квадрат дебаевской массы по порядку величины совпадает с вкладом фермионов той же массы и с тем же электрическим зарядом.

Наконец, дебаевская экранировка возникает и в электрически нейтральной среде, в которой частицы с положительным и отрицательным зарядом (например, протоны и электроны) имеют разную массу. При этом температура может быть мала; в этом случае дебаевский радиус определяется плотностью заряженных частиц.

- ▷ *Задача 4. Найти дебаевский радиус в нейтральной электрон-протонной плазме при температурах в случаях  $m_p \gg T \gg m_e$  и  $m_e \gg T \gg \Delta$ , где  $\Delta$  — энергия связи электрона в атоме водорода ( $\Delta = 13.6$  эВ). Считать заданными температуру и плотность числа электронов. Указание: провести вычисление при фиксированных химических потенциалах электронов и протонов, а для нахождения связи с плотностями числа частиц воспользоваться результатами задачи 3.*

# Монографии, обзоры

Приведем (далеко не полный) список монографий и обзоров, в которых рассматриваются вопросы, затронутые в этой книге.

## Монографии.

1. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, Наука, Москва, 1975.
2. А. Д. Долгов, Я. Б. Зельдович, М. В. Сажин, *Космология ранней Вселенной*, Изд-во МГУ, Москва, 1988.
3. А. Д. Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, Наука, Москва, 1990.
4. E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, Redwood City, 1990 – *Frontiers in physics*, 69.
5. P. J. E. Peebles, *Principles of physical cosmology*, Princeton University Press, 1993.
6. A. Vilenkin and E. P. S. Shellard *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, 1994.
7. J. A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press, 1999.
8. А. В. Захаров, *Макроскопическая гравитация*, Янус-К, Москва, 2000.
9. S. Dodelson, *Modern Cosmology* Academic Press, Amsterdam, 2003.
10. V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.

## Обзоры общего характера.

11. A. D. Dolgov and Y. B. Zeldovich, *Cosmology And Elementary Particles*, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 1.
12. R. H. Brandenberger, *Particle physics aspects of modern cosmology*, arXiv:hep-ph/9701276.
13. M. S. Turner and J. A. Tyson, *Cosmology at the millennium*, Rev. Mod. Phys. **71** (1999) S145 [arXiv:astro-ph/9901113].

14. W. L. Freedman and M. S. Turner, *Measuring and understanding the universe*, Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 1433 [arXiv:astro-ph/0308418].
15. V. Rubakov, *Introduction to cosmology*, PoS **RTN2005** (2005) 003.

### Лекции на школах по физике высоких энергий для молодых учёных.

16. J. A. Peacock, *Cosmology and particle physics*, Proc. 1998 European School of High-Energy Physics, St. Andrews, Scotland, 23 Aug - 5 Sep 1998
17. M. Shaposhnikov, *Cosmology and astrophysics*, Proc. 2000 European School of High-Energy Physics, Caramulo, Portugal, 20 Aug - 2 Sep 2000.
18. V. A. Rubakov, *Cosmology and astrophysics*, Proc. 2001 European School of High-Energy Physics, Beatenberg, Switzerland, 2001.
19. I. I. Tkachev, *Astroparticle physics*, Proc. 2003 European School on High-Energy Physics, Tsakhkadzor, Armenia, 24 Aug - 6 Sep 2003. arXiv:hep-ph/0405168.

### Обзоры по конкретным темам.

В скобках указаны номера соответствующих глав и разделов книги.

20. S. Weinberg, *The Cosmological Constant Problem*, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 1 (Гл. 4).
21. V. Sahni and A. A. Starobinsky, *The Case for a Positive Cosmological Lambda-term*, Int. J. Mod. Phys. D **9** (2000) 373 [arXiv:astro-ph/9904398] (Гл. 4) .
22. S. Weinberg, *The cosmological constant problems*, arXiv:astro-ph/0005265 (Гл. 4).
23. А. Д. Чернин, *Космический вакуум*, Усп. Физ. Наук **44** (2001) 1153 (Гл. 4).
24. T. Padmanabhan, *Cosmological constant: The weight of the vacuum*, Phys. Rept. **380** (2003) 235 [arXiv:hep-th/0212290] (Гл. 4).
25. P. J. E. Peebles and B. Ratra, *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 559 [arXiv:astro-ph/0207347] (Гл. 4).
26. V. Sahni, *Dark matter and dark energy*, Lect. Notes Phys. **653** (2004) 141 [arXiv:astro-ph/0403324] (Гл. 4).
27. A. D. Dolgov, *Cosmological implications of neutrinos*, Surveys High Energ. Phys. **17** (2002) 91 [arXiv:hep-ph/0208222] (Гл. 7).
28. A. D. Dolgov, *Neutrinos in cosmology*, Phys. Rept. **370** (2002) 333 [arXiv:hep-ph/0202122] (Гл. 7).
29. A. Merchant Boesgaard and G. Steigman, *Big Bang Nucleosynthesis: Theories And Observations*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **23** (1985) 319 (Гл. 8).

30. S. Sarkar, *Big bang nucleosynthesis and physics beyond the standard model*, Rept. Prog. Phys. **59** (1996) 1493 [arXiv:hep-ph/9602260] (Гл. 8).
31. K. A. Olive, G. Steigman and T. P. Walker, *Primordial nucleosynthesis: Theory and observations*, Phys. Rept. **333** (2000) 389 [arXiv:astro-ph/9905320] . (Гл. 8)
32. J. R. Primack, D. Seckel and B. Sadoulet, *Detection of cosmic dark matter*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **38** (1988) 751 (Гл. 9).
33. P. F. Smith and J. D. Lewin, *Dark matter detection*, Phys. Rept. **187** (1990) 203 (Гл. 9).
34. A. Bottino and N. Fornengo, *Dark matter and its particle candidates*, arXiv:hep-ph/9904469 (Гл. 9).
35. K. A. Olive, *Dark matter*, arXiv:astro-ph/0301505 (Гл. 9).
36. G. Bertone, D. Hooper and J. Silk, *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*, Phys. Rept. **405** (2005) 279 (Гл. 9). [arXiv:hep-ph/0404175].
37. G. Jungman, M. Kamionkowski and K. Griest, *Supersymmetric dark matter*, Phys. Rept. **267** (1996) 195 [arXiv:hep-ph/9506380] (Раздел 9.6).
38. Д. С. Горбунов, С. Л. Дубовский и С. В. Троицкий, *Калибровочный механизм передачи нарушения суперсимметрии*, Усп. Физ. Наук **169** (1999) 705, [arXiv:hep-ph/9905466] (Раздел 9.6).
39. М. И. Высоцкий и Р. Б. Невзоров, *Избранные вопросы феноменологической суперсимметрии*, Усп. Физ. Наук **44** (2001) 939 (Раздел 9.6).
40. J. E. Kim, *Light Pseudoscalars, Particle Physics And Cosmology*, Phys. Rept. **150** (1987) 1 (Раздел 9.7.1).
41. M. S. Turner, *Windows On The Axion*, Phys. Rept. **197** (1990) 67 (Раздел 9.7.1) .
42. В. А. Рубаков и М. Е. Шапошников, *Электрослабое несохранение барионного числа в ранней Вселенной и в столкновениях частиц при высоких энергиях* , Усп. Физ. Наук **166** (1996) 493, [arXiv:hep-ph/9603208] (Гл. 10 и разделы 11.2.1, 11.5).
43. E. W. Kolb and M. S. Turner, *Grand Unified Theories And The Origin Of The Baryon Asymmetry*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **33** (1983) 645 (Гл. 11).
44. A. D. Dolgov, *NonGUT baryogenesis*, Phys. Rept. **222** (1992) 309 (Гл. 11).
45. A. D. Dolgov, *Baryogenesis, 30 years after*, arXiv:hep-ph/9707419 (Гл. 11).
46. A. Riotto and M. Trodden, *Recent progress in baryogenesis*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **49** (1999) 35 [arXiv:hep-ph/9901362] (Гл. 11).
47. W. Buchmuller and M. Plumacher, *Neutrino masses and the baryon asymmetry*, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 5047 [arXiv:hep-ph/0007176] (Раздел 11.4).

48. W. Buchmuller, P. Di Bari and M. Plumacher, *Leptogenesis for pedestrians*, *Annals Phys.* **315** (2005) 305 [arXiv:hep-ph/0401240] (Раздел 11.4).
49. A. G. Cohen, D. B. Kaplan and A. E. Nelson, *Progress in electroweak baryogenesis*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **43** (1993) 27 [arXiv:hep-ph/9302210] (Раздел 11.5).
50. M. Trodden, *Electroweak baryogenesis*, *Rev. Mod. Phys.* **71** (1999) 1463 [arXiv:hep-ph/9803479] (Раздел 11.5).
51. K. Enqvist and A. Mazumdar, *Cosmological consequences of MSSM flat directions*, *Phys. Rept.* **380** (2003) 99 [arXiv:hep-ph/0209244] (Разделы 11.6 и 12.7).
52. A. Vilenkin, *Cosmic Strings And Domain Walls*, *Phys. Rept.* **121** (1985) 263 (Гл. 12).
53. M. B. Hindmarsh and T. W. B. Kibble, *Cosmic strings*, *Rept. Prog. Phys.* **58** (1995) 477 [arXiv:hep-ph/9411342] (Гл. 12).
54. С. С. Герштейн, Е. П. Кузнецов, В. А. Рябов, *Природа массы нейтрино и нейтринные осцилляции*, *Усп. Физ. Наук* **167** (1997) 811 (Приложение С).
55. R. N. Mohapatra, *ICTP lectures on theoretical aspects of neutrino masses and mixings*, arXiv:hep-ph/0211252 (Приложение С).
56. С. М. Биленький, *Массы нейтрино, смешивание и осцилляции нейтрино*, *Усп. Физ. Наук* **173** (2003) 1137 (Приложение С).
57. У. М. Альберико и С. М. Биленький, *Массы нейтрино, смешивание и осцилляции нейтрино*, *ЭЧАЯ* **35** (2004) 545, [arXiv:hep-ph/0306239] (Приложение С).
58. A. de Gouvea, *2004 TASI lectures on neutrino physics*, arXiv:hep-ph/0411274 (Приложение С).
59. S. F. King, *Neutrino mass models*, *Rept. Prog. Phys.* **67** (2004) 107 [arXiv:hep-ph/0310204] (Приложение С).
60. G. Altarelli and F. Feruglio, *Models of neutrino masses and mixings*, *New J. Phys.* **6** (2004) 106 [arXiv:hep-ph/0405048] (Приложение С).
61. E. V. Shuryak, *Quantum Chromodynamics And The Theory Of Superdense Matter*, *Phys. Rept.* **61**, 71 (1980) (Приложение D).
62. D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe, *QCD And Instantons At Finite Temperature*, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 43 (Приложение D).

# Литература

- [1] D. P. Schneider *et al.* [SDSS Collaboration], *Astron. J.* **123**, 567 (2002), <http://www.sdss.org/dr1/algorithms/edrpaper.html#fig-ZhistQso>
- [2] O. Le Fevre *et al.* [The VVDS Team Collaboration], “VVDS: early results on LSS distribution to  $z$  1.5,” *arXiv:astro-ph/0402203*.
- [3] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).
- [4] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], *J. Phys. G* **33** (2006) 1.
- [5] G. Hinshaw *et al.*, “Three-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Temperature analysis,” *arXiv:astro-ph/0603451*; D. N. Spergel *et al.*, “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: Implications for cosmology,” *arXiv:astro-ph/0603449*.
- [6] W. L. Freedman *et al.*, *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001).
- [7] N. J. Cornish, D. N. Spergel, G. D. Starkman and E. Komatsu, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 201302.
- [8] E. Gawiser and J. Silk, *Phys. Rept.* **333**, 245 (2000) [*arXiv:astro-ph/0002044*].
- [9] J. C. Mather *et al.*, *Astrophys. J.* **512** (1999) 511.
- [10] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003) [*arXiv:astro-ph/0302207*].
- [11] <http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap980614.html> & [/ap030814.html](http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap030814.html);  
J. P. Kneib *et al.*, *Astrophys. J.* **598**, 804 (2003).
- [12] K. G. Begeman, A. H. Broeils and R. H. Sanders, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **249** (1991) 523.
- [13] Хокинг С., Эллис Дж., *Крупномасштабная структура пространства-времени* — М.: Мир, 1977. — 431 с.
- [14] A. V. Filippenko and A. G. Riess, “Evidence from Type Ia Supernovae for an Accelerating Universe,” *arXiv:astro-ph/0008057*.
- [15] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astrophys. J.* **607** (2004) 665
- [16] P. Astier *et al.*, “The Supernova Legacy Survey: Measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the First Year Data Set,” *Astron. Astrophys.* **447** (2006) 31 [*arXiv:astro-ph/0510447*].

- [17] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*; в 10 т. Т. V: *Статистическая физика*. Ч. I. — 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 616 с.
- [18] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*; в 10 т. Т. IV: В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*. — 4-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 720 с.
- [19] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*; в 10 т. Т. II: *Теория поля*. — 8-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 536 с.
- [20] A. H. Jaffe *et al.* [Boomerang Collaboration], Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 3475.
- [21] A. D. Dolgov, S. H. Hansen, S. Pastor, S. T. Petcov, G. G. Raffelt and D. V. Semikoz, Nucl. Phys. B **632** (2002) 363 [arXiv:hep-ph/0201287].
- [22] D. Notzold and G. Raffelt, Nucl. Phys. B **307** (1988) 924.
- [23] A. Pierce and H. Murayama, Phys. Lett. B **581** (2004) 218 [arXiv:hep-ph/0302131].
- [24] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*; в 10 т. Т. III: *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. — 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 808 с.
- [25] D. S. Akerib *et al.* [CDMS Collaboration], Phys. Rev. Lett. **96** (2006) 011302 [arXiv:astro-ph/0509259].
- [26] K. Y. Choi and L. Roszkowski, AIP Conf. Proc. **805** (2006) 30 [arXiv:hep-ph/0511003].
- [27] A. Bottino, N. Fornengo and S. Scopel, Phys. Rev. D **67** (2003) 063519 [arXiv:hep-ph/0212379].
- [28] K. A. Olive, “TASI lectures on astroparticle physics,” arXiv:astro-ph/0503065.
- [29] A. de Gouvea, T. Moroi and H. Murayama, Phys. Rev. D **56** (1997) 1281 [arXiv:hep-ph/9701244].
- [30] D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53**, 43 (1981).
- [31] С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, А. А. Старобинский, ЖЭТФ **70** (1976) 1577.
- [32] E. Witten, Phys. Rev. D **30**, 272 (1984).
- [33] K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. E. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 2887 [arXiv:hep-ph/9605288];  
F. Karsch, T. Neuhaus, A. Patkos and J. Rank, Nucl. Phys. B **474** (1996) 217 [arXiv:hep-lat/9603004];  
F. Karsch, T. Neuhaus, A. Patkos and J. Rank, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **53** (1997) 623 [arXiv:hep-lat/9608087].
- [34] Рубаков В.А., *Классические калибровочные поля* — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 336 с.



- [35] M. N. Chernodub, F. V. Gubarev, E. M. Ilgenfritz and A. Schiller, Phys. Lett. B **443** (1998) 244 [arXiv:hep-lat/9807016].
- [36] L. Pogosian, S. H. H. Tye, I. Wasserman and M. Wyman, Phys. Rev. D **68** (2003) 023506 [Erratum-ibid. D **73** (2006) 089904] [arXiv:hep-th/0304188].
- [37] E. Jeong and G. F. Smoot, Astrophys. J. **624**, 21 (2005) [arXiv:astro-ph/0406432].
- [38] U. Seljak, U. L. Pen and N. Turok, Phys. Rev. Lett. **79**, 1615 (1997); A. A. Fraisse, “Constraints on topological defects energy density from first year WMAP results,” arXiv:astro-ph/0503402.
- [39] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, Phys. Rev. D **30**, 2212 (1984).
- [40] P. Arnold, D. Son and L. G. Yaffe, Phys. Rev. D **55** (1997) 6264 [arXiv:hep-ph/9609481].
- [41] D. Bodeker, G. D. Moore and K. Rummukainen, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83** (2000) 583 [arXiv:hep-lat/9909054]; G. D. Moore, arXiv:hep-ph/0009161.
- [42] S. Y. Khlebnikov and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **308** (1988) 885; K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen and M. E. Shaposhnikov, Nucl. Phys. B **458**, 90 (1996).
- [43] W. Buchmuller, P. Di Bari and M. Plumacher, Annals Phys. **315** (2005) 305 [arXiv:hep-ph/0401240];  
W. Buchmuller, P. Di Bari and M. Plumacher, Nucl. Phys. B **665** (2003) 445 [arXiv:hep-ph/0302092].
- [44] С. Вайнберг, *Гравитация и космология* — М.: Мир, 1975.
- [45] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Г., *Современная геометрия: Методы и приложения*. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 760 с.
- [46] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *Введение в теорию квантованных полей*. — 4-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 600 с.
- [47] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б., *Квантовая теория поля*; в 2 т.: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984.
- [48] С. Вайнберг, *Квантовая теория поля*; в 3 т.— М.: УРСС, 2003.
- [49] C. Bernard *et al.* [MILC Collaboration], Phys. Rev. D **71** (2005) 034504 [arXiv:hep-lat/0405029].
- [50] J. N. Bahcall, A. M. Serenelli and S. Basu, Astrophys. J. **621** (2005) L85 [arXiv:astro-ph/0412440].
- [51] M. Ishitsuka [Super-Kamiokande Collaboration], “Super Kamiokande results: Atmospheric and solar neutrinos,” arXiv:hep-ex/0406076.
- [52] Murayama H., <http://hitoshi.berkeley.edu/neutrino/>
- [53] M. C. Gonzalez-Garcia, “Global Analysis of Neutrino Data”, arXiv:hep-ph/0410030.